Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

А. И. Генералов, М. А. Качалова, П. А. Мостовский

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. IX. АЛГЕБРА КОГОМОЛОГИЙ ДЛЯ СЕРИИ $D(3\mathcal{K})$ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ, ОТЛИЧНОЙ ОТ 2

§1. Введение

Настоящая работа продолжает серию работ, посвященных иссследованию когомологий Хохшильда для алгебр диэдрального типа (см. [1–8]). Мы вычисляем структуру кольца когомологий Хохшильда для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ для случая, когда основное алгебраически замкнутое поле имеет характеристику, отличную от 2. Для алгебр этой серии в случае, когда характеристика основного поля равна 2, описание кольца когомологий Хохшильда было получено в [1]. Для характеристики, отличной от 2, в [5] построена бимодульная резольвента, а также вычислены размерности групп когомологий. В данной статье даётся описание мультипликативной структуры кольца когомологий Хохшильда на языке образующих и определяющих соотношений.

Для нахождения матриц трансляций и проверки соотношений мы написали программу, исходный код которой доступен по ссылке `https://github.com/pigmasha/d3`.

§2. Формулировка основного результата

Алгебры R_{n_1,n_2,n_3}, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, серии $D(3\mathcal{K})$ (над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики $p := \operatorname{char} K$) описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

Ключевые слова: когомологии Хохшильда, алгебры диэдрального типа.
Первый из авторов благодарит грант РФФИ 20-01-00030 за поддержку.

$$\mathcal{Q}:\quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, shift left, "a_{21}"] \arrow[dr, shift left, "a_{31}"] & & 2 \arrow[ll, shift left, "a_{12}"] \arrow[dl, shift left, "a_{32}"] \\ & 3 \arrow[ul, shift left, "a_{13}"] \arrow[ur, shift left, "a_{23}"] & \end{tikzcd}$$

$$0 = a_{21}a_{13} = a_{31}a_{12} = a_{32}a_{21} = a_{12}a_{23} = a_{13}a_{32} = a_{23}a_{31},$$
$$(a_{12}a_{21})^{n_3} = (a_{13}a_{31})^{n_2},\ (a_{23}a_{32})^{n_1} = (a_{21}a_{12})^{n_3},$$
$$(a_{31}a_{13})^{n_2} = (a_{32}a_{23})^{n_1};$$

композицию путей мы записываем справа налево. В дальнейшем мы предполагаем, что $p \neq 2$. Положим $N = n_1 + n_2 + n_3$.

Рассмотрим 4 варианта условий на параметры алгебры R_{n_1,n_2,n_3}:

(у1) p не делит ни одно из n_1, n_2, n_3;

(у2) p делит ровно одно из значений n_1, n_2, n_3 (не умаляя общности можно считать, что $p \mid n_1$);

(у3) p делит ровно два из значений n_1, n_2, n_3 (не умаляя общности можно считать, что $p \mid n_1$ и $p \mid n_2$);

(у4) p делит все три n_1, n_2, n_3.

Пусть

$$\mathcal{X} = \{c_1, c_2, c_3, z\} \cup \mathcal{X}_1 \cup \{d_1, d_2, d_3, u_1, u_2\} \cup \mathcal{X}_2 \cup \{e, h_1, h_2\} \cup \mathcal{X}_3,$$

где

$$\mathcal{X}_1 = \begin{cases} \{w\}, & \text{если выполнено (у1)}, \\ \{w_2, x_1, x_3\}, & \text{если выполнено (у2)}, \\ \{w_2, w_3, x_1\}, & \text{если выполнено (у3)}, \\ \{w_2, w_3, w_1\}, & \text{если выполнено (у4)}, \end{cases}$$

$$\mathcal{X}_2 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если выполнено (у1)}, \\ \{s_2, y_1, y_3\}, & \text{если выполнено (у2)}, \\ \{s_2, s_3, y_1\}, & \text{если выполнено (у3)}, \\ \{s_2, s_3, s_1\}, & \text{если выполнено (у4)}, \end{cases}$$

$$\mathcal{X}_3 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если выполнено (у1),} \\ \{v_1, v_2, q\}, & \text{если выполнены (у2), (у3) или (у4).} \end{cases}$$

Также для описания соотношений введём два множества, состоящие из натуральных чисел:

$$I_w = \begin{cases} \varnothing, & \text{если выполнено (у1),} \\ \{2\}, & \text{если выполнено (у2),} \\ \{2,3\}, & \text{если выполнено (у3),} \\ \{1,2,3\}, & \text{если выполнено (у4),} \end{cases}$$

$$I_x = \begin{cases} \varnothing, & \text{если выполнено (у1) или (у4),} \\ \{1,3\}, & \text{если выполнено (у2),} \\ \{1\}, & \text{если выполнено (у3).} \end{cases}$$

Замечание 1. I_w – это множество индексов для образующих w_i и s_i, а I_x – множество индексов для образующих x_i и y_i.

На алгебре $K\langle\mathcal{X}\rangle$ введём градуировку так, что

$$\begin{aligned}
&\deg c_i = 0 \ (i = 1,2,3),\\
&\deg z = \deg w = \deg w_i = \deg x_j = 1 \ (i = 1,2,3,\ j = 1,3),\\
&\deg d_i = \deg u_j = \deg q = 2 \ (i = 1,2,3,\ j = 1,2),\\
&\deg s_i = \deg y_j = 3 \ (i = 1,2,3,\ j = 1,3),\\
&\deg e = 4,\\
&\deg h_j = 6 \ (j = 1,2),\\
&\deg v_j = 7 \ (j = 1,2).
\end{aligned}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = K\langle\mathcal{X}\rangle/I$, где идеал I алгебры $K\langle\mathcal{X}\rangle$ порождён следующими элементами:
– степени 0:

$$c_i c_j \ (i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j);\ c_1^{n_3+1},\ c_2^{n_1+1},\ c_3^{n_2+1};$$

– степени 1:

$$c_i z \ (i \in \{1,2,3\});$$

– степени 1, если выполнено (у1):

$$c_1^{n_3} w,\ c_2^{n_1} w,\ c_3^{n_2} w;$$

– степени 1, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$c_i^{n_{i-1}} w_i,\ c_j w_i \ (i \in I_w, j \in \{1,2,3\}, i \neq j);$$

– степени 1, если выполнены (у2) или (у3):

$$c_i^{n_{i-1}-1}x_i,\ c_jx_i\ (i\in I_x, j\in\{1,2,3\}, i\neq j); \tag{1}$$

– степени 2:

$$c_id_j\ (i,j\in\{1,2,3\}, i\neq j);\ c_iu_j\ (i\in\{1,2,3\}, j\in\{1,2\});$$

– степени 2, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$c_iq\ (i\in\{1,2,3\});\ zw_i,\ w_iw_j\ (i,j\in I_w, i\neq j);$$

– степени 2, если выполнены (у2) или (у3):

$$zx_i\ (i\in I_x);\ w_ix_j\ (i\in I_w, j\in I_x);$$

– степени 2, если выполнено (у2):

$$x_1x_3;$$

– степени 2, если выполнены (у1), (у2) или (у3):

$$c_1^{n_3-1}d_1; \tag{2}$$

– степени 2, если выполнены (у1) или (у2):

$$c_2^{n_1-1}d_2,\ c_3^{n_2-1}d_3;$$

– степени 2, если выполнены (у3) или (у4):

$$c_2^{n_1}d_2;$$

– степени 2, если выполнено (у3):

$$c_2^{n_1-1}d_2+c_3^{n_2-1}d_3;$$

– степени 2, если выполнено (у4):

$$c_1^{n_3}d_1,\ c_1^{n_3-1}d_1+c_2^{n_1-1}d_2+c_3^{n_2-1}d_3;$$

– степени 3:

$$zd_i\ (i\in\{1,2,3\});$$

– степени 3, если выполнено (у1):

$$wu_1,\ wu_2-(n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1)zu_2;$$

– степени 3, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$zq,\ c_i^{n_{i-1}}s_i,\ c_js_i\ (i\in I_w, j\in\{1,2,3\}, i\neq j);$$
$$w_iq,\ w_iu_1,\ w_iu_2-zu_2,\ w_id_i+c_is_i\ (i\in I_w);$$
$$w_id_j\ (i\in I_w,\ j\in\{1,2,3\}, i\neq j);$$

– степени 3, если выполнены (у2) или (у3):

$$c_i^{n_{i-1}-1}y_i,\ c_jy_i\ (i\in I_x, j\in\{1,2,3\}, i\neq j); \tag{3}$$
$$x_iq,\ x_iu_j,\ x_id_i+c_iy_i\ (i\in I_x, j\in\{1,2\});$$
$$x_id_j\ (i\in I_x, j\in\{1,2,3\}, i\neq j);$$

– степени 4:

$$d_id_j\ (i,j\in\{1,2,3\}, i\neq j);\ d_i^2+c_i^2e\ (i\in\{1,2,3\});$$
$$u_iu_j\ (i,j\in\{1,2\});\ d_iu_j\ (i\in\{1,2,3\},\ j\in\{1,2\});$$

– степени 4, если выполнено (у1):

$$c_2^{n_1}e;$$

– степени 4, если выполнены (у1) или (у2):

$$c_3^{n_2}e;$$

– степени 4, если выполнены (у1), (у2) или (у3):

$$c_1^{n_3}e;$$

– степени 4, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$q^2;\ zs_i,\ w_is_j\ (i,j\in I_w);\ d_iq\ (i\in\{1,2,3\});\ u_jq\ (j\in\{1,2\});$$

– степени 4, если выполнены (у2) или (у3):

$$zy_j,\ w_iy_j,\ x_js_i\ (i\in I_w, j\in I_x);\ x_iy_j\ (i,j\in I_x);$$

– степени 5, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$u_js_i,\ s_iq,\ d_is_i-c_iw_ie\ (i\in I_w, j\in\{1,2\});$$
$$d_is_j\ (i\in\{1,2,3\}, j\in I_w, i\neq j);$$

– степени 5, если выполнены (у2) или (у3):

$$u_jy_i,\ y_iq,\ d_iy_i-c_ix_ie\ (i\in I_x, j\in\{1,2\});$$
$$d_iy_j\ (i\in\{1,2,3\}, j\in I_x, i\neq j);$$

– степени 6:

$$eu_j,\ c_ih_j\ (i\in\{1,2,3\}, j\in\{1,2\});$$

– степени 6, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$s_is_j\ (i,j\in I_w, i\neq j);$$

– степени 6, если выполнены (у2) или (у3):

$$y_is_j\ (i\in I_x, j\in I_w);$$

– степени 6, если выполнено (у2):

$$y_1y_3;$$

– степени 7, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$w_ih_1,\ w_ih_2 - zh_2,\ (i \in I_w);\ c_iv_j\ (i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2\});$$

– степени 7, если выполнены (у2) или (у3):

$$x_ih_j\ (i \in I_x, j \in \{1,2\});$$

– степени 8:

$$u_1h_2,\ u_2h_1,\ d_ih_j\ (i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2\});$$

– степени 8, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$w_iv_1,\ w_iv_2 - zv_2\ (i \in I_w);\ h_1q + zv_1,\ h_2q - zv_2;$$

– степени 8, если выполнены (у2) или (у3):

$$x_iv_j\ (i \in I_x, j \in \{1,2\});$$

– степени 9, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$d_iv_j,\ (i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2\});\ u_iv_j,\ v_jq\ (i,j \in \{1,2\});$$

$$s_ih_j\ (i \in I_w, j \in \{1,2\});$$

– степени 9, если выполнены (у2) или (у3):

$$y_ih_j\ (i \in I_x, j \in \{1,2\});$$

– степени 10, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$s_iv_j\ (i \in I_w, j \in \{1,2\});$$

– степени 10, если выполнены (у2) или (у3):

$$y_iv_j\ (i \in I_x, j \in \{1,2\});$$

– степени 12, если $N > 3$:

$$h_1h_2;$$

– степени 12, если $N = 3$:

$$h_1h_2 - e^3;$$

– степени 13, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$h_1v_2,\ h_2v_1;$$

– степени 14, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$v_1v_2;$$

и элементами вида

$$uv - (-1)^{\deg u \deg v} vu \ (u, v \in \mathcal{X}).$$

Замечание 2. В случае, когда $n_3 = 1$, из (1), (2) и (3) следует, что в алгебре $\mathcal{A}$ имеем $x_1 = 0$, $d_1 = 0$ и $y_1 = 0$, и в этом случае образующие x_1, d_1 и y_1 можно опустить. Аналогичное замечание относится к элементам x_3, d_3 и y_3 при $n_2 = 1$, а также к d_2 при $n_1 = 1$.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Тогда алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R_{n_1,n_2,n_3})$ *изоморфна алгебре* $\mathcal{A}$ *как градуированная* K*-алгебра.*

§3. Образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Пусть $R = R_{n_1,n_2,n_3}$ – алгебра диэдрального типа, Λ – обёртывающая алгебра алгебры R.

Следуя [5], введём обозначения

$$\alpha_i = a_{i,i+1}a_{i+1,i}, \ \beta_i = a_{i,i-1}a_{i-1,i} \ (i \in \mathbb{Z}_3).$$

Нам также потребуется вспомогательный гомоморфизм $\varphi : R \to R$, определённый в [5]. Напомним, что φ определяется как $\varphi(a_{ij}) = a_{ji}$ и продолжается до Λ-гомоморфизма как $\varphi(x \otimes y) = \varphi(y) \otimes \varphi(x)$.

Через e_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{Q}$.

Будем обозначать матрицу, состоящую из нулей и имеющую n строк и m столбцов, как $O_{n,m}$. Через O_m будем обозначать матрицу $O_{1,m}$.

Опишем образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0:

$$c_1 = (\alpha_1, \beta_2, 0), \ c_2 = (0, \alpha_2, \beta_3), \ c_3 = (\beta_1, 0, \alpha_3);$$

– степени 1:

$$z = (a_{12}, O_2, -a_{21}, O_2);$$

– степени 1, если выполнено (у1):

$$w = (n_1n_2a_{12}, n_2n_3a_{23}, n_3n_1a_{31}, O_3);$$

– степени 1, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$w_2 = (0, a_{23}, O_4);$$

– степени 1, если выполнены (у2) или (у3):

$$x_1 = (\alpha_1a_{12}, O_5);$$

– степени 1, если выполнено (у2):

$$x_3 = (O_2, \alpha_3 a_{31}, O_3);$$

– степени 1, если выполнены (у3) или (у4):

$$w_3 = (O_2, a_{31}, O_3);$$

– степени 1, если выполнено (у4):

$$w_1 = (a_{12}, O_5);$$

– степени 2:

$$d_1 = (\alpha_1, -\beta_2, O_7),\ d_2 = (0, \alpha_2, -\beta_3, O_6),\ d_3 = (-\beta_1, 0, \alpha_3, O_6),$$
$$u_1 = (O_3, \alpha_1^{n_3-1} a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \alpha_3^{n_2-1} a_{31}, O_3),$$
$$u_2 = (O_6, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1});$$

– степени 2, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$q = (\alpha_1^{n_3}, O_8);$$

– степени 3, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$s_2 = (0, a_{23}, O_{10});$$

– степени 3, если выполнены (у2) или (у3):

$$y_1 = (\alpha_1 a_{12}, O_{11});$$

– степени 3, если выполнено (у2):

$$y_3 = (O_2, \alpha_3 a_{31}, O_9);$$

– степени 3, если выполнены (у3) или (у4):

$$s_3 = (O_2, a_{31}, O_9);$$

– степени 3, если выполнено (у4):

$$s_1 = (a_{12}, O_{11});$$

– степени 4:

$$e = (e_1, e_2, e_3, O_{12});$$

– степени 6:

$$h_1 = (O_{15}, e_1, e_2, e_3, O_3),\ h_2 = (O_{18}, e_1, e_2, e_3);$$

– степени 7, если выполнены (у2), (у3) или (у4):

$$v_1 = (O_{12}, \alpha_1^{n_3-1} a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \alpha_3^{n_2-1} a_{31}, O_9),$$
$$v_2 = (O_{15}, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, O_6).$$

§4. Произведения в $\mathrm{HH}^*(R)$

Пусть $Q_\bullet \to R$ – минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры R. Тогда $\mathrm{Ext}^*_\Lambda(R,R)$ вычисляется как когомологии комплекса $(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R), \Delta)$, где Δ индуцируется дифференциалом d_Q резольвенты. Любой коцикл $f : Q_n \to R$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i : Q_{n+i} \to Q_i\}_{i\geqslant 0}$. Гомоморфизм φ_i назовём i-й трансляцией коцикла f и будем обозначать $T^i(f)$. Для коциклов $f \in \ker \Delta^n$ и $g \in \ker \Delta^m$ имеем $\mathrm{cl} g \cdot \mathrm{cl} f = \mathrm{cl}(T^0(g)T^m(f))$. Опишем трансляции для образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ ненулевой степени.

Замечание 3. Нумерация строк и столбцов в матрицах трансляций всюду начинается с нуля.

Лемма 2. *Для образующей z в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(z) = \begin{bmatrix} Z_0 & -\varphi(Z_0) \end{bmatrix},$$

$$T^1(z) = \begin{bmatrix} Z_1 & O_{3,3} & Z_2 \\ \varphi(Z_1) & \varphi(Z_2) & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

где

$$Z_0 = \mathrm{diag}(e_1 \otimes a_{12}, 0, 0), \quad Z_1 = \mathrm{diag}\left(-\sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1}, 0, 0\right),$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 \otimes a_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *Для образующей w в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(w) = \begin{bmatrix} W_0 & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(w) = \begin{bmatrix} n_1n_2W'_{12} + n_2n_3W'_{23} + n_3n_1W'_{31} + n_1n_2n_3W_{123} & O_{3,3} & W \\ n_1n_2W''_{12} + n_2n_3W''_{23} + n_3n_1W''_{31} + n_1n_2n_3\varphi(W_{123}) & O_{3,3} & O_{3,3}, \end{bmatrix}$$

где $W_0 = \mathrm{diag}(n_1n_2e_1 \otimes a_{12}, n_2n_3e_2 \otimes a_{23}, n_3n_1e_3 \otimes a_{31})$,

$$W'_{12} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\alpha_1^i \otimes a_{21}\alpha_i^{n_3-i-1} & -\sum\limits_{i=1}^{n_3-1} i\beta_2^{n_3-i-1}a_{21} \otimes \beta_2^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_{12}'' = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\alpha_1^i a_{12}\otimes\alpha_i^{n_3-i-1} & -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\beta_2^{n_3-i-1}\otimes a_{12}\beta_2^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_{123} = \operatorname{diag}\left(\sum_{i=0}^{n_3-1}\alpha_1^i\otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1}, \sum_{i=0}^{n_1-1}\alpha_2^i\otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-i-1}, \sum_{i=0}^{n_2-1}\alpha_3^i\otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-i-1}\right),$$

$$W = n_1n_2W_1 + n_2n_3W_2 + n_3n_1W_3,$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_3\otimes a_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

матрицы W_{23}', W_{31}' (соотв. W_{23}'', W_{31}'') получаются из W_{12}' (соотв. W_{12}'') циклическим сдвигом столбцов и строк и заменой индексов при a_{12}, α_1, β_3, n_3 на соответствующие. Аналогично матрицы W_2 и W_3 получаются из W_1 циклическим сдвигом столбцов и строк и заменой индексов при e_3 и a_{12} на соответствующие.

Лемма 4. (а) *Для образующей w_1 в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(w_1) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(e_1\otimes a_{12}, 0, 0) & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(w_1) = \begin{bmatrix} W_{12}' & O_{3,3} & W_1 \\ W_{12}'' & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

где W_{12}', W_{12}'' и W_1 определены в предыдущей лемме.

(б) *Для образующей w_2 в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(w_2) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(0, e_2\otimes a_{23}, 0) & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(w_2) = \begin{bmatrix} W_{23}' & O_{3,3} & W_2 \\ W_{23}'' & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

где W_{23}', W_{23}'' и W_2 определены в предыдущей лемме.

(в) *Для образующей w_3 в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(w_3) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(0, 0, e_3\otimes a_{31}) & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(w_3) = \begin{bmatrix} W_{31}' & O_{3,3} & W_3 \\ W_{31}'' & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

где W_{31}', W_{31}'' и W_3 определены в предыдущей лемме.

Лемма 5. (а) *Для образующей* x_1 *в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(x_1) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(\alpha_1 \otimes a_{12}, 0, 0) & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(x_1) = \begin{bmatrix} X_1 & O_{3,3} & O_{3,3} \\ X_2 & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

где

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\alpha_1^{i+1} \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1} & -\sum\limits_{i=1}^{n_3-1} i\beta_2^{n_3-i}a_{21} \otimes \beta_2^i & 0 \\ 0 & n_3\beta_2 \otimes \beta_3^{n_1-1}a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n_3-1} i\alpha_1^i a_{12} \otimes \alpha_1^{n_3-i} & -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\beta_2^{n_3-i} \otimes a_{12}\beta_2^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(б) *Для образующей* x_3 *в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(x_3) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(0, 0, \alpha_3 \otimes a_{31}) & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(x_3) = \begin{bmatrix} X_1' & O_{3,3} & O_{3,3} \\ X_2' & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

где X_1' *и* X_2' *получаются из* X_1 *и* X_2 *циклическим сдвигом столбцов и строк и заменой индексов при* α_1, a_{21}, a_{12}, a_{32}, β_2, β_3, n_3 *на соответствующие.*

Лемма 6. (а) *Для образующей* d_1 *в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(d_1) = \begin{bmatrix} D_1 & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(d_1) = \begin{bmatrix} -D_2 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} \\ O_{3,3} & D_3 & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$T^2(d_1) = \begin{bmatrix} -D_1 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} \\ O_{3,3} & D_2 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} \\ O_{3,3} & O_{3,3} & D_3 & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

где $D_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1 \otimes e_1, -\beta_2 \otimes e_2, 0)$, $D_2 = \operatorname{diag}(\alpha_1 \otimes e_2, -\beta_2 \otimes e_3, 0)$, $D_3 = \operatorname{diag}(-\beta_2 \otimes e_1, 0, \alpha_1 \otimes e_3)$.

(б) *Матрицы трансляций для образующих* d_2 *и* d_3 *получаются из матриц для* d_1 *циклическим сдвигом строк, столбцов и индексов у всех блоков* 3×3.

Лемма 7. (а) *Для образующей* u_1 *в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$\begin{aligned}
T^0(u_1) &= \begin{bmatrix} O_{3,3} & U_1 & O_{3,3} \end{bmatrix},\\
T^1(u_1) &= \begin{bmatrix} O_{3,3} & U_2 & O_{3,3} & O_{3,3} \\ O_{3,3} & O_{3,3} & U_3 & O_{3,3} \end{bmatrix},\\
T^2(u_1) &= \begin{bmatrix} O_{3,3} & U_1 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} \\ O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & U_4 \\ U_5 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_3^{n_2-1} a_{31} \otimes e_1 \\ \alpha_1^{n_3-1} a_{12} \otimes e_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{n_1-1} a_{23} \otimes e_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3^{n_2-1} a_{31} \otimes \beta_2^{n_3-1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{n_3-1} a_{12} \otimes \beta_3^{n_1-1} \\ \alpha_2^{n_1-1} a_{23} \otimes \beta_1^{n_2-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \operatorname{diag}\left(\alpha_1^{n_3-1} a_{12} \otimes e_1, \alpha_2^{n_1-1} a_{23} \otimes e_2, \alpha_3^{n_2-1} a_{31} \otimes e_3\right),$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3^{n_2-1} a_{31} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{n_3-1} a_{12} \otimes e_3 \\ \alpha_2^{n_1-1} a_{23} \otimes e_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_5 = \operatorname{diag}\left(u_{5,1}, u_{5,2}, u_{5,3}\right),$$

$$\begin{aligned}
u_{5,1} &= \begin{cases} \alpha_1^{n_3-1} a_{12} \otimes \beta_1^{n_2-1}, & \text{если } n_1 = 1, \\ 0, \quad \text{если } n_1 > 1, \end{cases}\\
u_{5,2} &= \begin{cases} \alpha_2^{n_1-1} a_{23} \otimes \beta_2^{n_3-1}, & \text{если } n_2 = 1, \\ 0, \quad \text{если } n_2 > 1, \end{cases}\\
u_{5,3} &= \begin{cases} \alpha_3^{n_2-1} a_{31} \otimes \beta_3^{n_1-1}, & \text{если } n_3 = 1, \\ 0, \quad \text{если } n_3 > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

(б) *Для образующей* u_2 *в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(u_2) = \begin{bmatrix} O_{3,3} & O_{3,3} & U_6 \end{bmatrix},$$
$$T^1(u_2) = \begin{bmatrix} O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & U_7 \\ -\varphi(U_2) & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} \end{bmatrix},$$
$$T^2(u_2) = \begin{bmatrix} O_{3,3} & O_{3,3} & -\varphi(U_1) & O_{3,3} & O_{3,3} \\ -U_9 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} \\ O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & U_8 & O_{3,3} \end{bmatrix},$$

где

$$U_6 = \operatorname{diag}\left(a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes e_1, a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes e_2, a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes e_3\right),$$

$$U_7 = \begin{pmatrix} 0 & a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes e_3 \\ a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes e_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes e_1 \\ a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes e_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes e_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_9 = \operatorname{diag}\left(u_{9,1}, u_{9,2}, u_{9,3}\right),$$

$$u_{9,1} = \begin{cases} \beta_1^{n_2-1} \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, & \text{если } n_1 = 1, \\ 0, & \text{если } n_1 > 1, \end{cases}$$
$$u_{9,2} = \begin{cases} \beta_2^{n_3-1} \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, & \text{если } n_2 = 1, \\ 0, & \text{если } n_2 > 1, \end{cases}$$
$$u_{9,3} = \begin{cases} \beta_3^{n_1-1} \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, & \text{если } n_3 = 1, \\ 0, & \text{если } n_3 > 1. \end{cases}$$

Лемма 8. (a) *Для образующей v_1 в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(v_1) = \begin{bmatrix} O_{12,3} & U_1 & O_{9,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(v_1) = \begin{bmatrix} O_{12,3} & U_2 & O_{3,3} & O_{9,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & U_3 & O_{9,3} \end{bmatrix},$$

$$T^2(v_1) = \begin{bmatrix} O_{12,3} & U_1 & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & U_4 & O_{6,3} \\ U_{10} & O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3} \end{bmatrix},$$

$$T^3(v_1) = \begin{bmatrix} O_{12,3} & U_2 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{9,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & U_3 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{9,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & -U_1 & O_{9,3} \\ U_{11} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{9,3} \end{bmatrix},$$

$$T^4(v_1) = \begin{bmatrix} O_{12,3} & U_1 & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{9,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & U_4 & O_{3,3} & O_{9,3} \\ U_{10} & O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{9,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{9,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & U_3 & O_{9,3} \end{bmatrix},$$

$$T^5(v_1) = \begin{bmatrix} O_{12,3} & U_2 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & U_3 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & -U_1 & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3} \\ U_{11} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & U_4 & O_{6,3} \\ O_{12,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3} \end{bmatrix},$$

где $U_{10} = \begin{bmatrix} O_{6,3} & -U_5 & O_{3,3} \end{bmatrix}$, U_1, U_2, U_3, U_4 и U_5 определены в предыдущей лемме, U_{11} – матрица с единственным ненулевым элементом в позиции $(2,4)$:

$$u_{11,1} = \begin{cases} \alpha_2^{n_1-1}a_{23} \otimes \beta_3^{n_1-1}, & \text{если } n_2 = 1 \text{ и } n_3 = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицы i-х трансляций (для $5 < i \leqslant 7$) описываются следующим образом. Матрица 6-й трансляции имеет:

U_{10} *в позиции* $(0,6)$;
U_1 *в позиции* $(12,0)$;
U_4 *в позиции* $(21,3)$;
U_3 *в позиции* $(24,12)$;
$-U_1$ *в позиции* $(30,15)$.

Матрица 7-й трансляции имеет:

U_{11} *в позиции* $(0,9)$;

U_2 *в позиции* $(12,0)$;

U_3 *в позициях* $(15,3)$ *и* $(33,21)$;

$-U_1$ *в позиции* $(21,6)$;

U_4 *в позиции* $(30,12)$.

(б) *Для образующей* v_2 *в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(v_2) = \begin{bmatrix} O_{15,3} & U_6 & O_{6,3} \end{bmatrix},$$

$$T^1(v_2) = \begin{bmatrix} O_{9,3} & O_{3,3} & O_{6,3} & U_7 & O_{6,3} \\ O_{9,3} & -U_{12} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3} \end{bmatrix},$$

где U_6 *и* U_7 *определены в предыдущей лемме,*

$$U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes \alpha_1^{n_3-1} \\ a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \otimes \alpha_2^{n_1-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes \alpha_3^{n_2-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы i*-х трансляций (для* $1 < i \leqslant 7$*) описываются следующим образом. Если* i *чётно, то матрица* i*-й трансляции имеет:*

$(-1)^{1+i/2}U_{13}$ *в позиции* $(9,3)$;

$(-1)^{i/2}U_6$ *в позиции* $(15,0)$;

$(-1)^{1+i/2}U_8$ *в позиции* $(18,6)$;

$(-1)^{i/2}U_7$ *в позиции* $(27,9)$*, если* $i > 2$;

U_6 *в позиции* $(33,18)$*, если* $i = 6$,

где U_6*,* U_7 *и* U_8 *определены в предыдущей лемме,*

$$U_{13} = \begin{pmatrix} 0 & u_{13,1} & 0 \\ 0 & 0 & u_{13,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u_{13,1} = \begin{cases} a_{21}\alpha_1^{n_3-1} \otimes \alpha_2^{n_1-1}, & \text{\textit{если} } n_2 = 1, \\ 0, & \text{\textit{если} } n_2 > 1, \end{cases}$$

$$u_{13,2} = \begin{cases} a_{32}\alpha_2^{n_1-1} \otimes \alpha_3^{n_2-1}, & \text{\textit{если} } n_3 = 1, \\ 0, & \text{\textit{если} } n_3 > 1. \end{cases}$$

Если i *нечётно, то матрица* i*-й трансляции имеет:*

$(-1)^{1+(i-1)/2}U_{12}$ *в позиции* $(9,3)$;

$(-1)^{(i-1)/2}U_{14}$ *в позиции* $(6,6)$;

$(-1)^{(i-1)/2}U_7$ *в позиции* $(18,0)$;

$(-1)^{1+(i-1)/2}U_6$ *в позиции* $(24,9)$;

$(-1)^{(i-1)/2}U_8$ *в позиции* $(27,15)$, *если* $i>3$;

U_7 *в позиции* $(36,18)$, *если* $i=7$,

где $U_{14}=\operatorname{diag}(0,u_{14,1},0)$,

$$u_{14,1}=\begin{cases} a_{32}\alpha_2^{n_1-1}\otimes\alpha_2^{n_1-1}, & \text{если } n_2=1 \text{ и } n_3=1,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Лемма 9. *Для образующей* q *в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(q)=\begin{bmatrix} Q_1' & O_{6,3}\end{bmatrix},$$

$$T^1(q)=\begin{bmatrix} -Q_2' & O_{3,3} & O_{6,3}\\ O_{3,3} & Q_3' & O_{6,3}\end{bmatrix},$$

$$T^2(q)=\begin{bmatrix} -Q_1' & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{6,3}\\ O_{3,3} & Q_2' & O_{3,3} & O_{6,3}\\ O_{3,3} & O_{3,3} & Q_3' & O_{6,3}\end{bmatrix},$$

где

$Q_1'=\operatorname{diag}(\alpha_1^{n_3}\otimes e_1,0,0)$, $Q_2'=\operatorname{diag}(\alpha_1^{n_3}\otimes e_2,0,0)$, $Q_3'=\operatorname{diag}(0,0,\alpha_1^{n_3}\otimes e_3)$.

Лемма 10. (a) *Для образующей* s_1 *в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(s_1)=\begin{bmatrix} W_4 & O_{9,3}\end{bmatrix},$$

$$T^1(s_1)=\begin{bmatrix} \overline{W}'_{12} & O_{3,3} & W_1 & O_{6,3}\\ \overline{W}''_{12} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{6,3}\end{bmatrix},$$

$$T^2(s_1)=\begin{bmatrix} W_4 & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3}\\ O_{3,3} & O_{6,3} & O_{3,3} & O_{6,3}\\ -W_5 & O_{6,3} & W_6 & O_{6,3}\end{bmatrix},$$

$$T^3(s_1)=\begin{bmatrix} -W'_{12} & O_{3,3} & W_1 & O_{3,3} & O_{9,3}\\ -W''_{12} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{9,3}\\ O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{9,3}\\ O_{3,3} & O_{3,3} & W_7 & -W_8 & O_{9,3}\end{bmatrix},$$

где W'_{12}, W''_{12} *и* W_1 *определены в лемме* 3, $W_4=\operatorname{diag}(e_1\otimes a_{12},0,0)$,

$$\overline{W}'_{12}=\begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\alpha_1^i\otimes a_{21}\alpha_i^{n_3-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{n_3-1} i\beta_2^{n_3-i-1}a_{21}\otimes\beta_2^i & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\overline{W}''_{12}=\begin{pmatrix}-\sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\alpha_1^i a_{12}\otimes\alpha_i^{n_3-i-1} & \sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\beta_2^{n_3-i-1}\otimes a_{12}\beta_2^i & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$W_5=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e_3\otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad W_6=\mathrm{diag}(0,a_{23}\otimes e_2,0),$$

$$W_7=\mathrm{diag}(0,a_{32}\alpha_2^{n_1-1}\otimes e_2,0),\quad W_8=\mathrm{diag}(0,e_2\otimes a_{23},0).$$

(б) *Матрицы трансляций для образующих s_2 и s_3 получаются из матриц для s_1 циклическим сдвигом строк, столбцов и индексов у всех блоков 3×3.*

Лемма 11. (а) *Для образующей y_1 в качестве трансляций можно взять следующие гомоморфизмы, заданные матрицами:*

$$T^0(y_1)=\begin{bmatrix} Y_1 & O_{9,3}\end{bmatrix},$$

$$T^1(y_1)=\begin{bmatrix} \overline{X}_1 & O_{12,3}\\ \overline{X}_2 & O_{12,3}\end{bmatrix},$$

$$T^2(y_1)=\begin{bmatrix} Y_2 & -n_3\varphi(Y_1) & O_{12,3}\\ O_{3,3} & O_{3,3} & O_{12,3}\\ -n_3Y_3 & O_{3,3} & O_{12,3}\end{bmatrix},$$

$$T^3(y_1)=\begin{bmatrix} -X_1+3n_3Y_4 & O_{3,3} & n_3Y_5 & O_{12,3}\\ -X_2 & O_{3,3} & O_{3,3} & O_{12,3}\\ O_{3,6} & O_{3,6} & O_{3,6} & O_{12,6}\end{bmatrix},$$

где X_1 и X_2 определены в лемме 5, $Y_1=\mathrm{diag}(\alpha_1\otimes a_{12},0,0)$,

$$\overline{X}_1=\begin{pmatrix}-\sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\alpha_1^{i+1}\otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{n_3-1}i\beta_2^{n_3-i}a_{21}\otimes\beta_2^i & 0\\ 0 & -n_3\beta_2\otimes\beta_3^{n_1-1}a_{32} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\overline{X}_2=\begin{pmatrix}-\sum\limits_{i=1}^{n_3-1}i\alpha_1^i a_{12}\otimes\alpha_1^{n_3-i} & \sum\limits_{i=0}^{n_3-1}(i+1)\beta_2^{n_3-i}\otimes a_{12}\beta_2^i & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$Y_2=\mathrm{diag}((n_3+1)\alpha_1\otimes a_{12},n_3\beta_2\otimes a_{23},0),$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_4 = \mathrm{diag}(0, \beta_2 \otimes \beta_3^{n_1-1}a_{32}, 0),$$

$$Y_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \otimes a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(б) *Матрицы трансляций для образующей* y_3 *получаются из матриц для* y_1 *циклическим сдвигом строк, столбцов и индексов у всех блоков* 3×3.

Лемма 12. *Для образующей* e *матрицы* i*-х трансляций описываются следующим образом. Если* i *чётно, то матрица* i*-й трансляции имеет:*

I_1 *в позициях* $(3 \cdot 6j, 3 \cdot 6j)$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i}{6} \rfloor)$;

$\varphi(I_2)$ *в позициях* $(3(6j+1), 3(6j+1))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-1}{6} \rfloor)$;

I_2 *в позициях* $(3(6j+2), 3(6j+2))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-2}{6} \rfloor)$;

$\varphi(I_2)$ *в позициях* $(3(6j+3), 3(6j+3))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-3}{6} \rfloor)$;

I_2 *в позициях* $(3(6j+4), 3(6j+4))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-4}{6} \rfloor)$;

I_1 *в позициях* $(3(6j+5), 3(6j+5))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-5}{6} \rfloor)$,

где $I_1 = \mathrm{diag}(e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_3 \otimes e_3)$, $I_2 = \mathrm{diag}(e_2 \otimes e_1, e_3 \otimes e_2, e_1 \otimes e_3)$. *Если* i *нечётно, то матрица* i*-й трансляции имеет:*

$\varphi(I_2)$ *в позициях* $(3 \cdot 6j, 3 \cdot 6j)$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i}{6} \rfloor)$;

I_2 *в позициях* $(3(6j+1), 3(6j+1))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-1}{6} \rfloor)$;

I_1 *в позициях* $(3(6j+2), 3(6j+2))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-2}{6} \rfloor)$;

I_1 *в позициях* $(3(6j+3), 3(6j+3))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-3}{6} \rfloor)$;

$\varphi(I_2)$ *в позициях* $(3(6j+4), 3(6j+4))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{i-4}{6} \rfloor)$;

I_2 *в позициях* $(3(6j+5), 3(6j+5))$ $(0 \leqslant j \leqslant \lfloor\frac{i-5}{6}\rfloor)$.

Лемма 13. (a) *Для образующей* h_1 *матрицы* i*-х трансляций* $(i \leqslant 6)$ *описываются следующим образом. Если* i *чётно, то матрица* i*-й трансляции имеет:*

I_1 *в позиции* $(15, 0)$;
J_1 *в позиции* $(12, 6)$, *если* $i > 0$;
$-\varphi(I_2)$ *в позиции* $(21, 3)$, *если* $i > 0$;
J_2 *в позиции* $(3, 9)$, *если* $i > 2$;
$-I_2$ *в позиции* $(30, 12)$, *если* $i > 2$;
$-I_1$ *в позиции* $(33, 15)$, *если* $i > 4$;
I_1 *в позиции* $(0, 18)$, *если* $N = 3$ *и* $i > 4$,
где I_1 *и* I_2 *определены в предыдущей лемме,*

$$J_1 = \operatorname{diag}(\alpha_2^{n_1-1} \otimes \beta_1^{n_2-1}, \alpha_3^{n_2-1} \otimes \beta_2^{n_3-1}, \alpha_1^{n_3-1} \otimes \beta_3^{n_1-1}),$$

$J_2 = \operatorname{diag}(j_{2,1}, j_{2,2}, j_{2,3})$,

$$j_{2,1} = \begin{cases} \alpha_1^{n_3-1} \otimes \beta_2^{n_3-1}, & \text{если } n_1 = 1 \text{ и } n_2 = 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$j_{2,2} = \begin{cases} \alpha_2^{n_1-1} \otimes \beta_3^{n_1-1}, & \text{если } n_2 = 1 \text{ и } n_3 = 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$j_{2,3} = \begin{cases} \alpha_3^{n_2-1} \otimes \beta_1^{n_2-1}, & \text{если } n_1 = 1 \text{ и } n_3 = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если i *нечётно, то матрица* i*-й трансляции имеет:*

$-J_3$ *в позиции* $(12, 0)$;
$-J_4$ *в позиции* $(12, 3)$;
$-I_2$ *в позиции* $(21, 3)$;
J_5 *в позиции* $(6, 9)$, *если* $i > 1$;
$-I_1$ *в позиции* $(24, 6)$, *если* $i > 1$;
$-\varphi(I_2)$ *в позиции* $(30, 12)$, *если* $i > 3$;
I_2 *в позиции* $(3, 15)$, *если* $i > 3$ *и* $N = 3$,
где

$$J_3 = \operatorname{diag}\left(\sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \otimes \beta_2^{n_3-i-1}, \sum_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \otimes \beta_3^{n_1-i-1}, \sum_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \otimes \beta_1^{n_2-i-1}\right),$$

$$J_4 = \mathrm{diag}\Bigg(\sum_{i=0}^{n_3-2}\alpha_1^i a_{12}\otimes\alpha_1^{n_3-i-2}a_{12},\ \sum_{i=0}^{n_1-2}\alpha_2^i a_{23}\otimes\alpha_2^{n_1-i-2}a_{23},$$
$$\sum_{i=0}^{n_2-2}\alpha_3^i a_{31}\otimes\alpha_3^{n_2-i-2}a_{31}\Bigg),$$

$$J_5 = \mathrm{diag}(j_{5,1}, j_{5,2}, j_{5,3}),$$

$$j_{5,1} = \begin{cases}\alpha_1^{n_3-1}\otimes\beta_1^{n_2-1}, & \textit{если } n_1 = 1,\\ 0, & \textit{если } n_1 > 1,\end{cases}$$

$$j_{5,2} = \begin{cases}\alpha_2^{n_1-1}\otimes\beta_2^{n_3-1}, & \textit{если } n_2 = 1,\\ 0, \&\textit{если } n_2 > 1, & \end{cases}$$

$$j_{5,3} = \begin{cases}\alpha_3^{n_2-1}\otimes\beta_3^{n_1-1}, & \textit{если } n_3 = 1,\\ 0, & \textit{если } n_3 > 1.\end{cases}$$

(б) *Для образующей* h_2 *матрицы* i*-х трансляций* ($i \leqslant 6$) *описываются следующим образом. Если* i *чётно, то матрица* i*-й трансляции имеет:*

I_1 *в позиции* $(18, 0)$;
$\varphi(J_1)$ *в позиции* $(9, 3)$, *если* $i > 0$;
I_2 *в позиции* $(24, 6)$, *если* $i > 0$;
$\varphi(J_2)$ *в позиции* $(6, 12)$, *если* $i > 2$;
$\varphi(I_2)$ *в позиции* $(27, 9)$, *если* $i > 2$;
I_1 *в позиции* $(36, 18)$, *если* $i > 4$;
I_1 *в позиции* $(0, 15)$, *если* $i > 4$ *и* $N = 3$.

Если i *нечётно, то матрица* i*-й трансляции имеет:*

$\varphi(I_2)$ *в позиции* $(18, 0)$;
$\varphi(J_4)$ *в позиции* $(15, 0)$;
$\varphi(J_3)$ *в позиции* $(15, 3)$;
$\varphi(J_5)$ *в позиции* $(9, 6)$, *если* $i > 1$;
I_1 *в позиции* $(27, 9)$, *если* $i > 1$;
I_2 *в позиции* $(33, 15)$, *если* $i > 3$;
$-\varphi(I_2)$ *в позиции* $(0, 12)$, *если* $i > 3$ *и* $N = 3$.

§5. Доказательство теоремы

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} = K\langle\mathcal{X}\rangle/I$, определённую в §2. Обозначим через $\mathcal{A}^m$ однородную компоненту степени m алгебры $\mathcal{A}$. Нужно доказать, что

$$\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Предложение 14. *Для случая* (у1) $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R)$.

Доказательство. Будем называть образ монома из $K\langle\mathcal{X}\rangle$ при каноническом отображении также мономом. Введём на $\mathcal{A}$ лексикографический порядок так, что

$$c_1 < c_2 < c_3 < z < w < d_1 < d_2 < d_3 < u_1 < u_2 < e < h_1 < h_2.$$

Произвольный моном из $\mathcal{A}$ представляется с точностью до константы из K как

$$c_1^{k_1} c_2^{k_2} c_3^{k_3} z^i w^j d_1^{g_1} d_2^{g_2} d_3^{g_3} u_1^{\ell_1} u_2^{\ell_2} e^{\varepsilon} h_1^{t_1} h_2^{t_2}.$$

Введём следующие элементарные шаги редукции:

$$wu_2 \Rightarrow zu_2,\ d_i^2 \Rightarrow c_i^2 e\ (i \in \{1,2,3\}),\ h_1 h_2 \Rightarrow e^3 \text{ (если } N = 3).$$

Тогда, применяя эти шаги редукции к моному произвольной формы, можно добиться того, что никакую редукцию применить нельзя. Также, исходя из соотношений алгебры $\mathcal{A}$, $k_1k_2 = k_2k_3 = k_1k_3 = 0$, $g_1g_2 = g_2g_3 = g_1g_3 = 0$, $\ell_1\ell_2 = 0$, $t_1t_2 = 0$. Теперь ненулевой моном из $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$c_{r_1}^k z^i w^j d_{r_2}^g u_{r_3}^\ell e^\varepsilon h_{r_4}^t\ (r_1, r_2 \in \{1,2,3\}, r_3, r_4 \in \{1,2\}),$$

где $i, j, g, \ell \in \{0,1\}$.

Рассмотрим подробнее, как выглядят ненулевые мономы. Мономы, у которых $\ell = 1$, имеют вид $z^i u_r h_r^t$ $(i \in \{0,1\})$. Мономы с $g = 1$ имеют вид $c_r^k w^j d_r e^\varepsilon$ $(j \in \{0,1\})$. Остальные мономы имеют вид $c_{r_1}^k z^i w^j e^\varepsilon h_{r_2}^t$ $(i, j \in \{0,1\})$. Таким образом, имеем следующие мономы:

(1) $z^i u_r h_r^t,\ i \in \{0,1\},\ r \in \{1,2\}$ (степени $i + 2 + 6t$);
(2) $c_r^k w^j d_r e^\varepsilon,\ j \in \{0,1\},\ r \in \{1,2,3\}$ (степени $j + 2 + 4\varepsilon$);
(3) $c_{r_1}^k z^i w^j e^\varepsilon h_{r_2}^t,\ i, j \in \{0,1\},\ r_1 \in \{1,2,3\},\ r_2 \in \{1,2\}$,
$ki = kt = 0$ (степени $i + j + 4\varepsilon + 6t$).

Для степени $m \leqslant 4$ перечислим все ненулевые мономы степени m и покажем, что их количество совпадает с размерностью $\mathrm{HH}^m(R)$.

1. Мономы степени 0:

$$1,\ c_1^{k_1}\ (k_1 = 1\dots n_3),\ c_2^{k_2}\ (k_2 = 1\dots n_1),\ c_3^{k_3}\ (k_3 = 1\dots n_2).$$

2. Мономы степени 1:

$$\begin{aligned} z,\ w,\ & c_1^{k_1}w\ (k_1 = 1\dots n_3 - 1),\\ & c_2^{k_2}w\ (k_2 = 1\dots n_1 - 1),\\ & c_3^{k_3}w\ (k_3 = 1\dots n_2 - 1).\end{aligned}$$

3. Мономы степени 2:

$$\begin{aligned} zw,\ u_1,\ u_2,\ & c_1^{k_1}d_1\ (k_1 = 0\dots n_3 - 2),\\ & c_2^{k_2}d_2\ (k_2 = 0\dots n_1 - 2),\\ & c_3^{k_3}d_3\ (k_3 = 0\dots n_2 - 2).\end{aligned}$$

4. Мономы степени 3:

$$\begin{aligned} zu_1,\ zu_2,\ & c_1^{k_1}wd_1\ (k_1 = 0\dots n_3 - 2),\\ & c_2^{k_2}wd_2\ (k_2 = 0\dots n_1 - 2),\\ & c_3^{k_3}wd_3\ (k_3 = 0\dots n_2 - 2).\end{aligned}$$

5. Мономы степени 4:

$$\begin{aligned} e,\ & c_1^{k_1}e\ (k_1 = 1\dots n_3 - 1),\\ & c_2^{k_2}e\ (k_2 = 1\dots n_1 - 1),\\ & c_3^{k_3}e\ (k_3 = 1\dots n_2 - 1).\end{aligned}$$

Из этого перечисления видно, что

$$\begin{aligned} \dim_K \mathcal{A}^0 &= N + 1 && = \dim_K \mathrm{HH}^0(R),\\ \dim_K \mathcal{A}^1 &= N - 1 && = \dim_K \mathrm{HH}^1(R),\\ \dim_K \mathcal{A}^2 &= N && = \dim_K \mathrm{HH}^2(R),\\ \dim_K \mathcal{A}^3 &= N - 1 && = \dim_K \mathrm{HH}^3(R),\\ \dim_K \mathcal{A}^4 &= N - 2 && = \dim_K \mathrm{HH}^4(R).\end{aligned}$$

Для степени $m > 4$ нужно доказать, что

$$\dim_K \mathcal{A}^m - \dim_K \mathcal{A}^{m-4} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 0, 4, 5 \pmod 6,\\ 2, & \text{если } m \equiv 1, 3 \pmod 6,\\ 4, & \text{если } m \equiv 2 \pmod 6.\end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждый вычет по модулю 6.

1. Пусть $m \equiv 0 \pmod 6$. Мономы из $\mathcal{A}^m$, в которых есть e, находятся в однозначном соответствии с мономами из $\mathcal{A}^{m-4}$, в которых отсутствуют u_r ($r \in \{1,2\}$). В $\mathcal{A}^{m-4}$ есть два монома, содержащие u_r: $u_1h_1^t$ и $u_2h_2^t$, где $t = \frac{m}{6} - 1$. Далее, в $\mathcal{A}^m$ есть два монома, в которых отсутствует e, а именно: h_1^t и h_2^t, где $t = \frac{m}{6}$. Итого, $\dim_K \mathcal{A}^m = (\dim_K \mathcal{A}^{m-4} - 2) + 2 = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$.

2. $m \equiv 1 \pmod 6$. Снова мономы из $\mathcal{A}^m$, в которых есть e, находятся в однозначном соответствии с мономами из $\mathcal{A}^{m-4}$ без u_r ($r \in \{1,2\}$). В $\mathcal{A}^{m-4}$ есть два монома, содержащие u_r: $zu_1h_1^t$ и $zu_2h_2^t$, где $t = \frac{m-1}{6} - 1$. Перечислим мономы без e из $\mathcal{A}^m$: zh_1^t, zh_2^t, wh_1^t и wh_2^t, где $t = \frac{m-1}{6}$. Итого, $\dim_K \mathcal{A}^m = (\dim_K \mathcal{A}^{m-4} - 2) + 4 = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 2$.

3. $m \equiv 2 \pmod 6$. В $\mathcal{A}^{m-4}$ нет элементов с u_r ($r \in \{1,2\}$). В $\mathcal{A}^m$ есть следующие мономы без e: $u_1h_1^t$, $u_2h_2^t$, zwh_1^t и zwh_2^t, где $t = \frac{m-2}{6}$. Имеем $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 4$.

4. $m \equiv 3 \pmod 6$. В $\mathcal{A}^{m-4}$ нет элементов с u_r ($r \in \{1,2\}$). В $\mathcal{A}^m$ есть следующие мономы без e: $zu_1h_1^t$ и $zu_2h_2^t$, где $t = \frac{m-3}{6}$. Таким образом, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 2$.

5. $m \equiv 4 \pmod 6$. В $\mathcal{A}^{m-4}$ нет элементов с u_r ($r \in \{1,2\}$), в $\mathcal{A}^m$ нет мономов без e. Значит, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$.

6. $m \equiv 5 \pmod 6$. Как и в предыдущем пункте, в $\mathcal{A}^{m-4}$ нет элементов с u_r ($r \in \{1,2\}$), а в $\mathcal{A}^m$ нет мономов без e. Итого, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$. $\square$

Предложение 15. *Для случаев* (у2), (у3) *и* (у4)
$$\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Введём на $\mathcal{A}$ лексикографический порядок так, что
$$c_1 < c_2 < c_3 < z < w_1 < w_2 < w_3 < x_1 < x_3 < d_1 < d_2 < d_3 < \\ < u_1 < u_2 < q < s_1 < s_2 < s_3 < y_1 < y_3 < e < h_1 < h_2 < v_1 < v_2.$$
Произвольный моном из $\mathcal{A}$ представляется с точностью до константы из K как
$$c_r^k z^i w_1^{j_1} w_2^{j_2} w_3^{j_3} x_1^{a_1} x_3^{a_3} d_1^{g_1} d_2^{g_2} d_3^{g_3} u_1^{\ell_1} u_2^{\ell_2} q^{\alpha} s_1^{p_1} s_2^{p_2} s_3^{p_3} y_1^{b_1} y_3^{b_3} e^{\varepsilon} h_1^{t_1} h_2^{t_2} v_1^{f_1} v_2^{f_2}.$$
Введём следующие элементарные шаги редукции:
$$w_iu_2 \Rightarrow zu_2,\ w_id_i \Rightarrow c_is_i\ (i \in I_w);\ x_id_i \Rightarrow c_iy_i\ (i \in I_x);$$
$$d_i^2 \Rightarrow c_i^2e\ (i \in \{1,2,3\});\ d_is_i \Rightarrow c_iw_ie\ (i \in I_w);\ d_iy_i \Rightarrow c_ix_ie\ (i \in I_x);$$
$$w_ih_2 \Rightarrow zh_2,\ w_iv_2 \Rightarrow zv_2\ (i \in I_w);\ h_1q \Rightarrow zv_1,\ h_2q \Rightarrow zv_2.$$

Применим эти шаги редукции к моному произвольной формы, а также воспользуемся следующими соотношениями в алгебре $\mathcal{A}$: $w_iw_j = s_is_j = 0$ $(i,j \in I_w)$, $x_ix_j = y_iy_j = 0$ $(i,j \in I_x)$, $d_id_j = 0$ $(i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j)$, $u_iu_j = h_ih_j = v_iv_j = 0$ $(i,j \in \{1,2\}, i \neq j)$, и получим, что любой моном из $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$c_{r_1}^k z^i w_{r_2}^j x_{r_3}^a d_{r_4}^g u_{r_5}^\ell q^\alpha s_{r_6}^p y_{r_7}^b e^\varepsilon h_{r_8}^t v_{r_9}^f,$$

где $r_1, r_4 \in \{1,2,3\}$, $r_2, r_6 \in I_w$, $r_3, r_7 \in I_x$, $r_5, r_8, r_9 \in \{1,2\}$, а также $i, j, a, g, \ell, \alpha, p, b, f \in \{0,1\}$. Мономы, у которых $\ell = 1$, имеют вид $z^iu_rh_r^t$ $(i \in \{0,1\})$. Если $j = 1$, то мономы имеют вид $c_r^kw_re^\varepsilon$. Для случая $a = 1$ имеем мономы $c_r^kx_re^\varepsilon$. Если $g = 1$, то мономы имеют вид $c_r^kd_re^\varepsilon$. Для $\alpha = 1$ имеем qe^ε. Если $p = 1$, то мономы имеют вид $c_r^ks_re^\varepsilon$. Если $b = 1$, то $c_r^ky_re^\varepsilon$. Остальные мономы имеют вид $c_{r_1}^kz^ie^\varepsilon h_{r_2}^tv_{r_3}^f$ $(i,f \in \{0,1\})$. Таким образом, имеем следующие мономы:

(1) $z^iu_rh_r^t,\ i \in \{0,1\},\ r \in \{1,2\}$ (степени $i + 2 + 6t$);
(2) $c_r^kw_re^\varepsilon,\ r \in I_w$ (степени $1 + 4\varepsilon$);
(3) $c_r^kx_re^\varepsilon,\ r \in I_x$ (степени $1 + 4\varepsilon$);
(4) $c_r^kd_re^\varepsilon,\ r \in \{1,2,3\}$ (степени $2 + 4\varepsilon$);
(5) qe^ε (степени $2 + 4\varepsilon$);
(6) $c_r^ks_re^\varepsilon,\ r \in I_w$ (степени $3 + 4\varepsilon$);
(7) $c_r^ky_re^\varepsilon,\ r \in I_x$ (степени $3 + 4\varepsilon$);
(8) $c_{r_1}^kz^ie^\varepsilon h_{r_2}^tv_{r_3}^f,\ i,f \in \{0,1\},\ r_1 \in \{1,2,3\},\ r_2, r_3 \in \{1,2\}$, $ki = kt = kf = 0$ (степени $i + 4\varepsilon + 6t + 7f$).

Для степени $m \leqslant 4$ перечислим все ненулевые мономы степени m и покажем, что их количество совпадает с размерностью $\mathrm{HH}^m(R)$.

1. Мономы степени 0:

$$1,\ c_1^{k_1}\ (k_1 = 1 \ldots n_3),\ c_2^{k_2}\ (k_2 = 1 \ldots n_1),\ c_3^{k_3}\ (k_3 = 1 \ldots n_2).$$

2. Мономы степени 1 для случая (у2):

$$\begin{aligned} z,\ &c_2^{k_2}w_2\ (k_2 = 0 \ldots n_1 - 1),\\ &c_1^{k_1}x_1\ (k_1 = 0 \ldots n_3 - 2),\\ &c_3^{k_3}x_3\ (k_3 = 0 \ldots n_2 - 2).\end{aligned}$$

3. Мономы степени 1 для случая (у3):

$$\begin{aligned} z,\ &c_2^{k_2}w_2\ (k_2 = 0 \ldots n_1 - 1),\\ &c_3^{k_3}w_3\ (k_3 = 0 \ldots n_2 - 1),\\ &c_1^{k_1}x_1\ (k_1 = 0 \ldots n_3 - 2).\end{aligned}$$

4. Мономы степени 1 для случая (у4):

$$\begin{aligned} z,\ c_1^{k_1}w_1\ (k_1 = 0\dots n_3-1),\\ c_2^{k_2}w_2\ (k_2 = 0\dots n_1-1),\\ c_3^{k_3}w_3\ (k_3 = 0\dots n_2-1).\end{aligned}$$

5. Мономы степени 2 для случая (у2):

$$\begin{aligned} u_1,\ u_2,\ q,\ c_1^{k_1}d_1\ (k_1 = 0\dots n_3-2),\\ c_2^{k_2}d_2\ (k_2 = 0\dots n_1-2),\\ c_3^{k_3}d_3\ (k_3 = 0\dots n_2-2).\end{aligned}$$

6. Мономы степени 2 для случая (у3):

$$\begin{aligned} u_1,\ u_2,\ q,\ c_1^{k_1}d_1\ (k_1 = 0\dots n_3-2),\\ c_2^{k_2}d_2\ (k_2 = 0\dots n_1-1),\\ c_3^{k_3}d_3\ (k_3 = 0\dots n_2-2).\end{aligned}$$

7. Мономы степени 2 для случая (у4):

$$\begin{aligned} u_1,\ u_2,\ q,\ c_1^{k_1}d_1\ (k_1 = 0\dots n_3-1),\\ c_2^{k_2}d_2\ (k_2 = 0\dots n_1-1),\\ c_3^{k_3}d_3\ (k_3 = 0\dots n_2-2).\end{aligned}$$

8. Мономы степени 3 для случая (у2):

$$\begin{aligned} zu_1,\ zu_2,\ c_2^{k_2}s_2\ (k_2 = 0\dots n_1-1),\\ c_1^{k_1}y_1\ (k_1 = 0\dots n_3-2),\\ c_3^{k_3}y_3\ (k_3 = 0\dots n_2-2).\end{aligned}$$

9. Мономы степени 3 для случая (у3):

$$\begin{aligned} zu_1,\ zu_2,\ c_2^{k_2}s_2\ (k_2 = 0\dots n_1-1),\\ c_3^{k_3}s_3\ (k_3 = 0\dots n_2-1),\\ c_1^{k_1}y_1\ (k_1 = 0\dots n_3-2).\end{aligned}$$

10. Мономы степени 3 для случая (у4):

$$\begin{aligned} zu_1,\ zu_2,\ c_1^{k_1}s_1\ (k_1 = 0\dots n_3-1),\\ c_2^{k_2}s_2\ (k_2 = 0\dots n_1-1),\\ c_3^{k_3}s_3\ (k_3 = 0\dots n_2-1).\end{aligned}$$

11. Мономы степени 4 для случая (у2):

$$e,\ c_1^{k_1}e\ (k_1 = 1\dots n_3-1),\ c_2^{k_2}e\ (k_2 = 1\dots n_1),\ c_3^{k_3}e\ (k_3 = 1\dots n_2-1).$$

12. Мономы степени 4 для случая (у3):

$$e,\ c_1^{k_1}e\ (k_1 = 1\dots n_3 - 1),\ c_2^{k_2}e\ (k_2 = 1\dots n_1),\ c_3^{k_3}e\ (k_3 = 1\dots n_2).$$

13. Мономы степени 4 для случая (у4):

$$e,\ c_1^{k_1}e\ (k_1 = 1\dots n_3),\ c_2^{k_2}e\ (k_2 = 1\dots n_1),\ c_3^{k_3}e\ (k_3 = 1\dots n_2).$$

Из этого перечисления видно, что $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R)$, если $m \leqslant 4$. Для степени $m > 4$ нужно доказать, что

$$\dim_K \mathcal{A}^m - \dim_K \mathcal{A}^{m-4} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 0, 4, 5 \pmod 6, \\ 2, & \text{если } m \equiv 1, 3 \pmod 6, \\ 4, & \text{если } m \equiv 2 \pmod 6. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждый вычет по модулю 6.

1. Пусть $m \equiv 0 \pmod 6$. Аналогично п. 1 из доказательства предыдущего предложения, в $\mathcal{A}^{m-4}$ есть два монома, содержащие u_r: $u_1h_1^t$ и $u_2h_2^t$, где $t = \frac{m}{6} - 1$. В $\mathcal{A}^m$ есть два монома, в которых отсутствует e, а именно: h_1^t и h_2^t, где $t = \frac{m}{6}$. Итого, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$.

2. $m \equiv 1 \pmod 6$. В $\mathcal{A}^{m-4}$ есть два монома, содержащие u_r: $zu_1h_1^t$ и $zu_2h_2^t$, где $t = \frac{m-1}{6} - 1$. Перечислим мономы без e из $\mathcal{A}^m$: $zh_1^{t_1}$, $zh_2^{t_1}$, $h_1^{t_2}v_1$ и $h_2^{t_2}v_2$, где $t_1 = \frac{m-1}{6}$, $t_2 = \frac{m-1}{6} - 1$. Итого, $\dim_K \mathcal{A}^m = (\dim_K \mathcal{A}^{m-4} - 2) + 4 = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 2$.

3. $m \equiv 2 \pmod 6$. В $\mathcal{A}^{m-4}$ нет элементов с u_r ($r \in \{1, 2\}$). В $\mathcal{A}^m$ есть следующие мономы без e: $u_1h_1^{t_1}$, $u_2h_2^{t_1}$, $zh_1^{t_2}v_1$ и $zh_2^{t_2}v_2$, где $t_1 = \frac{m-2}{6}$, $t_2 = \frac{m-2}{6} - 1$. Имеем $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 4$.

4. $m \equiv 3 \pmod 6$. В $\mathcal{A}^{m-4}$ нет элементов с u_r ($r \in \{1, 2\}$). В $\mathcal{A}^m$ есть следующие мономы без e: $zu_1h_1^t$ и $zu_2h_2^t$, где $t = \frac{m-3}{6}$. Таким образом, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4} + 2$.

5. $m \equiv 4 \pmod 6$. В $\mathcal{A}^{m-4}$ нет элементов с u_r ($r \in \{1, 2\}$), в $\mathcal{A}^m$ нет мономов без e. Значит, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$.

6. $m \equiv 5 \pmod 6$. Как и в предыдущем пункте, в $\mathcal{A}^{m-4}$ нет элементов с u_r ($r \in \{1, 2\}$), а в $\mathcal{A}^m$ нет мономов без e. Итого, $\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathcal{A}^{m-4}$. □

Список литературы

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16**, No. 6 (2004), 53–122.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.

3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.
4. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 67–104.
5. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* V. *Серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 74–102.
6. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VI. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,1)$. — Алгебра и анализ **27**, No. 6 (2015), 89–116.
7. А. И. Генералов, М. А. Филиппов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VII. *Серия* $D(3\mathcal{R})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 53–81.
8. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VIII. *Алгебра когомологий для серии* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **470** (2018), 50–87.

Generalov A. I., Kachalova M. A., Mostovskij P. A. Hochschild cohomology of algebras of dihedral type. IX. The Hochschild cohomology algebra for the family $D(3\mathcal{K})$ in characteristic different from 2.

The Hochschild cohomology ring for algebras of dihedral type which form the family $D(3\mathcal{K})$ (from the famous K. Erdmann's classification) over an algebraically closed field with characteristic different from 2 is described in terms of generators and relations.

Поступило 10 апреля 2022 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Университетская наб., д. 7/9
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `ageneralov@gmail.com`

ООО Яндекс.Технологии,
ул. Льва Толстого, 16
119021 Москва, Россия
E-mail: `mashakachalova@mail.ru`

Санкт-Петербургский
государственный университет
14-я линия В.О., 29
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `pmostowsky@gmail.com`