Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 513, 2022 г.

А. И. Генералов, Н. С. Жамков

ОБ ИНЪЕКТИВНОЙ СТРУКТУРЕ В ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

§1. Введение

В работе [1] был рассмотрен вариант гомотопической категории $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, которая оказывается абелевой категорией. В случае, когда исходная абелева категория $\mathcal{C}$ богата инъективными объектами, категория $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ также богата инъективными объектами, и в работе [1] были описаны её инъективные объекты. В работе [2] были ослаблены условия, при которых $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ является абелевой, в частности, это так для предабелевой категории $\mathcal{C}$. В настоящей работе мы переносим указанные результаты из [1] на случай, когда исходная категория $\mathcal{C}$ предабелева. При этом оказалось удобным использовать язык относительной гомологической алгебры, некоторые фрагменты которой были развиты в [3]. Основной результат работы формулируется с использованием понятия инъективной структуры, введённого Марандой [4].

§2. Предварительные результаты

Пусть $\mathcal{C}$ – предабелева категория, т.е. аддитивная категория с ядрами и коядрами. Последовательность в $\mathcal{C}$

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0 \tag{1}$$

называется короткой точной последовательностью, если $f = \ker g, g = \operatorname{coker} f$. Квадрат

$$\mathcal{S} \quad : \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau'} \\ A' & \xrightarrow{\sigma'} & B' \end{array} \tag{2}$$

называется коуниверсальным, если для последовательности

$$A \overset{(\sigma,-\tau)^{\mathrm{T}}}{\longrightarrow} B \oplus A' \overset{(\tau',\sigma')}{\longrightarrow} B'$$

Ключевые слова: предабелева категория, собственный класс ядер, гомотопическая категория, инъективная структура.

Первый из авторов благодарит грант РНФ No. 22-11-00081 за поддержку.

имеем $(\tau', \sigma') = \operatorname{coker}(\sigma, -\tau)^{\mathrm{T}}$. Дуально определяется понятие универсального квадрата. Если квадрат (2) одновременно универсален и коуниверсален, мы называем его биуниверсальным. Таким образом, квадрат $\mathcal{S}$ из (2) биуниверсален, если и только если имеет место короткая точная последовательность

$$E(\mathcal{S}) \ : \ 0 \to A \overset{(\sigma,-\tau)^{\mathrm{T}}}{\longrightarrow} B \oplus A' \overset{(\tau',\sigma')}{\longrightarrow} B' \to 0. \tag{3}$$

В работе [3] было введено понятие собственного класса коядер, которое обобщает классическое понятие собственного класса коротких точных последовательностей в абелевых категориях (см., например, [5]) (или равносильное ему понятие точной категории в смысле Квиллена [6]). Мы будем использовать двойственное понятие собственного класса ядер.

Класс ω ядер (т.е. ядер некоторых морфизмов в $\mathcal{C}$) называется собственным, если ω удовлетворяет следующим условиям.

P0. Расщепляемые мономорфизмы лежат в ω.

P1. Композиция ядер из ω, если она определена, также лежит в ω.

P2. Для коуниверсального квадрата вида (2), в котором $\sigma \in \omega$, также имеем $\sigma' \in \omega$.

P3. Если $\tau\sigma \in \omega$, где τ – ядро, то $\sigma \in \omega$.

Любое ядро из собственного класса ω называется ω-собственным.

Отметим, что из аксиом P0–P3 вытекает более сильная форма условия P3 (см. [3, лемма 1.1]), а именно, для собственного класса ядер ω выполняется условие

P3*. Если $\tau\sigma \in \omega$ (а τ произволен), то $\sigma \in \omega$.

Легко проверяется, что класс ω_0, состоящий из всех расщепляющихся мономорфизмов, является собственным. Ясно также, что любой расщепляющийся мономорфизм $\sigma\colon X \to Y$ вкладывается в диаграмму прямой суммы, т. е. существуют морфизмы $\tau\colon Y \to Z$ и π, ρ такие, что $\pi\sigma = \mathrm{id}_X, \tau\rho = \mathrm{id}_Z, \sigma\pi + \rho\tau = \mathrm{id}_Y$.

Обозначим через $\mathfrak{J}_\omega(\mathcal{C})$ класс ω-инъективных объектов в $\mathcal{C}$. Говорят, что категория $\mathcal{C}$ богата ω-инъективными объектами, если для любого объекта X категории $\mathcal{C}$ существует ω-собственное ядро $i\colon X \to Q$, для которого $Q \in \mathfrak{J}_\omega(\mathcal{C})$.

Короткая точная последовательность (1) называется ω-собственной, если в ней $f \in \omega$. Биуниверсальный квадрат $\mathcal{S}$ из (2) называется ω-собственным, если ω-собственной является соответствующая ему короткая точная последовательность $E(\mathcal{S})$ из (3).

Предложение 1. *Предположим, что левый и правый квадраты следующей диаграммы ω-собственные:*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ A' & \xrightarrow[\alpha']{} & B' & \xrightarrow[\beta']{} & C'\,. \end{array} \tag{4}$$

Тогда объемлющий квадрат этой диаграммы также ω-собственный.

Доказательство. Ясно, что объемлющий квадрат диаграммы (4) биуниверсален. Далее, по предположению

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -f \end{pmatrix} \in \omega, \quad \begin{pmatrix} \beta \\ -g \end{pmatrix} \in \omega;$$

кроме того, ввиду [3, лемма 1.1] имеем $(\beta, -g)^{\mathrm{T}} \oplus \mathrm{id}\,_{A'} \in \omega$. Поскольку

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\alpha \\ -f \end{pmatrix},$$

то $(\beta\alpha, -f)^{\mathrm{T}} \in \omega$. □

Пусть $\mathcal{E}$ – произвольная категория. Для класса морфизмов $\mathfrak{M}$ категории $\mathcal{E}$ через $\Phi(\mathfrak{M})$ обозначим класс объектов из $\mathcal{E}$, которые инъективны относительно всех морфизмов из $\mathfrak{M}$. Для класса объектов $\mathfrak{Q}$ в $\mathcal{E}$ через $\Psi(\mathfrak{Q})$ обозначим класс морфизмов в $\mathcal{E}$, относительно которых инъективны все объекты из $\mathfrak{Q}$. Пара $(\mathfrak{M}, \mathfrak{Q})$, где $\mathfrak{M}$ – класс морфизмов, а $\mathfrak{Q}$ – класс объектов в $\mathcal{E}$, называется инъективной структурой [4], если выполняются условия:
(IS1) $\mathfrak{M} = \Psi\Phi(\mathfrak{M})$;
(IS2) $\mathfrak{Q} = \Phi\Psi(\mathfrak{Q})$;
(IS3) для любого объекта X категории $\mathcal{E}$ существует морфизм $i\colon X \to Q$, принадлежащий $\mathfrak{M}$, и такой, что $Q \in \mathfrak{Q}$.

Класс $\overline{\mathfrak{M}} := \Psi\Phi(\mathfrak{M})$ назовём замыканием класса морфизмов $\mathfrak{M}$. Легко видеть, что если для пары $(\mathfrak{M}, \mathfrak{Q} := \Phi(\mathfrak{M}))$ выполняется условие (IS3), то замыкание $\overline{\mathfrak{M}}$ состоит из морфизмов i, для которых найдётся морфизм j такой, что $ji \in \mathfrak{M}$.

В категории $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ морфизмов предабелевой категории $\mathcal{C}$ рассмотрим идеал I, состоящий из морфизмов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_0)\colon b \to c$, описываемых коммутативными квадратами вида

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{b} & B_0 \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_0} \\ C_1 & \xrightarrow{c} & C_0, \end{array} \tag{5}$$

для которых выполняется следующее условие:

существует морфизм $h\colon B_0 \to C_1$ такой, что $\alpha_0 = ch$.

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ фактор-категорию категории $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ по идеалу I. Композиция морфизмов в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ обозначается: $\alpha * \beta$. Кроме того, класс морфизма $\alpha\colon b \to c$ мы будем обозначать также через α. Категорию $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ можно интерпретировать как некоторый вариант гомотопической категории (см. [1, 2]). Ввиду [2, теорема 3] $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ – абелева категория.

Предложение 2. *Морфизм $\alpha\colon b \to c$ в категории $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде $\alpha = \widetilde{\alpha} * \lambda$, где λ – изоморфизм, а морфизм $\widetilde{\alpha}$ представляется универсальным квадратом.*

Доказательство. Напомним (см. [2, теорема 3]), что ядро $\ker \alpha$ морфизма α (в категории $\mathcal{A}(\mathcal{C})$) можно описать следующим образом. Построим универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B} & \xrightarrow{\widetilde{b}} & B_0 \\ {\scriptstyle\widetilde{\alpha}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_0} \\ C_1 & \xrightarrow[c]{} & C_0, \end{array}$$

а также морфизмы (в $\mathcal{C}$) $i\colon K \to C_1$, $\widetilde{i}\colon K \to \widetilde{B}$, $\ell\colon B_1 \to \widetilde{B}$ так, что

$$i = \ker c,\ \widetilde{i} = \ker \widetilde{b},\ \widetilde{\alpha}_1\, \widetilde{i} = i,\ \widetilde{b}\,\ell = b, \widetilde{\alpha}_1\, \ell = \alpha_1.$$

Тогда $\ker\alpha$ представляется квадратом

$$\begin{array}{ccc} B_1 \oplus K & \xrightarrow{(\ell,\widetilde{i})} & \widetilde{B} \\ {\scriptstyle (1,0)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{b}} \\ B_1 & \xrightarrow[b]{} & B_0. \end{array} \tag{6}$$

Если $\ker\alpha = 0$, то найдётся морфизм h такой, что $bh = \widetilde{b}$. Тогда непосредственно проверяется, что

$$\lambda = (\ell, \mathrm{id}_{B_0})\colon b \to \widetilde{b},\ \eta = (h, \mathrm{id}_{B_0})\colon \widetilde{b} \to b$$

– взаимно обратные морфизмы; при этом $\alpha = \widetilde{\alpha} * \lambda$, где $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha}_1, \alpha_0)$.

Обратно, достаточно проверить, что если квадрат (5) универсален, то α – мономорфизм. Но в этом случае квадрат (6) принимает вид

$$\begin{array}{ccc} B_1 \oplus K & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{B_1},\widetilde{i})} & B_1 \\ {\scriptstyle (1,0)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle b} \\ B_1 & \xrightarrow[b]{} & B_0. \end{array}$$

Поскольку $b = b \cdot \mathrm{id}_{B_1}$, то $\ker\alpha = 0$. □

3. Основные результаты.

Пусть ω – собственный класс ядер в предабелевой категории $\mathcal{C}$. Морфизм f в категории $\mathcal{C}$ назовём ω-регулярным, если f представляется в виде $f = \mu\nu$, где ν – коядро, μ – ядро, и при этом $\mu, \ker\nu \in \omega$. Ясно, что в этом случае $\mu = \mathrm{im}\, f$, $\nu = \mathrm{coim}\, f$. Объект категории $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ называется ω-регулярным, если он изоморфен объекту вида $b\colon B_1 \to B_0$, где b – ω-регулярный морфизм. Через $\mathcal{A}_\omega$ обозначим полную подкатегорию, состоящую из ω-регулярных объектов.

Последовательность в $\mathcal{C}$

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

называется ω-сбалансированной, если g – ω-регулярный морфизм и $f = \ker g$. Универсальный квадрат вида (2) называется ω-сбалансированным, если ω-сбалансирована соответствующая ему последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{(\sigma,-\tau)^{\mathrm{T}}} B \oplus A' \xrightarrow{(\tau',\,\sigma')} B'.$$

Мономорфизм α в категории $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ называется ω-сбалансированным, если он может быть представлен ω-сбалансированным универсальным квадратом. Через $\mathfrak{N}_\omega$ обозначим класс мономорфизмов в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, представляющихся в виде $\alpha = \widetilde{\alpha} * \lambda$, где λ – изоморфизм, а $\widetilde{\alpha}$ – ω-сбалансированный мономорфизм.

Через $\mathcal{R}_\omega$ обозначим класс объектов в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, изоморфных объектам вида $I_1 \xrightarrow{i} I_0$, где $I_1, I_0 \in \mathfrak{J}_\omega(\mathcal{C})$.

Предложение 3. *Любой объект $\mathbb{I} \in \mathcal{R}_\omega$ инъективен относительно любого морфизма из $\mathfrak{N}_\omega$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть $\mathbb{I} = \big(I_1 \xrightarrow{i} I_0\big)$, где $I_1, I_0 \in \mathfrak{J}_\omega(\mathcal{C})$. Пусть $\alpha\colon b \to c$ – мономорфизм из $\mathfrak{N}_\omega$; можно считать, что α представляется ω-сбалансированным универсальным квадратом (5), и таким образом, в $\mathcal{C}$ имеется ω-сбалансированная последовательность

$$0 \to B_1 \xrightarrow{(b,-\alpha_1)^{\mathrm{T}}} B_0 \oplus C_1 \xrightarrow{(\alpha_0,c)} C_0,$$

в частности, $(\alpha_0, c) = \mu\nu$, где $\nu = \operatorname{coker}(b, -\alpha_1)^{\mathrm{T}}$ и $\mu \in \omega$. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_0)\colon b \to i$ – морфизм в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. Так как $(b, -\alpha_1)^{\mathrm{T}} \in \omega$, то существует морфизм $\psi = (\psi', \psi'')\colon B_0 \oplus C_1 \to I_1$ такой, что

$$\varphi_1 = \psi \cdot \begin{pmatrix} b \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} = \psi' b - \psi'' \alpha_1.$$

Тогда

$$\varphi_0 b = i\varphi_1 = i\psi' b - i\psi'' \alpha_1,$$

следовательно,

$$(\varphi_0 - i\psi')b + i\psi''\alpha_1 = 0,$$

и потому найдётся морфизм $\widetilde{\theta}$, для которого

$$\widetilde{\theta}\nu = (\varphi_0 - i\psi', -i\psi'').$$

Так как $\mu \in \omega$, а $I_0 \in \mathfrak{J}_\omega(\mathcal{C})$, то существует θ_0 такой, что $\theta_0\mu = \widetilde{\theta}$. Окончательно получаем:

$$\theta_0(\alpha_0, c) = \theta_0\mu\nu = (\varphi_0 - i\psi', -i\psi''),$$

т.е.

$$\begin{cases} \theta_0\alpha_0 = \varphi_0 - i\psi', \\ \quad \theta_0 c = -i\psi''. \end{cases}$$

Полагая $\theta_1 := -\psi''$, получаем морфизм (в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$) $\theta = (\theta_1, \theta_0)\colon c \to i$, для которого $\varphi = \theta * \alpha$. $\square$

Через $\mathfrak{M}_\omega$ обозначим подкласс в $\mathfrak{N}_\omega$, состоящий из морфизмов, действующих между объектами подкатегории $\mathcal{A}_\omega$.

Теорема 4. *Предположим, что категория $\mathcal{C}$ богата ω-инъективными объектами. Тогда для любого объекта $(B_1 \xrightarrow{b} B_0)$ из $\mathcal{A}_\omega$ существует морфизм $\alpha\colon b \to i$ из $\mathfrak{M}_\omega$, для которого $i\colon I_1 \to I_0$ – такой (ω-регулярный) морфизм, что $I_1, I_0 \in \mathfrak{J}_\omega(\mathcal{C})$.*

Доказательство. Можно считать, что b – ω-регулярный морфизм. Мы докажем, что в этом случае в качестве $\alpha\colon b \to i$ можно взять ω-сбалансированный мономорфизм.

Пусть $\zeta := \ker b\colon K \to B_1$. Рассмотрим ω-собственное ядро $\zeta'\colon K \to I_1$, где $I_1 \in \mathfrak{J}_\omega(\mathcal{C})$. Так как $\zeta \in \omega$, то существует морфизм φ_1 такой, что $\varphi_1\zeta = \zeta'$. Построим коуниверсальный квадрат $\mathcal{S}_1$ на морфизмах φ_1 и $\nu := \operatorname{coim} b$:

$$\mathcal{S}_1 \quad : \quad \begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\nu} & V \\ {\scriptstyle\varphi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\widetilde{\varphi}} \\ I_1 & \xrightarrow[\nu']{} & V'. \end{array}$$

Ясно, что $\nu' = \operatorname{coker}\zeta'$. Докажем, что $\mathcal{S}_1$ – ω-собственный биуниверсальный квадрат. Для этого построим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\zeta'} & I_1 & \xrightarrow{\nu'} & V' \\ {\scriptstyle -\zeta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (0,1)^{\mathrm{T}}} & & \| \\ B_1 & \xrightarrow[(\nu,-\varphi_1)^{\mathrm{T}}]{} & V \oplus I_1 & \xrightarrow[(\widetilde{\varphi},\nu')]{} & V'; \end{array} \tag{7}$$

здесь $(\widetilde{\varphi}, \nu') = \operatorname{coker}(\nu, -\varphi_1)^{\mathrm{T}}$. Легко проверяется, что левый квадрат этой диаграммы коуниверсален. Так как $\zeta' \in \omega$, то по аксиоме P2 собственного класса получаем, что $(\nu, -\varphi_1)^{\mathrm{T}} \in \omega$, и тогда $(\nu, -\varphi_1)^{\mathrm{T}} = \ker(\widetilde{\varphi}, \nu')$. Таким образом, нижняя строка в диаграмме (7) оказывается ω-собственной короткой точной последовательностью, что означает, что квадрат $\mathcal{S}_1$ и биуниверсальный и ω-собственный.

Теперь построим коуниверсальный квадрат $\mathcal{S}_2$ на морфизмах $\widetilde{\varphi}$ и $\mu := \operatorname{im} b$:

$$\mathcal{S}_2 \quad : \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu} & B_0 \\ {\scriptstyle\widetilde{\varphi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ V' & \xrightarrow[\lambda]{} & W; \end{array}$$

поскольку $\mu \in \omega$, то $\lambda \in \omega$. Кроме того,

$$(1,0)\begin{pmatrix} \mu \\ -\widetilde{\varphi} \end{pmatrix} = \mu \in \omega,$$

и по свойству P3* получаем, что $\begin{pmatrix} \mu \\ -\widetilde{\varphi} \end{pmatrix} \in \omega$, т.е.

$$0 \to V \overset{(\mu,-\widetilde{\varphi})^{\mathrm{T}}}{\longrightarrow} B_0 \oplus V' \overset{(\psi,\lambda)}{\longrightarrow} W \to 0$$

ω-собственная короткая точная последовательность, а квадрат $\mathcal{S}_2$ – биуниверсальный ω-собственный. Пользуясь предложением 1, получаем следующий ω-собственный биуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{b} & B_0 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ I_1 & \xrightarrow[\lambda\nu']{} & W. \end{array}$$

Наконец, рассмотрим ω-собственное ядро $\lambda' \colon W \to I_0$, где $I_0 \in \mathfrak{J}_\omega(\mathcal{C})$. Полагая

$$\varphi_0 := \lambda'\psi, \quad \mu' := \lambda'\lambda, \quad i := \mu'\nu',$$

получаем ω-сбалансированный универсальный квадрат, который определяет ω-сбалансированный мономорфизм $\varphi = (\varphi_1, \varphi_0) \colon b \to i$; при этом i ω-регулярен, поскольку $\mu' \in \omega$. $\square$

Через $\mathfrak{Q}_\omega$ обозначим подкласс объектов из $\mathcal{R}_\omega$, лежащих в подкатегории $\mathcal{A}_\omega$.

Следствие 5. *Пусть категория $\mathcal{C}$ богата ω-инъективными объектами. Если объект $\mathbb{X} \in \mathcal{A}_\omega$ инъективен относительно всех морфизмов из $\mathfrak{M}_\omega$, то $\mathbb{X}$ изоморфен прямому слагаемому некоторого объекта из $\mathfrak{Q}_\omega$.*

Доказательство. По теореме 4 существует морфизм $\alpha\colon \mathbb{X} \to \mathbb{I}$ из $\mathfrak{M}_\omega$, где $\mathbb{I} \in \mathfrak{Q}_\omega$. Так как $\mathbb{X}$ инъективен относительно α, то α – расщепляющийся мономорфизм. $\square$

Дополнительную информацию об объектах из класса $\mathfrak{Q}_\omega$ дает следующее утверждение.

Предложение 6. *Пусть категория $\mathcal{C}$ богата ω-инъективными объектами. Любой объект $\mathbb{X} \in \mathcal{A}_\omega$, инъективный относительно всех морфизмов из $\mathfrak{M}_\omega$, изоморфен (в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$) некоторому объекту из $\mathcal{R}_\omega$.*

Доказательство. Ввиду следствия 5 имеет место диаграмма прямой суммы

$$\mathbb{X} \underset{\pi}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathbb{I} \underset{\beta}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \mathbb{Y},$$

где $\mathbb{I} \in \mathfrak{Q}_\omega$. Рассмотрим идемпотентный морфизм

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_0) := \beta\rho\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}.$$

С одной стороны, $\operatorname{coker} \varepsilon = \operatorname{coker} \beta = \pi\colon \mathbb{I} \to \mathbb{X}$. С другой стороны, ввиду [2, предложение 1] коядро морфизма ε может быть задано квадратом

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "(0{,}1)^{\mathrm{T}}"'] & I_0 \arrow[d, equal] \\ I_0 \oplus I_1 \arrow[r, "(\varepsilon_0{,}i)"'] & I_0. \end{tikzcd}$$

Следовательно, $\mathbb{X} \simeq (I_0 \oplus I_1 \xrightarrow{(\varepsilon_0, i)} I_0)$. $\square$

Из предыдущих результатов вытекает основной результат работы.

Теорема 7. *Предположим, что предабелева категория $\mathcal{C}$ богата ω-инъективными объектами. Тогда пара $(\overline{\mathfrak{M}_\omega}, \mathfrak{Q}_\omega)$ – инъективная структура в категории $\mathcal{A}_\omega$.*

Замечание. Напомним, что $\overline{\mathfrak{M}_\omega} = \Psi\Phi(\mathfrak{M}_\omega)$ – обозначает замыкание класса $\mathfrak{M}_\omega$.

Доказательство теоремы 7. Ясно, что $\Psi\Phi(\overline{\mathfrak{M}_\omega}) = \overline{\mathfrak{M}_\omega}$. Ввиду предложения 3 получаем, что

$$\mathfrak{Q}_\omega = \Phi(\mathfrak{M}_\omega) = \Phi(\overline{\mathfrak{M}_\omega}),$$

и тогда $\Phi\Psi(\mathfrak{Q}_\omega) = \mathfrak{Q}_\omega$. Наконец, справедливость условия (IS3) для указанной пары следует из теоремы 4. $\square$

Список литературы

1. E. Backelin, O. Jaramillo, *Auslander–Reiten sequences and t-structures on the homotopy category of an abelian category.* — J. Algebra **339**, No. 1 (2011), 80–96.
2. А. И. Генералов, *О необычной гомотопической категории.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **455** (2017), 33–41.
3. А. И. Генералов, *Относительная гомологическая алгебра в предабелевых категориях,* I. *Производные категории.* — Алгебра и анализ **4**, No. 3 (1992), 98–119.
4. J. M. Maranda, *Injective structures.* — Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964), 98–135.
5. С. Маклейн, *Гомология.* М., 1966.
6. D. Quillen, *Higher algebraic* K*-theory*, I. — Lect. Notes Math. **341** (1973), 85–147.

Generalov A. I., Zhamkov N. S. On an injective structure in a homotopy category.

Relative injective objects in some variant of a homotopy category are studied. For this, the relative homological algebra in preabelian categories is used.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ageneralov@gmail.com

E-mail: st069086@student.spbu.ru

Поступило 8 августа 2022 г.