Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

А. А. Татаркин, А. Б. Шишкин

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА q-СТОРОННЕЙ СВЕРТКИ

§1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть Ω – выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $O(\Omega)$ – пространство аналитических функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $O^*(\Omega)$ – сильное сопряженное к $O(\Omega)$, S – функционал из $O^*(\Omega)$. По свойствам аналитических функционалов для любого $f \in O(\Omega)$ имеем

$$\langle\, S, f \,\rangle = \int\limits_d f(z)\, d\mu,$$

где d – компакт в Ω, μ – комплексная мера, сосредоточенная на d [1, §4]. Подберем открытый круг $U := \{h : |h| < \varepsilon\}$ и выпуклую область Ω_0 из условий: $\Omega_0 + U \subseteq \Omega$ и $S \in O^*(\Omega_0)$. Далее выберем произвольный непрерывный эндоморфизм A пространства целых функций $O(\mathbf{C})$. Дифференциальный оператор

$$T_h \colon f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{h\lambda})^{(n)}(0)}{n!} D^n(f)$$

называется *оператором A-сдвига* (на шаг $h \in U$), если он действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ и является непрерывным. Для произвольного оператора A-сдвига T_h определен линейный оператор M_S, который любой функции $f \in O(\Omega)$ ставит в соответствие A-свертку $\langle\, S, T_h(f) \,\rangle$ функции f и функционала S. Если линейный оператор M_S действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$ и является непрерывным, то его называют *оператором A-свертки*. Экспоненциальные полиномы, являющиеся решениями однородного уравнения A-свертки

$$M_S(f) = 0, \quad f \in O(\Omega), \tag{1}$$

Ключевые слова: экспоненциальный синтез, спектральный синтез, оператор типа свертки, оператор q-сторонней свертки, оператор симметризации.

называются элементарными решениями этого уравнения. Говорят, что для однородного уравнения A-свертки справедлива *аппроксимационная теорема*, если любое решение этого уравнения можно аппроксимировать в пространстве $O(\Omega)$ его элементарными решениями.

В работе [2] сформулированы некоторые условия, выполнимость которых обеспечивает справедливость аппроксимационной теоремы для уравнения (1). Одно из этих условий предполагает, что эндоморфизм A является оператором симметризации, то есть

$$A(1) = 1, \quad A(\mathbf{C}[\lambda]) = \mathbf{C}[\pi(\lambda)], \tag{2}$$

где $\pi(\lambda)$ – какая-либо целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$, $\mathbf{C}[\lambda]$ – кольцо многочленов, $\mathbf{C}[\pi(\lambda)]$ – кольцо π-симметричных многочленов. При выполнении этого условия множество W_S решений уравнения (1) является замкнутым подпространством в $O(\Omega)$, инвариантным относительно дифференциального оператора $\pi(D)$. Это позволяет свести проблему справедливости аппроксимационной теоремы (задачу экспоненциального синтеза) к решению задачи спектрального синтеза для оператора $\pi(D)$ по отношению к подпространству $W_S \subseteq O(\Omega)$. Возникает вопрос: является ли условие (2) необходимым для справедливости аппроксимационной теоремы?

В данной статье мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос. Точнее, мы выделим некоторую совокупность однородных уравнений A-свертки и покажем, что для этих уравнений условие симметризации в форме (2) не является необходимым. Более того, мы ослабим это условие и покажем, что новое условие симметризации уже не может быть опущено, если предполагается, что аппроксимационная теорема для таких уравнений справедлива.

1.2. Однородные уравнения q-сторонней свертки. Выберем произвольное натуральное q и произвольный набор комплексных чисел $a_0, \ldots, a_{q-1}$, не все из которых равны нулю. Символом ω_q обозначим комплексное число $\exp \frac{2\pi i}{q}$. Рассмотрим линейный непрерывный эндоморфизм

$$A\colon g(\lambda) \mapsto \sum_{k=0}^{q-1} a_k g(\omega_q^k \lambda) \tag{3}$$

пространства целых функций $O(\mathbf{C})$. Оператор A порождает соответствующий оператор A-сдвига

$$T_h\colon f(z)\mapsto \sum_{k=0}^{q-1} a_k f(z+\omega_q^k h) \tag{4}$$

(предложение 1, предложение 2). Этот оператор принято называть *оператором q-стороннего сдвига* (на шаг h). Выберем произвольную функцию $f\in O(\Omega)$ и произвольный аналитический функционал $S\in O^*(\Omega)$. При достаточно малом $\varepsilon>0$ на круге U определена аналитическая функция $h\mapsto \langle\, S, T_h(f)\,\rangle$, которая называется q-сторонней сверткой функции f и функционала S. Линейный оператор $f\mapsto \langle\, S, T_h(f)\,\rangle$ называется *оператором q-сторонней свертки.* Однородное уравнение

$$\left\langle S, \sum_{k=0}^{q-1} a_k f(z+\omega_q^k h)\right\rangle = 0,\ \ f\in O(\Omega), \tag{5}$$

принято называть *однородным уравнением q-сторонней свертки.*

Известны два важных случая, в которых аппроксимационная теорема для однородного уравнения q-сторонней свертки оказывается справедливой. В первом случае предполагается, что лишь один из коэффициентов $a_0,\dots,a_{q-1}$ отличен от нуля. В этом случае однородное уравнение q-сторонней свертки равносильно однородному уравнению свертки

$$\langle S_j, f(z+h)\rangle = 0,\ \ f\in O(\Omega).$$

Справедливость аппроксимационной теоремы для однородных уравнений свертки доказана в работе [3]. Во втором случае предполагается, что $a_0=\dots=a_{q-1}$. В этом случае однородное уравнение q-сторонней свертки равносильно однородному уравнению

$$\left\langle S, \sum_{k=0}^{q-1} f(z+\omega_q^k h)\right\rangle = 0,\quad f\in O(\Omega).$$

Уравнения такого вида впервые исследованы в работе [4] и обобщены в работе И. Ф. Красичкова-Терновского [5]. Справедливость аппроксимационной теоремы для таких уравнений следует из более раннего результата С. Г. Мерзлякова [6]. Результаты статей [4–6] не распространяются на однородные уравнения q-сторонней свертки (5), так как уже при $q = 3$ существует уравнение вида (5), для которого аппроксимационная теорема не выполняется [7]. Остается открытой следующая задача: найти точные условия на коэффициенты однородного уравнения (5), при выполнении которых аппроксимационная теорема выполняется.

1.3. Основной результат. Пусть $\pi(\lambda)$ – целая функция минимального типа при порядке 1. Линейный непрерывный оператор $A\colon O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ называется оператором π-*симметризации* (в обобщенном смысле), если существует такая целая функция $\pi_0(\lambda) \not\equiv 0$, что

$$A(\pi_0(\lambda)) = \pi_0(\lambda),\ A(\mathbf{C}[\lambda]) = \pi_0(\lambda)\mathbf{C}[\pi(\lambda)].$$

Говорим, что оператор $A\colon O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ является оператором *симметризации*, если он является оператором π-симметризации при некоторой целой функции $\pi(\lambda)$. Если целая функция $\pi_0(\lambda) \not\equiv 0$ удовлетворяет условию $A(\pi_0(\lambda)) = \pi_0(\lambda)$, то ее называют неподвижной точкой оператора A. Согласно обобщенному определению любой оператор симметризации обладает неподвижной точкой, которая не обязана совпадать с константой.

В статье доказана следующая теорема: *аппроксимационная теорема для однородного уравнения q-сторонней свертки справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и функционала $S \in O^*(\Omega)$ тогда и только тогда, когда оператор* (3) *является оператором симметризации* (теорема 3).

Оператор (3) является оператором симметризации при некоторых условиях на коэффициенты уравнения (5) (предложение 4, предложение 5). Эти условия гарантируют выполнимость аппроксимационной теоремы для уравнения (5) и являются точными. Их невыполнение означает, что найдется такая выпуклая область Ω и функционал $S \in O^*(\Omega)$, что не всякое решение уравнения (5) с такими коэффициентами аппроксимируется внутри области Ω элементарными решениями этого уравнения. Доказательство теоремы 3 основано на идеях построения различных контрпримеров из работ [3, 6–8].

Из теоремы 3 вытекает, что используемая в статьях [2,9] связь задачи экспоненциального синтеза (для однородных уравнений типа свертки) и задачи спектрального синтеза (для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами) в пространствах аналитических функций не является случайной и носит принципиальный характер.

§2. Оператор q-стороннего сдвига

2.1. Оператор A. Выберем произвольный набор комплексных чисел $a_0, \ldots, a_{q-1}$, не все из которых равны 0. Символом a обозначим вектор $(a_0, \ldots, a_{q-1})$, а символом b обозначим вектор $(b_0, \ldots, b_{q-1})$, где

$$b_n := \sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{kn} a_k, \tag{6}$$

$n \in \{0, \ldots, q-1\}$, ω_q – комплексное число $\exp \frac{2\pi i}{q}$. Определитель Δ системы линейных уравнений (6) совпадает с определителем Вандермонда и, значит, отличен от нуля. Следовательно, неравенство $|a_0| + \cdots + |a_{q-1}| > 0$ влечет неравенство $|b_0| + \cdots + |b_{q-1}| > 0$, то есть не все числа $b_0, \ldots, b_{q-1}$ равны нулю. Определим целое $n_0 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ из условий: $n_0 := 0$, если $b_0 \neq 0$; $n_0 := k$, если $b_0 = \cdots = b_{k-1} = 0$ и $b_k \neq 0$. Набор комплексных чисел $a_0, \ldots, a_{q-1}$, не все из которых равны 0, будем называть *приведенным*, если $b_{n_0} = 1$. Понятно, что произвольный набор комплексных чисел $a_0, \ldots, a_{q-1}$, не все из которых равны нулю, можно сделать приведенным, если разделить каждое из этих чисел на число $b_{n_0} \neq 0$.

Выберем произвольный приведенный набор комплексных чисел $a_0, \ldots, a_{q-1}$. Вектор $a := (a_0, \ldots, a_{q-1})$ однозначно определяет линейный непрерывный оператор A, действующий в пространстве целых функций $O(\mathbf{C})$ по правилу (3). Замечаем, что $A(\lambda^{n_0}) = \lambda^{n_0}$, то есть одночлен λ^{n_0} является неподвижным элементом эндоморфизма A.

2.2. Оператор A-сдвига. Пусть Ω_0, Ω – односвязные области в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, U – открытый круг с центром в нуле. Считаем, что $\Omega_0 + U \subseteq \Omega$ и пространства аналитических функций $O(\Omega_0)$, $O(U)$ и $O(\Omega)$ наделены топологиями равномерной сходимости на компактах. Выберем произвольное $h \in U$ и рассмотрим дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}, \tag{7}$$

где коэффициенты b_n, $n \in \mathbf{Z}_+$ определены по правилу (6).

Предложение 1. *Дифференциальный оператор* (7) *действует из пространства* $O(\Omega)$ *в пространстство* $O(\Omega_0)$ *и является оператором* A*-сдвига.*

Доказательство. Во-первых, простые преобразования

$$A(e^{h\lambda}) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k e^{\omega_q^k h\lambda} = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\omega_q^k h\lambda\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{kn} a_k\right) \frac{h^n}{n!} \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n}{n!} \lambda^n$$

показывают, что характеристическая функция дифференциального оператора (7) совпадает с образом $A(e^{h\lambda})$. Во-вторых, пусть d – компакт в Ω_0, U_ε – круг $\{z : |z| < \varepsilon\}$. Существует такой компакт $d' \Subset \Omega$, что при некотором $\varepsilon > |h|$ выполняется вложение $d + U_\varepsilon \subseteq d'$. Значит, для любой функции $f \in O(\Omega)$ и любого $z \in d$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} |h|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M(d')}{\varepsilon^n} |h|^n = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - |h|} M(d'),$$

где $M(d')$ – максимум модуля функции f на компакте d'. При этом для любого $n \in \{0, 1, \dots\}$

$$|b_n| = \left|\sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{kn} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} |a_k| \leqslant q\,|a|\,.$$

Отсюда вытекает, что для любой функции $f \in O(\Omega)$ и любого $z \in d$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z)\right| \leqslant q\,|a| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M(d')}{\varepsilon^n} |h|^n = \frac{\varepsilon q\,|a|}{\varepsilon - |h|} M(d').$$

Это означает, что дифференциальный оператор (7) действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ и является непрерывным. Следовательно, дифференциальный оператор (7) является оператором A-сдвига. Предложение доказано. □

2.3. Оператор q-стороннего сдвига. Пусть $f \in O(\Omega)$. Для любых $h \in U$ и $z \in \Omega_0$ имеем

$$T_h(f) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{kn} a_k\right) \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z)$$
$$= \sum_{k=0}^{q-1} a_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \left(\omega_q^k h\right)^n = \sum_{k=0}^{q-1} a_k f(z + \omega_q^k h).$$

Это означает, что оператор A-сдвига T_h совпадает с оператором вида

$$O(\Omega) \to O(\Omega_0) \mid f(z) \mapsto \sum_{k=0}^{q-1} a_k f(z + \omega_q^k h), \tag{8}$$

где $|a_0| + \cdots + |a_{q-1}| > 0$. Оператор (8) принято называть *оператором q-стороннего сдвига* (на шаг $h \in U$). Из сказанного выше следует, что всякий оператор q-стороннего сдвига совпадает с дифференциальным оператором вида

$$O(\Omega) \to O(\Omega_0) | \, f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z), \tag{9}$$

где $b_n \in \mathbf{C}$. Понятно, что не всякий дифференциальный оператор вида (9) с произвольными коэффициентами $b_n \in \mathbf{C}$ является оператором q-стороннего сдвига. Точные условия, при которых это выполняется, дает следующее предложение.

Предложение 2. *Дифференциальный оператор вида* (9) *является оператором q-стороннего сдвига тогда и только тогда, когда коэффициенты b_n удовлетворяют следующим условиям*:

1) $b_{n+q} = b_n$ *для любого* $n \in \mathbf{Z}_+$;
2) $|b_0| + \cdots + |b_{q-1}| > 0$.

Если дифференциальный оператор вида (9) является оператором q-стороннего сдвига, то по условию 1) предложения 2 коэффициенты b_n, $n \in \mathbf{Z}_+$, однозначно восстанавливаются по вектору $b := (b_0, \ldots, b_{q-1})$. При этом вектор b определяется по вектору $a := (a_0, \ldots, a_{q-1})$ с помощью соотношений (6), а вектор a определяется по вектору b с помощью соотношений $a_k = \Delta_k/\Delta$, $k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, в которых Δ_k – определитель, полученный из определителя Вандермонда Δ, заменой k-го столбца на столбец, составленный из коэффициентов $b_0, \ldots, b_{q-1}$. Легко убедиться, что существует более простое средство восстановления вектора a по вектору b.

Предложение 3. *Если дифференциальный оператор вида* (9) *является оператором q-стороннего сдвига, то коэффициенты $a_0, \ldots, a_{q-1}$ соответствующего оператора q-стороннего сдвига* (8) *однозначно восстанавливаются по вектору b с помощью следующих соотношений*

$$a_k = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} \omega_q^{-kn} b_n, \quad k \in \{0, \ldots, q-1\}. \tag{10}$$

2.4. Индикатор оператора q-стороннего сдвига. Выберем произвольный приведенный набор комплексных чисел $a_0, \dots, a_{q-1}$ и рассмотрим оператор q-стороннего сдвига (8), действующий из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$. В силу предложения 3 вектор $a := (a_0, \dots, a_{q-1})$ однозначно определяется по вектору $b := (b_0, \dots, b_{q-1})$. Выделим среди компонент вектора b лишь те, которые отличны от нуля. Для этого символом n_A обозначим совокупность целых неотрицательных чисел $n_0, \dots, n_{\nu-1}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $0 \leqslant n_0 < \dots < n_{\nu-1} \leqslant q-1$;
2) если $n \in \{n_0, \dots, n_{\nu-1}\}$, то $b_n \neq 0$;
3) если $n \in \{0, \dots, q-1\} \setminus \{n_0, \dots, n_{\nu-1}\}$, то $b_n = 0$.

Совокупность $n_A := \{n_0, \dots, n_{\nu-1}\}$ будем называть *индикатором* оператора q-стороннего сдвига T_h. По условию 2) из предложения 2 индикатор n_A не является пустым, значит, $\nu \geqslant 1$. Более того, по определению приведенной системы комплексных чисел $a_0, \dots, a_{q-1}$ имеем $b_{n_0} = 1$. Будем говорить, что индикатор n_A *периодичен*, если существует такое $q_0 \in \mathbf{N}$, что для всех $k \in \{0, \dots, \nu-1\}$ выполняется равенство $n_{k+1} = n_k + q_0$, где $n_\nu := n_0 + q$. Отметим, что индикатор n_A периодичен, если $\nu = 1$ или $q \leqslant 2$. Следующее предложение дает описание условия периодичности индикатора n_A в терминах вектора a.

Предложение 4. *Индикатор n_A оператора q-стороннего сдвига T_h периодичен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) $q = q_0\nu$ *при некоторых* $q_0, \nu \in \{1, \dots, q\}$;
2) $a_{k+\nu} = \omega_q^{-\nu n_0} a_k$ *для любого* $k \in \{0, \dots, q-\nu-1\}$;
3) $\sum_{k=0}^{\nu-1} \omega_q^{k n_j} a_k \neq 0$ *для любого* $j \in \{0, \dots, \nu-1\}$.

Для доказательства предложения 4 достаточно заметить, что периодичность индикатор n_A оператора q-стороннего сдвига T_h равносильна представлению его элементов $n_j \in n_A$ в виде $n_j := q_0 j + n_0$, где q_0 – некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $q_0\nu = q$.

2.5. Оператор симметризации. Свойство периодичности индикатора n_A оператора q-стороннего сдвига T_h тесно связано со свойством симметризации (в обобщенном смысле) оператора A. Справедливо следующее предложение.

Предложение 5. *Индикатор n_A оператора q-стороннего сдвига T_h периодичен тогда и только тогда, когда оператор A является оператором симметризации.*

Доказательство. Предположим, что индикатор n_A оператора q-стороннего сдвига периодичен. Учитывая условие 1) из предложения 2, заключаем, что

$$\{A(\lambda^n) : n = 0, 1, \dots\} = \{b_{n_0+q_0k}\lambda^{n_0+q_0k} : k = 0, 1, \dots\},$$

где все коэффициенты $b_{n_0+q_0k}$ отличны от нуля. Отсюда вытекает, что $A(\mathbf{C}[\lambda]) = \lambda^{n_0}\mathbf{C}[\lambda^{q_0}]$. Это означает, что оператор A является оператором π-симметризации, где $\pi_0(\lambda) := \lambda^{n_0}$, $\pi(\lambda) := \lambda^{q_0}$. Обратно. Предположим, что оператор A является оператором π-симметризации, где $\pi(\lambda)$ – некоторая целая функция. Тогда $A(\pi_0(\lambda)) = \pi_0(\lambda)$ и $A(\mathbf{C}[\lambda]) = \pi_0(\lambda)\mathbf{C}[\pi(\lambda)]$ при некоторой $\pi_0 \in O(\mathbf{C})$. Из условия $A(\pi_0(\lambda)) = \pi_0(\lambda)$ вытекает, что $\pi_0(\lambda) = \lambda^{n_0}$, то есть $A(\lambda^{n_0}) = \lambda^{n_0}$. Из условия $A(\mathbf{C}[\lambda]) = \lambda^{n_0}\mathbf{C}[\pi(\lambda)]$ вытекает, что $\pi(\lambda) = \lambda^{q_0}$, то есть кольцо $\mathbf{C}[\pi(\lambda)]$ совпадает с кольцом $\mathbf{C}[\lambda^{q_0}]$. Значит, если $n - n_0$ не делится на q_0, то $b_n = 0$. Это означает, что индикатор n_A совпадает с множеством $\{n_0, n_0 + q_0, \dots, n_0 + q_0(\nu - 1)\}$ и, следовательно, периодичен. Предложение доказано. $\square$

§3. Синтез в ядре оператора q-сторонней свертки

3.1. Оператор q-сторонней свертки. Выберем произвольный оператор q-стороннего сдвига T_h, произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S на пространстве $O(\Omega_0)$. При фиксированных S и U линейный оператор $M_S\colon O(\Omega) \to O(U) \mid f \mapsto \langle S, T_h(f) \rangle$ называется *оператором q-сторонней свертки*. Вполне стандартные выкладки позволяют убедиться в справедливости следующих двух свойств этого оператора (см., например, [2, 3]).

Предложение 6. *Оператор q-сторонней свертки является непрерывным.*

Предложение 7. *Ядро W_S оператора q-сторонней свертки инвариантно относительно оператора q-кратного дифференцирования D^q.*

Пусть $O^*(\Omega)$ – сильное сопряженное к пространству $O(\Omega)$; L_Ω – преобразование Лапласа; $P(\Omega)$ – полный образ L_Ω. Отображение L_Ω : $O^*(\Omega) \to P(\Omega)$ каждому функционалу $S \in O^*(\Omega)$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального типа $\varphi(\lambda) := \langle S, e^{\lambda z} \rangle$ (характеристическую функцию функционала S). Известно, что отображение L_Ω является взаимно однозначным. Оно индуцирует в $P(\Omega)$ отделимую локально выпуклую топологию. Символом L_Ω^* обозначим сопряженное к отображению L_Ω. Воспользуемся рефлексивностью пространства $O(\Omega)$ и отождествим это пространство с его вторым сопряжённым пространством. Тогда оператор L_Ω^* осуществляет изоморфизм сильного сопряженного пространства $P^*(\Omega)$ на пространство $O(\Omega)$.

Если $u\colon O(\Omega) \to O(U)$ – линейный непрерывный оператор, $u^* : O^*(U) \to O(\Omega)$ – его сопряженный оператор, то оператор $u^{\circledast} := L_\Omega \circ u^* \circ L_U^{-1}$ действует из пространства $P(U)$ в пространство $P(\Omega)$ и называется дуальным по отношению к оператору u. Легко убедиться в справедливости следующего предложения [2, §4, свойство 6].

Предложение 8. *Дуальный оператор $M_S^{\circledast}\colon P(U) \to P(\Omega)$ по отношению к оператору q-сторонней свертки действует по правилу $g \mapsto \varphi A(g)$, где $\varphi := L_{\Omega_0}(S)$ – характеристическая функция функционала S.*

3.2. Экспоненциальный синтез. Пространство решений $f \in O(\Omega)$ однородного уравнения q-сторонней свертки (5) совпадает с ядром W_S оператора q-сторонней свертки и, как отмечено выше (предложения 6 и 7), является замкнутым D^q-инвариантным подпространством в пространстве $O(\Omega)$. Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие уравнению (5), принято называть *элементарными решениями* этого уравнения. Семейство элементарных решений этого уравнения не является пустым. Легко убедиться, например, что оно включает экспоненциальные одночлены $e^{\lambda z},\ ze^{\lambda z}, \ldots, z^{m-1}e^{\lambda z}$, где λ – произвольный нуль (кратности m) характеристической функции φ функционала S. Первое описание семейства всех элементарных решений уравнения (5) в терминах характеристической функции φ дано в работе [10]. В работе [11] описан общий вид элементарных решений – общее элементарное решение однородных уравнений типа q-сторонней свертки.

Говорят, что замкнутое подпространство $W \subseteq O(\Omega)$ *допускает экспоненциальный синтез*, если оно совпадает с замыканием в $O(\Omega)$ системы экспоненциальных полиномов, лежащих в W. *Задача экспоненциального синтеза* состоит в определении условий, при которых замкнутое подпространство $W \subseteq O(\Omega)$ допускает экспоненциальный синтез. По отношению к подпространству W_S решений однородного уравнения q-сторонней свертки задача экспоненциального синтеза совпадает с классической аппроксимационной задачей: найти условия, при которых произвольное решение $f \in O(\Omega)$ однородного уравнения

(5) можно аппроксимировать в топологии пространства $O(\Omega)$ линейными комбинациями элементарных решений этого уравнения.

3.3. Спектральный синтез. Рассмотрим дуальный оператор $(z^q)^{\circledast}$ по отношению к оператору

$$(z^q)^{\times} : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})\big|\, f(z) \mapsto z^q f(z)$$

умножения на одночлен z^q. Легко убедиться, что оператор $(z^q)^{\circledast}$ совпадает с сужением оператора q-кратного дифференцирования D^q на подпространство $P(\mathbf{C}) \subseteq O(\mathbf{C})$. Отсюда легко вытекает, что алгебраический спектр оператора $(z^q)^{\circledast}$ совпадает с $\mathbf{C}$, а корневое подпространство $E_\lambda \subseteq P(\mathbf{C})$ оператора $(z^q)^{\circledast}$, отвечающее собственному значению λ^q, совпадает с линейной оболочкой множества экспоненциальных одночленов $z^j e^{\omega^k \lambda z}$, $(j,k) \in \mathbf{Z}_+ \times \{0,1,\ldots,q-1\}$ (см. [12]).

Говорят, что корневой элемент $e \in E_\lambda \subseteq O(\Omega)$ дуального оператора $(z^q)^{\circledast}$, соответствующий собственному значению λ^q, *погружен* в подпространство $W \subseteq O(\Omega)$, если все корневые элементы вида $((z^q)^{\circledast} - \lambda^q)^k e$ лежат в W. Замкнутое подпространство $W \subseteq O(\Omega)$ *допускает синтез по корневым элементам дуального оператора* $(z^q)^{\circledast}$, если оно совпадает с замыканием в $O(\Omega)$ линейной оболочки множества корневых элементов оператора $(z^q)^{\circledast}$, погруженных в W. *Задача спектрального синтеза* (для оператора $(z^q)^{\circledast}$) состоит в определении условий, при которых замкнутое подпространство $W \subseteq O(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора $(z^q)^{\circledast}$.

С другой стороны, сильное сопряженное пространство $O^*(\mathbf{C})$ можно отождествить с векторным подпространством в $P^*(\Omega)$ и говорить о непрерывном вложении $O^*(\mathbf{C}) \subseteq P^*(\Omega)$. При этом оператор умножения $(z^q)^{\times}$ является непрерывным эндоморфизмом пространства $O(\mathbf{C})$, значит, его сопряженный оператор $(z^q)^* = (z^*)^q$ является непрерывным эндоморфизмом пространства $O^*(\mathbf{C})$. Известно, что алгебраический спектр сопряженного оператора $(z^q)^* : O^*(\mathbf{C}) \to O^*(\mathbf{C})$ совпадает с $\mathbf{C}$, а корневое подпространство $\Delta_\lambda \subseteq O^*(\mathbf{C})$, отвечающее собственному значению λ^q, совпадает с линейной оболочкой множества $\delta^{(j)}_{\omega^k\lambda}$, $(j,k) \in \mathbf{Z}_+ \times \{0,1,\ldots,q-1\}\}$, где $\delta^{(j)}_{\omega^k\lambda}$ – функционал $f \mapsto f^{(j)}(\omega^k\lambda)$ [4].

Говорят, что корневой элемент $\delta \in \Delta_\lambda \subseteq P^*(\Omega)$ сопряженного оператора $(z^q)^* : O^*(\mathbf{C}) \to O^*(\mathbf{C})$, соответствующий собственному значению λ^q, *погружен* в подпространство $V \subseteq P^*(\Omega)$, если все корневые элементы вида $((z^q)^* - \lambda^q)^k \delta$ лежат в V. Замкнутое подпространство

$V \subseteq P^*(\Omega)$ *допускает синтез по корневым элементам сопряженного оператора* $(z^q)^*$, если оно совпадает с замыканием в $P^*(\Omega)$ линейной оболочки множества корневых элементов оператора $(z^q)^*$, погруженных в V. *Задача спектрального синтеза* (для оператора $(z^q)^*$) состоит в определении условий, при которых замкнутое подпространство $V \subseteq P^*(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора $(z^q)^*$.

Функционал $\widehat{f} := (L^*_\Omega)^{-1}(f) \in P^*(\Omega)$ называется *дуальным элементом* функции $f \in O(\Omega)$. Замкнутое подпространство $\widehat{W} := (L^*_\Omega)^{-1}(W) \subseteq P^*(\Omega)$ называется *дуальным подпространством* подпространства $W \subseteq O(\Omega)$. Справедливо следующее предложение, которое сводит задачу экспоненциального синтеза к задачам спектрального синтеза для операторов $(z^q)^{\circledast}$ и $(z^q)^*$ соответственно.

Предложение 9. *Пусть W – замкнутое D^q-инвариантное подпространство в $O(\Omega)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *подпространство W допускает экспоненциальный синтез;*

2) *подпространство W допускает синтез по корневым элементам дуального оператора $(z^q)^{\circledast}$;*

3) *дуальное подпространство $\widehat{W}$ допускает синтез по корневым элементам сопряженного оператора $(z^q)^*$.*

Доказательство. Из совпадения дуального оператора $(z^q)^{\circledast}\colon P(\mathbf{C}) \to P(\mathbf{C})$ с сужением оператора q-кратного дифференцирования D^q на пространство $P(\mathbf{C})$ вытекает, что корневые элементы дуального оператора $(z^q)^{\circledast}$ совпадают с корневыми элементами оператора D^q и, значит, исчерпываются экспоненциальными полиномами вида

$$e_\lambda = \sum_{k=0}^{q-1} p_k(z) \exp\left\{\omega_q^k \lambda z\right\}, \ \lambda \in \mathbf{C}, \ p_k \in \mathbf{C}[z]. \tag{11}$$

В статье [11] показано, что любой экспоненциальный полином из D^q-инвариантного подпространства $W \subseteq O(\Omega)$ можно представить как конечную линейную комбинацию экспоненциальных полиномов из W вида (11). Отсюда вытекает эквивалентность утверждений 1) и 2). С другой стороны, сужение отображение $L^*_\Omega : P^*(\Omega) \to O(\Omega)$ на подпространство $O^*(\mathbf{C}) \subseteq P^*(\Omega)$ совпадает с преобразованием Лапласа $L_{\mathbf{C}} : O^*(\mathbf{C}) \to P(\mathbf{C})$. Значит, отображение L^*_Ω осуществляет изоморфизм векторных подпространств $\Delta_\lambda \to E_\lambda$ и $\widehat{W_S} \to W_S$. При этом для любого элемента $e \in E_\lambda$ и его дуального элемента $\widehat{e} := (L^*_\Omega)^{-1}(e) \in \Delta_\lambda$

выполнены следующие соотношения

$$((z^q)^{\circledast} - \lambda^q)e = (L_{\mathbf{C}} \circ (z^q)^* \circ L_{\mathbf{C}}^{-1}(\delta) - \lambda^q)e$$
$$= (L_\Omega^* \circ (z^q)^* \circ (L_\Omega^*)^{-1} - \lambda^q)e = L_\Omega^*(((z^q)^* - \lambda^q)\widehat{e}).$$

Значит, включение $((z^q)^{\circledast} - \lambda^q)^k e \in W_S$ равносильно включению

$$((z^q)^* - \lambda^q)^k \widehat{e} \in (L_\Omega^*)^{-1}(W_S) =: \widehat{W}_S$$

для любого $k \in \mathbf{Z}_+$. Следовательно, корневой элемент $e \in E_\lambda$ погружен в замкнутое подпространство W_S тогда и только тогда, когда корневой элемент $\widehat{e} \in \Delta_\lambda$ погружен в дуальное пространство $\widehat{W}_S$. Отсюда вытекает, что замкнутое подпространство W_S допускает синтез по корневым элементам дуального оператора $(z^q)^{\circledast}$ тогда и только тогда, когда его дуальное подпространство $\widehat{W}_S$ допускает синтез по корневым элементам сопряженного оператора $(z^q)^*$, то есть утверждения 2) и 3) эквивалентны. Предложение доказано. □

3.4. Двойственность. Подпространство $W_S \subseteq O(\Omega)$ решений однородного уравнения q-сторонней свертки является D^q-инвариантным (предложение 7), значит, предложение 9 сводит задачу экспоненциального синтеза для подпространства W_S к задаче спектрального синтеза (для оператора $(z^q)^*$) по отношению к дуальному подпространству $\widehat{W}_S$.

Основной путь решения задачи спектрального синтеза (для оператора $(z^q)^*$) связан с двойственным переходом к эквивалентной задаче локального описания. Общая процедура двойственного перехода подробно изучена в работах [12, 13] и не требует дополнительных построений. Сейчас же мы лишь воспользуемся ключевым результатом статьи [12] и сформулируем нужное нам предложение.

Предложение 10. *Пусть V – замкнутое подпространство в $P^*(\Omega)$, $I := V^0$ – аннулятор пространства V в пространстве $P(\Omega)$, I' – замкнутый $\mathbf{C}[z^q]$-подмодуль $O(\mathbf{C})$, порождаемый множеством I. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *замкнутое подпространство V допускает синтез по корневым элементам сопряженного оператора $(z^q)^*$,*

2) *$I = P(\Omega) \cap I'$.*

Доказательство. Сужение отображения $z \mapsto z^q$ на круг $U_n := \{z : |z| < n\}$ является собственным отображением на круг U_{n^q}. При этом

$U_1 \cup U_2 \cup \dots = \mathbf{C}$, значит, комплексная плоскость допускает собственное z^q-исчерпание. Следовательно, доказываемое предложение является прямым следствием специальной теоремы двойственности [12, теорема 3]. □

Путь W – замкнутое подпространство в $O(\Omega)$, $\widehat{W} := (L^*_\Omega)^{-1}(W) \subseteq P^*(\Omega)$ – его дуальное подпространство. Аннулятор $\widehat{W}^0 \subseteq P(\Omega)$ дуального подпространства $\widehat{W}$ называется дуальным аннулятором подпространства W. Легко убедиться, что $(L^*_\Omega)^{-1}(W)^0 = L_\Omega(W^0)$, то есть $\widehat{W}^0 = L_\Omega(W^0)$ [2].

Применим предложение 10 к рассматриваемой в данной статье ситуации.

Теорема 1. *Пусть $I_S \subseteq P(\Omega)$ – дуальный аннулятор подпространства $W_S \subseteq O(\Omega)$, I'_S – замкнутый $\mathbf{C}[z^q]$-подмодуль в $O(\mathbf{C})$, порождаемый пространством I_S. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *подпространство W_S допускает экспоненциальный синтез,*
2) $I_S = P(\Omega) \cap I'_S$.

Доказательство. По предложению 9 условие 1) эквивалентно условию: дуальное подпространство $\widehat{W}_S$ допускает синтез по корневым элементам сопряженного оператора $(z^q)^*$. По предложению 10 последнее условие равносильно условию 2). Теорема доказана. □

§4. Полиномиальная аппроксимация

4.1. Полиномиальные оболочки. Выберем произвольную конечную систему функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ из пространства $P(\Omega)$. Совокупность всех элементов из $P(\Omega)$, допускающих представление в виде $p_1\varphi_1 + \dots + p_n\varphi_n$, где $p_k \in \mathbf{C}[\lambda^q]$, называется *полиномиальной оболочкой* (точнее, $\mathbf{C}[\lambda^q]$-оболочкой) системы функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в пространстве $P(\Omega)$, а ее замыкание в пространстве $P(\Omega)$ называется *замкнутой полиномиальной оболочкой* (точнее, замкнутой $\mathbf{C}[\lambda^q]$-оболочкой) системы функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в пространстве $P(\Omega)$.

Пусть $n_A = \{n_0, \dots, n_{q-1}\}$ – индикатор оператора q-стороннего сдвига T_h и $\varphi \in P(\Omega)$. Полиномиальную оболочку системы функций $\{\lambda^{n_k}\varphi\colon n_k \in n_A\}$ обозначим символом $J_{\varphi,A}$, а замкнутую полиномиальную оболочку системы функций $\{\lambda^{n_k}\varphi\colon n_k \in n_A\}$ обозначим символом $I_{\varphi,A}$.

4.2. Строение дуального аннулятора. Выясним структуру дуального аннулятора $I_S := \widehat{W}_S^0$ подпространства W_S решений однородного уравнения q-сторонней свертки. Для этого нам потребуется следующее предложение.

Лемма 1. *Образ* $A(\mathbf{C}[\lambda])$ *совпадает с подмодулем* $\mathbf{C}[\lambda^q]$*-модуля* $\mathbf{C}[\lambda]$*, порождаемым элементами* λ^{n_k}, $n_k \in n_A$.

Доказательство. Для произвольного многочлена $p \in \mathbf{C}[\lambda]$ имеем

$$A(p(\lambda)) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k p(\omega_q^k \lambda) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!} \omega_q^{kn} \lambda^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n \sum_{k=0}^{q-1} a_k \omega_q^{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{p^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n.$$

По свойству периодичности коэффициентов b_n (см. условие 1) предложения 2) имеем

$$A(p(\lambda)) = \sum_{n=0}^{q-1} b_n \lambda^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{(n+qm)}(0)}{(n+qm)!} \lambda^{qm} = \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\lambda) b_n \lambda^n,$$

где многочлены

$$p_n(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{(n+qm)}(0)}{(n+qm)!} \lambda^{qm}, \ n \in \{0, \ldots, q-1\}$$

принадлежат кольцу $\mathbf{C}[\lambda^q]$. Значит, образ $A(\mathbf{C}[\lambda])$ лежит в подмодуле $\mathbf{C}[\lambda^q]$-модуля $\mathbf{C}[\lambda]$, порождаемом элементами $b_0, b_1\lambda, \ldots, b_{q-1}\lambda^{q-1}$. Из определения индикатора n_A оператора q-стороннего сдвига вытекает, что образ $A(\mathbf{C}[\lambda])$ лежит в подмодуле $\mathbf{C}[\lambda^q]$-модуля $\mathbf{C}[\lambda]$, порождаемом элементами λ^{n_k}, $n_k \in n_A$. Обратно, выберем произвольный элемент p из подмодуля $\mathbf{C}[\lambda^q]$-модуля $\mathbf{C}[\lambda]$, порождаемого элементами λ^{n_k}, $n_k \in n_A$. Тогда найдутся такие полиномы $p_0, \ldots, p_{q-1} \in \mathbf{C}[\lambda^q]$, что

$$p(\lambda) := \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\lambda) b_n \lambda^n.$$

Учитывая, что $p_n(\omega_q^k \lambda) = p_n(\lambda)$, получаем

$$p(\lambda) := \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\lambda) b_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\lambda) \sum_{k=0}^{q-1} a_k \omega_q^{kn} \lambda^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} a_k \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\omega_q^k \lambda)\omega_q^{kn}\lambda^n = \sum_{k=0}^{q-1} a_k r(\omega_q^k \lambda) = A(r(\lambda)),$$

где

$$r(\lambda) := \sum_{n=0}^{q-1} p_n(\lambda)\lambda^n$$

– полином из кольца $\mathbf{C}[\lambda]$. Предложение доказано. □

Следующее предложение вскрывает строение дуального аннулятора $I_S := \widehat{W}_S^0$ подпространства W_S.

Предложение 11. *Дуальный аннулятор I_S замкнутого подпространства W_S совпадает с замкнутой полиномиальной оболочкой $I_{\varphi,A}$ системы функций $\{\lambda^{n_k}\varphi\colon n_k \in n_A\}$ в пространстве $P(\Omega)$.*

Доказательство. Множество решений однородного уравнения (5) совпадает с ядром W_S оператора q-сторонней свертки $u\colon O(\Omega) \to O(U)$. Так как пространства $O(\Omega)$ и $O(U)$ являются рефлексивными, то второе сопряженное отображение $(u^*)^*$ совпадает с u. Отсюда вытекает, что аннулятор $W_S^0 \subseteq O^*(\Omega)$ совпадает с замыканием в пространстве $O^*(\Omega)$ образа $u^*(O^*(U))$. Последнее равносильно тому, что дуальный аннулятор I_S совпадает с замыканием в $P(\Omega)$ образа $u^{\circledast}(P(U))$. По предложению 8 образ $u^{\circledast}(P(U))$ совпадает с замыканием в $P(\Omega)$ множества $\{\varphi A(g) : g \in P(U)\}$. Частичные суммы g_n ряда Тейлора функции $g \in P(U)$ сходятся к ней в пространстве $P(U)$, значит,

$$p_n(\lambda) := A(g_n(\lambda)) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k g_n(\omega_q^k \lambda) \to \sum_{k=0}^{q-1} a_k g(\omega_q^k \lambda) = A(g(\lambda))$$

в пространстве $P(U)$. Билинейная операция $P(\Omega_0) \times P(U) \to P(\Omega) \mid (\psi, \phi) \mapsto \psi\phi$ является раздельно непрерывной, следовательно, $\varphi p_n \mapsto \varphi A(g)$ в топологии пространства $P(\Omega)$. Поэтому элементы множества $\{\varphi A(g) : g \in P(U_\varepsilon)\}$ можно аппроксимировать в топологии $P(\Omega)$ элементами множества $\{p\varphi : p \in A(\mathbf{C}[z])\}$. По лемме 1 последнее множество совпадает с полиномиальной оболочкой $J_{\varphi,A}$. Следовательно, дуальный аннулятор I_S совпадает с замкнутой полиномиальной оболочкой $I_{\varphi,A}$. Это и требовалось доказать. □

4.3. Пространство $\mathbf{O}_{\varphi,A}$. Пусть $n_A := \{n_0, \ldots, n_{\nu-1}\}$ – индикатор оператора q-стороннего сдвига T_h. Элементы $\mathbf{g}$ декартовой степени $O^\nu(\mathbf{C})$ называем *целыми ν-функциями*. Если $g_0, \ldots, g_{\nu-1}$ – полиномы, то целую ν-функцию $\mathbf{g} := (g_0, \ldots, g_{\nu-1})$ называем *ν-полиномом*. Выберем произвольную функцию $\varphi \in P(\Omega)$ и определим линейное непрерывное отображение $\mathbf{u}_{\varphi,A} \colon O^\nu(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ по правилу

$$\mathbf{g} \mapsto \lambda^{n_A}\mathbf{g}(\lambda^q)\varphi(\lambda) := \lambda^{n_0}g_0(\lambda^q)\varphi(\lambda) + \cdots + \lambda^{n_{\nu-1}}g_{\nu-1}(\lambda^q)\varphi(\lambda).$$

Предложение 12. *Справедливы следующие утверждения:*
1) *отображение $\mathbf{u}_{\varphi,A}$ является взаимно однозначным*;
2) *полный образ отображения $\mathbf{u}_{\varphi,A}$ замкнут в пространстве $O(\mathbf{C})$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1).
Пусть $\mathbf{g} \in O^\nu(\mathbf{C})$ и $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g}) = 0$. Тогда вне множества нулей целой функции φ выполняется равенство $\lambda^{n_A}\mathbf{g}(\lambda^q) := \lambda^{n_0}g_0(\lambda^q) + \cdots + \lambda^{n_{\nu-1}}g_{\nu-1}(\lambda^q) = 0$. Значит, вне множества нулей функции φ выполняются равенства

$$\omega_q^{kn_0}\lambda^{n_0}g_0(\lambda^q) + \cdots + \omega_q^{kn_{\nu-1}}\lambda^{n_{\nu-1}}g_{\nu-1}(\lambda^q) = 0,\ k \in \{0, \ldots, \nu-1\}.$$

Определитель указанной системы совпадает с определителем Вандермонда $\Delta_{n_A} \neq 0$. Следовательно, функции $\lambda^{n_0}g_0(\lambda^q), \ldots, \lambda^{n_{\nu-1}}g_{\nu-1}(\lambda^q)$ равны нулю вне нулей целой функции φ. Отсюда следует, что $\mathbf{g} = 0$. Это и означает, что отображение $\mathbf{u}_{\varphi,A}$ является взаимно однозначным. Докажем утверждение 2). Пусть $f \in O(\mathbf{C})$, $f_m \in \mathbf{u}_{\varphi,A}(O^\nu(\mathbf{C}))$ и $f_m \to f$ в пространстве $O(\mathbf{C})$. Нужно доказать, что $f \in \mathbf{u}_{\varphi,A}(O^\nu(\mathbf{C}))$. По определению отображения $\mathbf{u}_{\varphi,A}$ элементы последовательности f_m допускают представление $f_m(\lambda) := \mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g}^{(m)})(\lambda) = \psi_m(\lambda)\varphi(\lambda)$, где $\psi_m(\lambda) := \lambda^{n_0}g_0^{(m)}(\lambda^q) + \cdots + \lambda^{n_{\nu-1}}g_{\nu-1}^{(m)}(\lambda^q)$, $\mathbf{g}^{(m)} := (g_0^{(m)}, \ldots, g_{\nu-1}^{(m)})$ – некоторые целые ν-функции. Значит, предельная функция f делится на функцию φ и $\psi_m \to \psi := \frac{f}{\varphi}$ в пространстве $O(\mathbf{C})$. Замечаем, что при любом $z \in \mathbf{C}$ вектор $\mathbf{g}^{(m)}(z^q)$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\omega_q^{kn_0}\lambda^{n_0}g_0(\lambda^q) + \cdots + \omega_q^{kn_{\nu-1}}\lambda^{n_{\nu-1}}g_{\nu-1}(\lambda^q) = \psi(\omega_q^k\lambda),\ k \in \{0, \ldots, \nu-1\},$$

значит, для любого $\lambda \neq 0$ имеем представление

$$g_k^{(m)}(\lambda^q) = \frac{\Delta_{n_A}^k(\psi_m(\lambda))}{\lambda^{n_k}\Delta_{n_A}},$$

где $\Delta^k_{n_A}(\psi_m(\lambda))$ – определитель, который получен из определителя Вандермонда Δ_{n_A} заменой k-го столбца на столбец из функций $\psi_m(\lambda)$, $\psi_m(\omega_q\lambda), \dots, \psi_m(\omega_q^{\nu-1}\lambda)$. Следовательно,

$$g_k^{(m)}(\lambda^q) \to g_k(\lambda^q) := \frac{\Delta^k_{n_A}(\psi(\lambda))}{\lambda^{n_k}\Delta_{n_A}}$$

в пространстве $O(\mathbf{C})$. При этом на всей комплексной плоскости имеет место представление $\psi(\lambda) := \lambda^{n_0}g_0(\lambda^q)\varphi(\lambda) + \dots + \lambda^{n_{\nu-1}}g_{\nu-1}(\lambda^q)\varphi(\lambda)$, значит, $f = \psi\varphi \in \mathbf{u}_{\varphi,A}(O^\nu(\mathbf{C}))$. Предложение доказано. $\square$

Обозначим символом $\mathbf{O}_{\varphi,A}$ пространство всех целых ν-функций $\mathbf{g}$, для которых образ $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g}) := \lambda^{n_A}\mathbf{g}(\lambda^q)\varphi(\lambda)$ принадлежит $P(\Omega)$. По предложению 12 отображение $\mathbf{u}_{\varphi,A}\colon \mathbf{O}_{\varphi,A} \to P(\Omega)$ является взаимно однозначным. Наделим $\mathbf{O}_{\varphi,A}$ локально выпуклой топологией, индуцированной из пространства $P(\Omega)$ отображением $\mathbf{u}_{\varphi,A}$. Так как $\varphi \in P(\Omega)$ и оператор умножения на многочлен является эндоморфизмом пространства $P(\Omega)$, то пространство $\mathbf{O}_{\varphi,A}$ включает в себя все ν-полиномы.

4.4. Плотность ν-полиномов. Принципиальное значение для нас имеет вопрос плотности множества всех ν-полиномов в пространстве $\mathbf{O}_{\varphi,A}$. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *ν-полиномы плотны в пространстве $\mathbf{O}_{\varphi,A}$,*
2) *подпространство W_S допускает экспоненциальный синтез.*

Доказательство. Убедимся в справедливости импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что ν-многочлены плотны в пространстве $\mathbf{O}_{\varphi,A}$. В силу теоремы 1 нам достаточно показать, что $I_S = P(\Omega) \cap I'_S$, где I'_S – замкнутый подмодуль в $\mathbf{C}[z^q]$-модуле $O(\mathbf{C})$, порождаемый дуальным аннулятором $I_S \subseteq P(\Omega)$. Так как вложение $I_S \subseteq P(\Omega) \cap I'_S$ следует из определения подмодуля I'_S, то нужно доказать лишь выполнимость обратного вложения. Пусть $f \in P(\Omega) \cap I'_S$. Из включения $f \in I'_S$ вытекает, что f можно аппроксимировать в топологии пространства $O(\mathbf{C})$ элементами вида $p_1(\lambda^q)\varphi_1(\lambda) + \ldots + p_k(\lambda^q)\varphi_k(\lambda)$, где $p_1, \dots, p_k$ – полиномы, $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in I_S$. По предложению 11 дуальный аннулятор I_S совпадает с замкнутой полиномиальной оболочкой $I_{\varphi,A}$. По определению $I_{\varphi,A}$ функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ можно аппроксимировать в топологии пространства $P(\Omega)$ функциями вида

$$\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{r})(\lambda) := \lambda^{n_0} r_0(\lambda^q)\varphi(\lambda) + \ldots + \lambda^{n_{\nu-1}} r_{\nu-1}(\lambda^q)\varphi(\lambda),$$

где $\mathbf{r} := (r_0, \ldots, r_{\nu-1})$ – ν-полином, $n_k \in n_A$. При этом вложение $P(\Omega) \subseteq O(\mathbf{C})$ является непрерывным, значит, функцию f можно аппроксимировать в топологии пространства $O(\mathbf{C})$ элементами подпространства $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{O}_{\varphi,A}) \subseteq P(\Omega)$. Но по предложению 12 полный образ $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{O}_{\varphi,A})$ замкнут в пространстве $O(\mathbf{C})$, значит, при некотором $\mathbf{g} := (g_0, \ldots, g_{\nu-1}) \in \mathbf{O}_{\varphi,A}$ имеем представление

$$f = \mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g})(\lambda) := \lambda^{n_0} g_0(\lambda^q)\varphi(\lambda) + \ldots + \lambda^{n_{\nu-1}} g_{\nu-1}(\lambda^q)\varphi(\lambda).$$

По предположению ν-полиномы плотны в пространстве $\mathbf{O}_{\varphi,A}$ и, кроме того, отображение $\mathbf{u}_{\varphi,A} : \mathbf{O}_{\varphi,A} \to P(\Omega)$ является непрерывным, следовательно, f можно аппроксимировать в топологии пространства $P(\Omega)$ элементами вида $\lambda^{n_0} r_0(\lambda^q)\varphi(\lambda) + \ldots + \lambda^{n_{\nu-1}} r_{\nu-1}(\lambda^q)\varphi(\lambda)$, где $r_0, \ldots, r_{\nu-1}$ – полиномы, то есть $f \in I_{\varphi,A} = I_S$. Таким образом $P(\Omega) \cap I'_S \subseteq I_S$ и, следовательно, $P(\Omega) \cap I'_S = I_S$.

Проверим выполнение обратной импликации 2) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что условие 2) выполнено. Выберем произвольную ν-функцию $\mathbf{g} := (g_0, \ldots, g_{\nu-1}) \in \mathbf{O}_{\varphi,A}$. Нужно доказать, что $\mathbf{g}$ можно аппроксимировать ν-полиномами в топологии пространства $\mathbf{O}_{\varphi,A}$. Из определения пространства $\mathbf{O}_{\varphi,A}$ вытекает, что образ

$$\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g})(\lambda) := \lambda^{n_0} g_0(\lambda^q)\varphi(\lambda) + \ldots + \lambda^{n_{\nu-1}} g_{\nu-1}(\lambda^q)\varphi(\lambda)$$

принадлежит $P(\Omega)$. По теореме Рунге ν-полиномы $\mathbf{r}$ плотны в топологическом произведении $O(\mathbf{C})^\nu := O(\mathbf{C}) \times \cdots \times O(\mathbf{C})$. Отсюда следует, что функцию $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g})(\lambda)$ можно аппроксимировать в топологии $O(\mathbf{C})$ функциями вида

$$\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{r})(\lambda) := \lambda^{n_0} r_0(\lambda^q)\varphi(\lambda) + \ldots + \lambda^{n_{\nu-1}} r_{\nu-1}(\lambda^q)\varphi(\lambda),$$

где $\mathbf{r} := (r_0, \ldots, r_{\nu-1})$ – ν-полином. При этом функции $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{r})$ принадлежат замкнутой полиномиальной оболочке $I_{\varphi,A}$. По предложению 11 $I_{\varphi,A} = I_S \subseteq I'_S$. Следовательно, $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g}) \in P(\Omega) \cap I'_S$. По теореме 1 справедливо равенство $I_S = P(\Omega) \cap I'_S$, значит, $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g}) \in I_S$. Отсюда вытекает, что функцию $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{g})$ можно аппроксимировать в топологии пространства $P(\Omega)$ элементами вида $\mathbf{u}_{\varphi,A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ – ν-полином. Из непрерывности обратного отображения $\mathbf{u}_{\varphi,A}^{-1}$ вытекает, что $\mathbf{g}$ можно аппроксимировать ν-полиномами в топологии пространства $\mathbf{O}_{\varphi,A}$. Теорема доказана. $\square$

§5. Целые симметричные функции

5.1. Симметричные представления. Целая функция $f(z)$ называется *целой q-симметричной*, если она представляется в виде композиции $f(z) = g(z^q)$, где g – некоторая целая функция. В ходе доказательства основной аппроксимационной теоремы нам потребуются некоторые дополнительные сведения о целых q-симметричных функциях. Прежде всего, всякая целая функция $\psi(z)$ единственным образом представляется в комплексной плоскости в виде суммы

$$\psi(z) = \psi_0(z) + z\psi_1(z) + \cdots + z^{q-1}\psi_{q-1}(z), \tag{12}$$

где функции $\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{q-1}(z)$ являются целыми q-симметричными функциями. При этом справедливо представление

$$\psi_p(z) = \frac{\Delta_p(z)}{\Delta(z)},\ p \in \{0, \ldots, q-1\}, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta(z) :&= \begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^{q-1} \\ 1 & \omega_q z & \cdots & \omega_q^{q-1} z^{q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega_q^{q-1} z & \cdots & \omega_q^{(q-1)(q-1)} z^{q-1} \end{vmatrix} \\ &= z^{1+2+\cdots+q-1} \prod_{0 \leqslant l < m \leqslant q-1} (\omega_q^m - \omega_q^l),\end{aligned}$$

$\Delta_p(z) := \Delta_p(\psi(z), \psi(\omega_q z), \ldots, \psi(\omega_q^{q-1} z))$ – определитель, полученный заменой p-го столбца в определителе $\Delta(z)$ на столбец из $\psi(z), \psi(\omega_q z)$, $\ldots, \psi(\omega_q^{q-1} z)$ [14]. Представления типа (12) принято называть *q-симметричными представлениями* (*разложениями*) целых функций.

5.2. Коэффициенты симметричного представления. Соотношение (13) выражает коэффициенты симметричного разложения (12) через разлагаемую функцию $\psi(z)$. Рассмотрим еще один способ представления коэффициентов симметричного разложения (12).

Из представления (12) вытекает, что для любых $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ и $z \in \mathbf{C}$ выполняется равенство

$$z^{q-p}\psi(z) = \sum_{j=0}^{q-1} z^{q-p+j}\psi_j(z).$$

Значит, q-симметричные коэффициенты $\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{q-1}(z)$ представления (12) удовлетворяют системе из q тождеств на $\mathbf{C}$

$$\omega_q^{(q-p)k} z^{q-p} \psi(\omega^k z) = \sum_{j=0}^{q-1} \omega_q^{(q-p+j)k} z^{q-p+j} \psi_j(z),\ k \in \{0, \ldots, q-1\}.$$

Суммируя эти тождества по k, получаем

$$z^{q-p} \sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{(q-p)k} \psi(\omega_q^k z) = q z^q \psi_p(z).$$

Следовательно, для любых $z \in \mathbf{C}$ имеем

$$\psi_p(z) = \frac{1}{q z^p} \sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{(q-p)k} \psi(\omega_q^k z),\ p \in \{0, \ldots, q-1\}.$$

Если $p' \in \mathbf{Z}$ и $p' \equiv -p (\operatorname{mod} q)$, то для любого $k \in \{0, \ldots, q-1\}$ справедливы равенства $\omega_q^{(q-p)k} = \omega_q^{-pk} = \omega_q^{p'k}$. Отсюда вытекает, что для любого $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ справедливо представление

$$\psi_p(z) = \frac{1}{q z^p} \sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{p'k} \psi(\omega_q^k z),\ p' \in \mathbf{Z},\ p' \equiv -p (\operatorname{mod} q). \tag{14}$$

5.3. Независимость над кольцом симметричных многочленов. Говорят, что система многочленов $p_0, \ldots, p_{\nu-1} \in \mathbf{C}[z]$ *независима над кольцом q-симметричных многочленов* $\mathbf{C}[z^q]$, если выполняется импликация

$$c_0 p_0 + \cdots + c_{\nu-1} p_{\nu-1} = 0,\ c_0, \ldots, c_{\nu-1} \in \mathbf{C}[z^q] \Rightarrow c_0 = \cdots = c_{\nu-1} = 0.$$

Пусть $n_0, \ldots, n_{\nu-1} \in \mathbf{Z}_+,\ \nu \leqslant q,\ n'_0, \ldots, n'_{\nu-1}$ – система наименьших неотрицательных вычетов чисел $n_0, \ldots, n_{\nu-1}$ по модулю q соответственно. Имеет место простой критерий независимости системы одночленов $z^{n_0}, \ldots, z^{n_{\nu-1}}$ над кольцом q-симметричных многочленов $\mathbf{C}[z^q]$.

Предложение 13. *Система одночленов $z^{n_0}, \ldots, z^{n_{\nu-1}}$ независима над кольцом $\mathbf{C}[z^q]$ тогда и только тогда, когда система вычетов $n'_0, \ldots, n'_{\nu-1}$ состоит из попарно различных элементов.*

Доказательство. Из определения системы вычетов $n'_0, \ldots, n'_{\nu-1}$ вытекает, что найдутся такие целые неотрицательные $k_0, \ldots, k_{\nu-1}$, что $n_0 = k_0 q + n'_0, \ldots, n_{\nu-1} = k_{\nu-1} q + n'_{\nu-1}$. Предположим, что система одночленов $z^{n_0}, \ldots, z^{n_{\nu-1}}$ независима над кольцом $\mathbf{C}[z^q]$ и при этом

$n'_i = n'_j$, где $i \neq j$ и $i, j \in \{0, \ldots, \nu - 1\}$. Тогда имеет место тождество $c_i(z)z^{n_i} \equiv c_j(z)z^{n_j}$, где $c_i(z) := z^{k_j q}, c_j(z) := z^{k_i q} \in \mathbf{C}[z^q]$. Это тождество противоречит независимости системы одночленов $z^{n_0}, \ldots, z^{n_{\nu-1}}$ над кольцом $\mathbf{C}[z^q]$. Тем самым, необходимость условия доказана.

Докажем достаточность. Пусть система $n'_0, \ldots, n'_{\nu-1}$ состоит из попарно различных элементов. Если при некоторых $c_0(z), \ldots, c_{\nu-1}(z) \in \mathbf{C}[z^q]$ имеет место тождество $c_0(z)z^{n_0} + \cdots + c_{\nu-1}(z)z^{n_{\nu-1}} \equiv 0$, то имеет место следующее q-симметричное разложение нуля $0 \equiv c_0(z)z^{k_0 q}z^{n'_0} + \cdots + c_{\nu-1}(z)z^{k_{\nu-1}q}z^{n'_{\nu-1}}$. В силу (13) $c_0(z)z^{k_0 q} = 0, \ldots, c_{\nu-1}(z)z^{k_{\nu-1}q} = 0$, так как $\Delta_p(z) := \Delta_p(0, 0, \ldots, 0) = 0$ и

$$z^{-\frac{q(q-1)}{2}}\Delta(z) = \prod_{0 \leqslant l < m \leqslant q-1} (\omega_q^m - \omega_q^l) \neq 0,$$

то $c_0(z) = \cdots = c_{\nu-1}(z) = 0$ для любого $z \neq 0$. Из непрерывности многочленов вытекает, что $c_0 = \cdots = c_{\nu-1} = 0$. Это и доказывает независимость системы одночленов $z^{n_0}, \ldots, z^{n_{\nu-1}}$ над кольцом q-симметричных многочленов $\mathbf{C}[z^q]$. □

Предложение 14. *Если система одночленов $z^{n_0}, \ldots, z^{n_{\nu-1}}$ независима над кольцом $\mathbf{C}[z^q]$ и для некоторой целой функции $\psi(z)$ имеет место разложение*

$$\psi(z) = z^{n_0}\psi_0(z) + \cdots + z^{n_{\nu-1}}\psi_{\nu-1}(z),$$

где функции $\psi_0(z), \ldots, \psi_{\nu-1}(z)$ являются целыми q-симметричными, то для любого $p \in \{0, \ldots, \nu - 1\}$ имеет место представление

$$\psi_p(z) = \frac{1}{qz^{n_p}} \sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{p'k}\psi(\omega_q^k z),\ p' \in \mathbf{Z},\ p' \equiv -n_p (\operatorname{mod} q). \tag{15}$$

Доказательство. По предположению имеет место разложение $\psi(z) = z^{n_0}\psi_0(z) + \cdots + z^{n_{\nu-1}}\psi_{\nu-1}(z)$. Значит, имеет место представление $\psi(z) = \psi_0(z)z^{k_0 q}z^{n'_0} + \cdots + \psi_{\nu-1}(z)z^{k_{\nu-1}q}z^{n'_{\nu-1}}$, где функции $\psi_0(z)z^{k_0 q}, \ldots, \psi_{\nu-1}(z)z^{k_{\nu-1}q}$ являются целыми q-симметричными, $n'_0, \ldots, n'_{\nu-1}$ – система наименьших неотрицательных вычетов чисел $n_0, \ldots, n_{\nu-1}$ по модулю q соответственно, неотрицательные целые числа $k_0, \ldots, k_{\nu-1}$ определяются из условий $n_0 = k_0 q + n'_0, \ldots, n_{\nu-1} = k_{\nu-1}q + n'_{\nu-1}$. По предложению 13 совокупность $\{n'_0, \ldots, n'_{\nu-1}\} \subseteq \{0, \ldots, q - 1\}$ состоит из попарно различных элементов, значит, из (14) вытекает, что для любого $p \in \{0, \dots, \nu - 1\}$ имеет место представление

$$\psi_p(z) z^{k_p q} = \frac{1}{q z^{n'_p}} \sum_{k=0}^{q-1} \omega_q^{p'k} \psi(\omega_q^k z),\ p' \in \mathbf{Z},\ p' \equiv -n'_p (\operatorname{mod} q).$$

Из этого представления и вытекает представление (15), если учесть, что условие $p' \equiv -n'_p (\operatorname{mod} q)$ равносильно условию $p' \equiv -n_p (\operatorname{mod} q)$. $\square$

§6. Аппроксимационная теорема для однородного уравнения q-сторонней свертки

6.1. Аппроксимационная теорема. Пусть Ω – выпуклая область в комплексной плоскости, $\varphi \in P(\Omega)$, $S := L_{\Omega_0}^{-1}(\varphi) \in O^*(\Omega_0)$. По свойствам аналитических функционалов существуют такие $\varepsilon > 0$ и выпуклая область Ω_0, что $\varphi \in P(\Omega_0)$ и $\Omega_0 + U \subseteq \Omega$, где U – круг $\{z : |z| < \varepsilon\}$. Выберем произвольный приведенный набор комплексных чисел $a_0, \dots, a_{q-1}$ и рассмотрим однородное уравнение q-сторонней свертки (5). Теорема 2 сводит доказательство аппроксимационной теоремы для этого уравнения к доказательству плотности ν-полиномов в пространстве $\mathbf{O}_{\varphi,A}$. Воспользуемся этим фактом и направим дальнейшие усилия на доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Аппроксимационная теорема для однородного уравнения q-сторонней свертки справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и целой функции $\varphi \in P(\Omega)$ тогда и только тогда, когда оператор A является оператором симметризации.*

6.2. Необходимость. Предположим, что аппроксимационная теорема для уравнения (5) справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и целой функции φ. Нам необходимо доказать, что оператор A является оператором симметризации. В силу предложения 5 для этого достаточно показать, что индикатор n_A удовлетворяет условию периодичности: $n_1 - n_0 = n_2 - n_1 = \dots = n_\nu - n_{\nu-1}$, где $n_\nu := q$. Допустим, что это условие нарушено. Нужно показать, что это допущение приводит к противоречию.

Прежде всего, нарушение условия периодичности индикатора n_A влечет выполнение неравенств $q > 2$ и $\nu > 1$. При выполнении этих неравенств условие периодичности индикатора n_A равносильно условию: $n_1 - n_0 = n_2 - n_1 = \dots = n_\nu - n_{\nu-1} = n_{\nu+1} - n_\nu$, где $n_{\nu+1} := q + n_1$.

Но $n_1 - n_0 = n_{\nu+1} - n_\nu$, значит, при нарушении условия периодичности индикатора n_A существует такое $s \in \{0, \dots, \nu-1\}$, что $n_{s+1} - n_s < n_{s+2} - n_{s+1}$ или

$$2n_{s+1} - n_s < n_{s+2}. \tag{16}$$

Выберем произвольное $\theta \in (0, \frac{\pi}{q})$ и обозначим символом $G_{0,\theta}$ угловую область $\{z : |\arg z| < \theta\}$, а символом $G'_{0,\theta}$ обозначим угловую область $\{z : |\arg z - \frac{\pi}{q}| < \frac{\pi}{q} - \theta\}$. Пусть

$$\begin{aligned} G_{1,\theta} &:= \omega_q G_{0,\theta}, \dots, G_{q-1,\theta} := \omega_q^{q-1} G_{0,\theta}, \\ G'_{1,\theta} &:= \omega_q G'_{0,\theta}, \dots, G'_{q-1,\theta} := \omega_q^{q-1} G'_{0,\theta}, \\ G_\theta &:= G_{0,\theta} \cup \dots \cup G_{q-1,\theta}, \quad G'_\theta := G'_{0,\theta} \cup \dots \cup G'_{q-1,\theta}. \end{aligned}$$

Множества G_θ и G'_θ дополняют друг друга и имеют общую границу. По свойствам квазиполиномов [15] нули $z_m^{(k)}$ целой q-симметричной функции

$$e(z^q) := \sum_{k=0}^{q-1} \exp \omega_q^k z$$

имеют вид

$$z_m^{(k)} = \frac{2\pi m}{\omega_q^{k+1} - \omega_q^k} i + c_k + \delta_m^{(k)}, \ c_k \in \mathbf{C}, \ k \in \{0, \dots, q-1\},$$

где $|\delta_m^{(k)}| < e^{-\varepsilon_0 m}$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и всех достаточно больших m. Лучи

$$z = \frac{i}{\omega_q^{k+1} - \omega_q^k} t, \ t \geqslant 0, \ k \in \{0, \dots, q-1\}$$

являются серединными для угловых областей $G'_{0,\theta}, \ \dots, \ G'_{q-1,\theta}$. Значит, лишь конечное число нулей q-симметричного квазиполинома $e(z^q)$ лежит в дополнении открытого множества G'_θ. Следовательно, при надлежащем выборе q-симметричного полинома $p(z^q)$ все нули целой q-симметричной функции

$$A(z^q) := \frac{e(z^q)}{p(z^q)} = \frac{1}{p(z^q)} \sum_{k=0}^{q-1} \exp\{\omega_q^k z\}$$

будут лежать в множестве G'_θ, а все нули целой q-симметричной функции

$$B(z^q) := A(\omega_{2q}^q z^q) = \frac{1}{p(-z^q)} \sum_{k=0}^{q-1} \exp\{\omega_{2q}^{2k+1} z\},$$

будут лежать в множестве G_θ, где $\omega_{2q} := \exp \frac{\pi i}{q}$. Сопряженные диаграммы $\bar{D}_A$, $\bar{D}_B$ функций $A(z^q)$ и $B(z^q)$ совпадают с правильными q-угольниками с вершинами в точках

$$z_{0,A} := \omega_{2q}^0 = \omega_q^0,\ z_{1,A} := \omega_{2q}^2 = \omega_q^1, \ldots, z_{q-1,A} := \omega_{2q}^{2q-2} = \omega_q^{q-1},$$
$$z_{0,B} := \omega_{2q}^1,\ z_{1,B} := \omega_{2q}^3, \ldots, z_{q-1,B} := \omega_{2q}^{2q-1}$$

соответственно и связаны соотношением $\bar{D}_B = \omega_{2q}\bar{D}_A$. Пусть ζ – вершина правильного $2q$-угольника $\bar{D}_A \cap \bar{D}_B$, лежащая на пересечении двух прямых: первая из этих прямых проходит через точки $z_{0,A} := 1$, $z_{1,A} := \omega_q$ и задается уравнением $\operatorname{Re}\omega_{2q}^{-1}\zeta = \cos\frac{\pi}{q}$, а вторая прямая проходит через точки $z_{0,B} := \omega_{2q}$, $z_{q-1,B} := \omega_{2q}^{2q-1} = \bar{\omega}_{2q}$ и задается уравнением $\operatorname{Re}\zeta = \cos\frac{\pi}{q}$. Решая систему из этих двух уравнений, получаем $\zeta = \cos\frac{\pi}{q}\Big(1 + i\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\Big)$. Выберем $r \in (r', r'')$, где $r' := |\zeta + 1|$, $r'' := 2\cos\frac{\pi}{2q}$. Легко убедиться, что $r' < r''$ и такой выбор возможен. С другой стороны, при $q > 2$ выполняется неравенство $(r')^2 \geqslant 4\cos^4\frac{\pi}{2q} > 1$, значит, $r' > 1$. Отсюда вытекает, что сопряженные диаграммы $\bar{D}_A$ и $\bar{D}_B$ функций $A(z^q)$ и $B(z^q)$ соответственно лежат в круговой области $\Omega_r := \{z : |z| < r\}$. Значит, $A(z^q), B(z^q) \in P(\Omega_r)$. Сопряженная диаграмма $\bar{D}_{AB}$ произведения $A(z^q)B(z^q)$ совпадает с правильным $2q$-угольником. Так как $\Big|\omega_{2q}^k + \omega_{2q}^{k+1}\Big|^2 = 4\cos^2\frac{\pi}{2q} = (r'')^2 > r^2$, то вершины этого $2q$-угольника лежат вне области Ω_r. При этом по свойствам квазиполиномов вдоль лучей $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}\Big(\omega_{2q}^k + \omega_{2q}^{k+1}\Big)$, $k \in \{0, \ldots, 2q-1\}$, выполняются асимптотические оценки

$$A(z^q)B(z^q) > \exp\{r''\,|z| - o(1)\,|z|\},\ z \to \infty. \tag{17}$$

Положим

$$a(z^q) := \sum_{k=0}^{2q-1} \exp\left\{\omega_{2q}^k \zeta z\right\}, \quad \varphi(z) := A(z^q) + z^{n_{s+1}-n_s} B(z^q)$$

и рассмотрим целую функцию

$$F(z) := z^{n_{s+1}} a(z^q)\varphi(z) = z^{n_{s+1}} a(z^q)A(z^q) + z^{2n_{s+1}-n_s} a(z^q)B(z^q).$$

Сопряженная диаграмма функции $a(z^q)$ совпадает с $2q$-угольником $\bar D_A \cap \bar D_B$, а сопряженная диаграмма функции $\varphi(z)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\bar D_A \cup \bar D_B$, значит, сопряженная диаграмма $\bar D_F$ функции $F(z)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\big(\bar D_A \cap \bar D_B + \bar D_A\big) \cup \big(\bar D_A \cap \bar D_B + \bar D_B\big)$. Наибольшее отклонение от нуля точек из $\bar D_A \cap \bar D_B$ реализуется в точке ζ, значит, наибольшее отклонение от нуля точек из $\bar D_F$ реализуется в точке $\zeta + 1$. Отсюда вытекает, что $\bar D_F$ лежит в круге $|z| \leqslant r' := |\zeta + 1|$. Значит, целая функция $F(z)$ тоже принадлежит пространству $P(\Omega_r)$ и, следовательно, ν-функция

$$\mathbf{a}(z) := \begin{cases} (\underbrace{0, \dots, 0}_{s}, a(z), 0, \dots, 0), & \text{если } s < \nu - 1, \\ (za(z), 0, \dots, 0), & \text{если } s = \nu - 1, \end{cases}$$

принадлежит пространству $\mathbf{O}_{\varphi,A} := \mathbf{O}_{\varphi,A}(\Omega_r)$.

Предположим, что произвольное решение $f \in O(\Omega_r)$ однородного уравнения (5) можно аппроксимировать элементарными решениями этого уравнения в топологии пространства $O(\Omega_r)$. Тогда по теореме 2 существует обобщенная последовательность ν-полиномов $\mathbf{p}_\sigma(z) := (p_{\sigma,0}(z), \dots, p_{\sigma,\nu-1}(z))$, $\sigma \in \Sigma$, сходящаяся к ν-функции $\mathbf{a}(z)$ в топологии пространства $\mathbf{O}_{\varphi,A}$. Значит, обобщенная последовательность

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(z) &:= z^{n_A}\mathbf{p}_\sigma(z^q)\varphi(z) = (z^{n_0}p_{\sigma,0}(z^q) + \dots + z^{n_{\nu-1}}p_{\sigma,\nu-1}(z^q))\varphi(z) \\ &= (z^{n_0}p_{\sigma,0}(z^q) + \dots + z^{n_{\nu-1}}p_{\sigma,\nu-1}(z^q))(A(z^q) + z^{n_{s+1}-n_s}B(z^q)). \end{aligned}$$

сходится к функции $F(z)$ в топологии пространства $P(\Omega_r)$. При этом

$$p_\sigma(z) := z^{n_0}p_{\sigma,0}(z^q) + \dots + z^{n_{\nu-1}}p_{\sigma,\nu-1}(z^q) \to z^{n_{s+1}}a(z^q) \tag{18}$$

равномерно на компактах. Если $s < \nu - 1$, то в силу предложения 14 из сходимости (18) вытекает, что

$$p_{\sigma,s+1}(z^q) = \frac{1}{qz^{n_{s+1}}}\sum_{k=0}^{q-1}\omega_q^{-n_{s+1}k}p_\sigma(\omega_q^k z) \to a(z^q) \tag{19}$$

равномерно на компактах. Если $s = \nu - 1$, то по той же причине

$$p_{\sigma,0}(z^q) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}p_\sigma(\omega_q^k z) \to z^q a(z^q) \tag{20}$$

равномерно на компактах. Ниже мы покажем, что сходимости (19) и (20) невозможны.

Воспользуемся представлением

$$\Phi_\sigma(z) = z^{k_s} P_\sigma(z^q) B(z^q) + C_\sigma(z), \tag{21}$$

в котором

$$k_s := \begin{cases} 2n_{s+1} - n_s, & \text{если } s < \nu - 1, \\ n_{s+1} - n_s, & \text{если } s = \nu - 1; \end{cases}$$

$$P_\sigma(z^q) := \begin{cases} p_{\sigma,s+1}(z^q), & \text{если } s < \nu - 1, \\ p_{\sigma,0}(z^q), & \text{если } s = \nu - 1; \end{cases}$$

$C_\sigma(z)$ – конечная сумма целых функций вида $z^{m_1} p_{\sigma,m_1}(z^q) A(z^q) + z^{m_2+n_{s+1}-n_s} p_{\sigma,m_2}(z^q) B(z^q)$, где $m_1 \in n_A$,

$$m_2 \in n'_A := \begin{cases} n_A \setminus \{n_{s+1}\}, & \text{если } s < \nu - 1, \\ n_A \setminus \{n_0\}, & \text{если } s = \nu - 1. \end{cases}$$

Выберем $r_1 \in (r, r'')$ и рассмотрим множество $V := \{\psi \in P(\Omega_r) : |\psi(z)| \leqslant \exp r_1 |z|\}$. Это множество является окрестностью нуля в $P(\Omega_r)$ [16, §3]. При некотором $M \geqslant 1$ все $\Phi_\sigma(z)$ принадлежат MV, то есть для всех $\sigma \in \Sigma$ и всех $z \in \mathbf{C}$ будут выполняться неравенства

$$|\Phi_\sigma(z)| \leqslant M \exp r_1 |z| . \tag{22}$$

Выберем $r_2 \in (r_1, r'')$ и рассмотрим целую $2q$-симметричную функцию

$$D(z^{2q}) := \sum_{k=0}^{2q-1} \exp\left[(r_2 - r_1)\, \gamma \omega_{2q}^k z\right].$$

В силу (17) и (22) при некоторых $r_3 \in (0, r'' - r_2)$ и $M' > 0$ на границе ∂G_θ множества G_θ имеет место равномерная по $\sigma \in \Sigma$ оценка

$$\left| \frac{\Phi_\sigma(z) D(z^{2q})}{A(z^q) B(z^q)} \right| \leqslant M' \exp\left[-r_3 |z|\right]. \tag{23}$$

В силу (16) при $s < \nu - 1$ выполняются неравенства $k_s = 2n_{s+1} - n_s < n_{s+2} \leqslant q$, значит, $q - k_s - 1 \geqslant 0$. При $s = \nu - 1$ имеем $k_s = n_{s+1} - n_s = n_\nu - n_{\nu-1} = q - n_{\nu-1}$. Так как $\nu > 1$, то $n_{\nu-1} > 0$ и $k_s < q$, значит, и в этом случае выполняется неравенство $q - k_s - 1 \geqslant 0$. Отступим от границы множества G_θ и рассмотрим множество $G_{\theta'} := \{z : |\arg z| < \theta', |z| > 1\} \subseteq G_\theta$, где $\theta' \in (0, \theta)$. Выберем произвольную точку $z \in G_{\theta'}$ и проинтегрируем функцию

$$\frac{\Phi_\sigma(h) D(h^{2q}) h^{q-k_s-1}}{A(h^q) B(h^q)(h^q - z^q)}$$

по положительно ориентированной границе $(\partial G_\theta)_+$ множества G_θ. В силу представления (21) получим $I_\sigma(z) = I_{\sigma,1}(z) + I_{\sigma,2}(z)$, где

$$I_\sigma(z) := \int\limits_{(\partial G_\theta)_+} \frac{\Phi_\sigma(h) D(h^{2q}) h^{q-k_s-1}}{A(h^q) B(h^q)(h^q - z^q)}\, dh,$$

$$I_{\sigma,1}(z) := \int\limits_{(\partial G_\theta)_+} \frac{P_\sigma(h^q) D(h^{2q}) h^{q-1}}{A(h^q)(h^q - z^q)}\, dh,$$

$$I_{\sigma,2}(z) := \int\limits_{(\partial G_\theta)_+} \frac{C_\sigma(h) D(h^{2q}) h^{q-k_s-1}}{A(h^q) B(h^q)(h^q - z^q)}\, dh.$$

Из оценки (23) вытекает равномерная по $\sigma \in \Sigma$ и по $z \in G_{\theta'}$ оценка

$$|I_\sigma(z)| \leqslant \mathrm{const}. \tag{24}$$

При этом поскольку все нули целой функции $A(z^q)$ лежат в $G'_\theta = \mathbf{C} \setminus \bar{G}_\theta$, мы получаем

$$I_{\sigma,1}(z) = \frac{P_\sigma(z^q) D(z^{2q})}{A(z^q)} \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{h^{q-1}(h - \omega_q^k z)}{h^q - z^q} \right)\Bigg|_{h=\omega_q^k z}$$

$$= \frac{P_\sigma(z^q) D(z^{2q})}{A(z^q)} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\omega_q^{k(q-1)}}{\omega_q^{k(q-1)} + \cdots + \omega_q^{k(q-1)}} = \frac{P_\sigma(z^q) D(z^{2q})}{A(z^q)}.$$

Покажем далее, что интеграл $I_{\sigma,2}(z)$ равен нулю. Действительно,

$$I_{\sigma,2}(z) = \sum_{m_1 \in n_A} I'_{m_1}(z) + \sum_{m_2 \in n'_A} I''_{m_2}(z),$$

где

$$I'_{m_1}(z) = \int\limits_{(\partial G_\theta)_+} \frac{p_{\sigma,m_1}(h^q) D(h^{2q}) h^{m_1+q-k_s-1}}{B(h^q)(h^q - z^q)}\, dh$$

$$= -\int\limits_{(\partial G'_\theta)_+} \frac{p_{\sigma,m_1}(h^q) D(h^{2q}) h^{m_1+q-k_s-1}}{B(h^q)(h^q - z^q)}\, dh,$$

$$I''_{m_2}(z) := \int\limits_{(\partial G_\theta)_+} \frac{p_{\sigma,m_2}(h^q) D(h^{2q}) h^{m_2+n_{s+1}-n_s+q-k_s-1}}{A(h^q)(h^q - z^q)}\, dh.$$

Так как все нули целой функции $B(z^q)$ лежат в G_θ и $z \in G_{\theta'} \subseteq G_\theta$, то $I'_{m_1}(z) = 0$ для любого $m_1 \in n_A$. При этом все нули целой функции $A(z^q)$ лежат в $G'_\theta = \mathbf{C} \setminus \bar{G}_\theta$, значит,

$$\begin{aligned}
I''_{m_2}(z) &:= \sum_{k=0}^{q-1} \int\limits_{(\partial G_{k,\theta})_+} \frac{p_{\sigma,m_2}(h^q)D(h^{2q})h^{m_2+n_{s+1}-n_s+q-k_s-1}}{A(h^q)(h^q - z^q)}\, dh \\
&= \frac{p_{\sigma,m_2}(z^q)D(z^{2q})}{A(z^q)} \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{h^{m_2+n_{s+1}-n_s+q-k_s-1}(h - \omega_q^k z)}{(h^q - z^q)} \right)\Bigg|_{h=\omega_q^k z} \\
&= \frac{p_{\sigma,m_2}(z^q)D(z^{2q})}{A(z^q)} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\left(\omega_q^k z\right)^{m_2+n_{s+1}-n_s+q-k_s-1}}{\left(\omega_q^k z\right)^{q-1} + \cdots + \left(\omega_q^k z\right)^{q-1}} \\
&= \frac{p_{\sigma,m_2}(z^q)D(z^{2q})}{qA(z^q)} \sum_{k=0}^{q-1} \left(\omega_q^k z\right)^{m_2+n_{s+1}-n_s-k_s} = 0,
\end{aligned}$$

так как целое число $l_s := m_2 + n_{s+1} - n_s - k_s$ не делится на q для любого $m_2 \in n'_A$. Действительно, если $s < \nu - 1$, то $l_s = m_2 - n_{s+1} \neq 0$ и при этом $-q < -n_{s+1} \leqslant l_s \leqslant m_2 < q$. Если $s = \nu - 1$, то $l_s := m_2$ и при этом $0 = n_0 < l_s < q$. Далее, в силу (24) $\left|P_\sigma(z^q)D(z^{2q})\right| \leqslant \text{const} \left|A(z^q)\right|$ для любого $\sigma \in \Sigma$ и любого $z \in G_{\theta'}$. Значит, в силу (19) и (20) для предельных функций получаем:

$$\begin{aligned}
\left|a(z^q)D(z^{2q})\right| &\leqslant \text{const } \left|A(z^q)\right|, \; z \in G_{\theta'}, \; s < \nu - 1; \\
\left|z^q a(z^q)D(z^{2q})\right| &\leqslant \text{const } \left|A(z^q)\right|, \; z \in G_{\theta'}, \; s = \nu - 1.
\end{aligned}$$

Но эти неравенства не могут выполняться для всех $z \in G_{\theta'}$, если θ и θ' выбраны достаточно близко к $\frac{\pi}{q}$, так как рост функций $a(z^q)D(z^{2q})$ и $z^q a(z^q)D(z^{2q})$ на лучах $|\arg z| = \frac{\pi}{q}$ больше роста функции $A(z^q)$. Необходимость доказана.

6.3. Достаточность. Рассмотрим произвольное однородное уравнение q-сторонней свертки (5) с индикатором $n_A := \{n_0, \ldots, n_{\nu-1}\}$. Предположим, что оператор A является оператором симметризации. Нам нужно показать, что аппроксимационная теорема для однородного уравнения q-сторонней свертки справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и целой функции $\varphi \in P(\Omega)$. Зафиксируем произвольную выпуклую области Ω и целую функцию $\varphi \in P(\Omega)$. По предложению 11 дуальный аннулятор I_S подпространства $W_S \subseteq O(\Omega)$ решений однородного уравнения q-сторонней свертки совпадает с замкнутой $\mathbf{C}[z^q]$-оболочкой системы функций $\lambda^{n_0}\varphi(\lambda), \ldots, \lambda^{n_{\nu-1}}\varphi(\lambda)\}$ в пространстве $P(\Omega)$. В силу предложения 5 индикатор n_A оператора q-стороннего сдвига AT_h является периодичным. По предложению 4 $q = q_0\nu$ и индикатор n_A совпадает с множеством $\{q_0 j + n_0 : j \in \{0, \ldots, \nu-1\}\}$. Значит, дуальный аннулятор I_S совпадает с замкнутой $\mathbf{C}[z^q]$-оболочкой системы функций $\varphi_0(\lambda), \lambda^{q_0}\varphi_0(\lambda), \ldots, \lambda^{q_0(\nu-1)}\varphi_0(\lambda)$, где φ_0 – целая функция $\lambda^{n_0}\varphi(\lambda)$. Отсюда и из равенства $q = q_0\nu$ вытекает, что дуальный аннулятор I_S совпадает с замкнутой $\mathbf{C}[z^{q_0}]$-оболочкой $I_{\widehat{\varphi}_0}$ функции φ_0 в пространстве $P(\Omega)$, где $\widehat{\varphi}_0$ – дуальный функционал $L_\Omega^{-1}(\varphi_0) \in O^*(\Omega)$ по отношению к функции $\varphi_0 \in P(\Omega)$. Из равенства $I_S = I_{\widehat{\varphi}_0}$ очевидным образом вытекает равенство $W_S = W_{\widehat{\varphi}_0}$, где $W_{\widehat{\varphi}_0}$ – подпространство решений однородного уравнения q_0-сторонней свертки

$$\left\langle \widehat{\varphi}_0, \sum_{k=0}^{q_0-1} f\left(z + \omega_{q_0}^k h\right) \right\rangle = 0, \ f \in O(\Omega),$$

где $\omega_{q_0} := \exp \frac{2\pi i}{q_0}$. Такие уравнения уже исследованы ранее [4]. Известно, что аппроксимационная теорема для таких уравнений справедлива. Это означает, что подпространство $W_S = W_{\widehat{\varphi}_0} \subseteq O(\Omega)$ допускает экспоненциальный синтез. Таким образом, теорема 3 доказана.

Список литературы

1. В. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М. (1982).
2. А. Б. Шишкин, *Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **447** (2016), 129–170.
3. И. Ф. Красичков-Терновский, *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях.* — Мат. сб. **88**, No. 1 (1972), 3–30.
4. А. Б. Шишкин, *Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной.* — Матем. сб. **182**, No. 6 (1991), 828–848.
5. И. Ф. Красичков-Терновский, *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез.* — Матем. сб. **183**, No. 8 (1992), 23–46.
6. С. Г. Мерзляков, *Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования.* — Матем. заметки **33**, No. 5 (1983), 701–713.

7. А. А. Татаркин, А. Б. Шишкин, *Синтез в ядре оператора трехсторонней свертки*, Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Часть 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 193, ВИНИТИ РАН, М., 2021, 130–141.
8. Б. Н. Хабибуллин, *Два общих условия недопустимости спектрального синтеза для инвариантных подпространств голоморфных функций.* — Владикавк. матем. журн. **7**, No. 3 (2005), 71–78.
9. А. Б. Шишкин, *Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика **14**, No. 1 (2014), 47–65.
10. A. A. Tatarkin, U. S. Saranchuk, *Elementary solutions of a homogeneous q-sided convolution equation.* — Пробл. анал. Issues Anal., **7(25)**: спецвыпуск (2018), 137–152.
11. Ю. С. Саранчук, А. Б. Шишкин, *Общее элементарное решение однородного уравнения типа q-сторонней свертки.* — Алгебра и анализ, **34**, No. 4 (2022), 188–213.
12. А. Б. Шишкин, *Проективное и инъективное описания в комплексной области. Спектральный синтез и локальное описание аналитических функций*, Славянск-на-Кубани, Издательский центр ФГБОУ ВПО «КубГУ», (2013).
13. А. Б. Шишкин, *Односторонние схемы двойственности.* — Владикавказский математический журнал **22**, Выпуск 3 (2020), 124–150.
14. A. B. Shishkin, *Symmetric representations of holomorphic functions.* — Пробл. анал. Issues Anal., **7(25)**:2 (2018), 124–136.
15. А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М. (1976).
16. И. Ф. Красичков–Терновский, *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях.* — Мат. сб. **87(129)**, No. 4 (1972), 459–489.

Tatarkin A. A., Shishkin A. B. Exponential synthesis in the kernel of a q-sided convolution operator.

The traditional approach to the problem of exponential synthesis for the space of solutions of a homogeneous convolution-type equation in a convex domain assumes that this space is invariant under some differential operator. This assumption makes it possible to reduce the problem of exponential synthesis to the problem of spectral synthesis. Is this assumption due to the method used to solve the problem, or the invariance of the solution space is necessary for a positive answer to the problem of exponential synthesis? To resolve this question the article considers special equations of the convolution type – the equations with q-sided convolution. It is shown that for such equations the requirement that the space of solutions be invariant is necessary and cannot be omitted if we assume

that the solution space admits exponential synthesis with a free choice of the convex region and the characteristic function of the equation.

ул. Димитрова, 172, к. 117
350040 г. Краснодар, Россия
E-mail: Tiamatory@gmail.com

Поступило 1 октября 2022 г.

ул. Краснодарская, 119/7, к. 2
353560 г. Славянск-на-Кубани, Россия
E-mail: Shishkin-home@mail.ru