Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

Д. В. Руцкий

ОПИСАНИЕ BMO-РЕГУЛЯРНОСТИ СЛАБОГО ТИПА

BMO-регулярность слабого типа для пар квазибанаховых решёток измеримых функций на окружности была введена как некоторое естественное обобщение “обычной” BMO-регулярности. Это было сделано в связи с характеризацией K-замкнутости соответствующих пар пространств типа Харди на окружности (см. [7,12]) в терминах BMO-регулярности пар вещественных интерполяционных пространств $((X,Y)_{\alpha,p},(X,Y)_{\beta,q})$, $0<\alpha<\beta<1$. В настоящей заметке естественная характеризация этого свойства, аналогичная характеризации BMO-регулярности пары (X,Y) банаховых решёток в терминах BMO-регулярности одной решётки $X'Y$, обобщается на случай пар решёток измеримых функций на пространствах однородного типа, и даются эквивалентные предельные условия при $\alpha=0$.

§1. BMO-регулярность слабого типа

Мы начнём с краткой справки относительно пространств, в которых естественно вводить и рассматривать изучаемые свойства. Подробную основную информацию относительно них можно найти, например, в [8]. Насчёт вещественных интерполяционных пространств $(X,Y)_{\theta,p}$ см., например, [1]. В настоящем тексте, ввиду его несколько технического характера, мы ограничимся минимумом исторических и других подробностей, сосредотачиваясь на вопросе характеризации свойства BMO-регулярности слабого типа.

Ключевые слова: вещественная интерполяция, произведения Кальдерона–Лозановского, BMO-регулярность, максимальный оператор Харди–Литлвуда, пространства Лоренца.

Рассматриваются измеримые функции на измеримом пространстве $S \times \Omega$, где S – пространство однородного типа, такое как окружность $\mathbb{T}$, или евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а (Ω, μ) – это некторое σ-конечное измеримое пространство, играющее роль “области определения дополнительной переменной”. Квазинормированной решёткой измеримых функций на $S\times\Omega$ называется квазинормированное пространство X, являющееся порядковым идеалом в следующем смысле: условия $|f| \leqslant g$ и $g \in X$ влекут $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant \|g\|_X$. Для квазинормированных решёток измеримых функций X и Y их поточечное произведение $XY = \{fg \mid f \in X, g \in Y\}$ снабжается квазинормой $\|h\|_{XY} = \inf_{h=fg} \|f\|_X \|g\|_Y$. Степень решётки определяется так:

$$X^\delta = \bigl\{g \mid |g|^{1/\delta} \in X\bigr\}$$

с квазинормой $\|g\|_{X^\delta} = \||g|^{1/\delta}\|_X^\delta$. При этом по определению полагаем $X^0 = \mathrm{L}_\infty$. Для нормированных решёток измеримых функций X порядково сопряжённая решётка определяется формулой

$$X' = \Bigl\{g \mid \sup_{f\in B_X} \int |fg| < \infty\Bigr\}$$

с соответствующей нормой $\|g\|_{X'} = \sup_{f\in B_X} \int |fg|$, где через B_X обозначен замкнутый единичный шар пространства X. Для решёток X часто предполагается выполненным свойство Фату, которое означает, что множество B_X замкнуто относительно сходимости по мере на множествах конечной меры, и для нормированных решёток эквивалентно их порядковой рефлексивности $X'' = X$. Для банаховых решёток измеримых функций со свойством Фату справедлива формула Лозановского $X'X = \mathrm{L}_1$, а для сопряжённых пространств произведений Кальдерона–Лозановского справедливо соотношение $(X^{1-\theta}Y^\theta)' = X'^{1-\theta}Y'^\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Важно отметить, что для вещественных интерполяционных пространств между решётками измеримых функций имеется формула $(X,Y)_{\theta,p}^\delta = \bigl(X^\delta, Y^\delta\bigr)_{\theta,p/\delta}$ при всех $\delta > 0$. Её легко вывести из простого соотношения $(X+Y)^\delta = X^\delta + Y^\delta$.

Пусть задана совместимая пара квазибановых пространств (X, Y) и $0 < \theta < 1$. Пространство Z имеет тип $\mathcal{C}_\theta(X,Y)$, если $X \cap Y \subset Z \subset X + Y$ и с некоторыми константами c и C для всех $f \in X \cap Y$ выполнены оценки $\|f\|_Z \leqslant c\|f\|_X^{1-\theta}\|f\|_Y^\theta$ и включение $Z \subset (X,Y)_{\theta,\infty}$. Если все пространства r-выпуклы при некотором значении $r > 0$, то эти условия эквивалентны вложениям $(X,Y)_{\theta,r} \subset Z \subset (X,Y)_{\theta,\infty}$. Мы часто будем пользоваться теоремой реитерации (см., например, [1, теорема 3.5.2]), гласящей, что $(E,F)_{\eta,p} = (X,Y)_{(1-\eta)\alpha+\eta\beta,p}$, $(E,Y)_{\eta,p} = (X,Y)_{(1-\eta)\alpha+\eta,p}$ и $(X,F)_{\eta,p} = (X,Y)_{\eta\beta,p}$ при $0<\eta<1$ и $0<\alpha<\beta<1$, для произвольных пространств E и F типов $\mathcal{C}_\alpha(X,Y)$ и $\mathcal{C}_\beta(X,Y)$ соответственно.

Следующее свойство, названное BMO-регулярностью, было введено Н. Кальтоном для одной решётки в несколько более общем контексте в [4] в связи с характеризацией устойчивости комплексной интерполяции пространств типа Харди, и в дальнейшем довольно подробно исследовалось. Значительный интерес представляет также его связь с ограниченностью операторов гармонического анализа. См., например, работы [9], [11] и содержащиеся в них ссылки, а также предложение 15 в разделе 4. В доказательствах недавней работы [13] оказалось полезным рассматривать BMO-регулярность для вложений решёток и пар решёток. В настоящей статье BMO-регулярные вложения появляются уже в формулировке основного результата, предоставляя некоторую существенную дополнительную информацию, поэтому мы даём соответствующие определения сразу для вложений.

Определение 1. *Вложение $X_0 \subset X_1$ квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$ называется* BMO-*регулярным с константами (C,m), если для всякой ненулевой функции $f \in X_0$ найдётся некоторая мажоранта $u \in X_1$, $u \geqslant |f|$, такая, что $\|u\|_{X_1} \leqslant m\|f\|_{X_0}$ и $\|\log u(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ для почти всех $\omega \in \Omega$.*

Определение 2. *Квазинормированная решётка X измеримых функций на $S \times \Omega$ называется* BMO-*регулярной, если вложение $X \subset X$* BMO-*регулярно.*

Аналогичное свойство для пар решёток в некотором эквивалентном виде впервые вводилось и исследовалось в той же работе [4]. В терминах мажорант его определение было дано в [5].

Определение 3. *Вложение пар $(X_0,Y_0) \subset (X_1,Y_1)$ квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $S\times\Omega$ называется* BMO-*регулярным с константами (C,m), если для всех ненулевых функций $f \in X_0$ и $g \in Y_0$ найдутся некоторые мажоранты $u \geqslant |f|$ и $v \geqslant |g|$, такие, что $\|u\|_{X_1} \leqslant m\|f\|_{X_0}$, $\|v\|_{Y_1} \leqslant m\|g\|_{Y_0}$ и $\|\log{[u(\cdot,\omega)/v(\cdot,\omega)]}\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ при почти всех $\omega \in \Omega$.*

Определение 4. *Пара (X, Y) квазинормированных решёток измеримых функций на $S \times \Omega$ называется* BMO*-регулярной, если вложение $(X, Y) \subset (X, Y)$* BMO*-регулярно.*

При достаточно общих предположениях BMO-регулярность пары банаховых решёток (X, Y) эквивалетна BMO-регулярности решётки $X'Y$. Некоторая ослабленная версия этого утверждения для случая окружности $S = \mathbb{T}$ была получена С. В. Кисляковым в [6]. Результаты статьи [6] опирались на свойства K-замкнутости пространств типа Харди, однако там же, помимо прочего, была существенно развита техника вычислений с произведениями решёток, которая в дальнейшем оказалась весьма полезной. В общей ситуации эта эквивалентность была установлена в [10] и [11]. Для ясности мы сформулируем её в виде, близком к основной характеризации настоящей работы.

Теорема 5. *Пусть (X, Y) – пара квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$, обладающих свойством Фату, и r-выпуклых при некотором $r > 0$. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Пара $\left(X^{1-\alpha} Y^{\alpha}, X^{1-\beta} Y^{\beta}\right)$* BMO*-регулярна при некоторых (эквивалетно, при всех) $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.*
(ii) *Пара (X, Y)* BMO*-регулярна.*
(iii) *Решётка $(X^r)' Y^r$* BMO*-регулярна.*

Эквивалентность условий (ii) и (iii) установлена (с точностью до возведения в степень r) в [11, теорема 8] при помощи делимости BMO-регулярности (см. предложение 11 в разделе 3). Эквивалентность с формально более общим условием (i), которое мы выписали явно лишь для большей ясности основного результата, также сразу вытекает из делимости BMO-регулярности (см. предложение 11):

$$\left(X^{1-\alpha} Y^{\alpha}, X^{1-\beta} Y^{\beta}\right) = \left(F\, X^{\beta-\alpha}, F\, Y^{\beta-\alpha}\right),$$

где мы обозначили $F = X^{1-\beta} Y^{\alpha}$.

В условии (i) теоремы 5 фигурируют произведения Кальдерона–Лозановского $X^{1-\theta} Y^{\theta}$, которые в данной ситуации служат некоторым естественным обобщением комплексных интерполяционных пространств. В случае окружности они появились в более или менее явном виде уже в установленной в работе [4] характеризации устойчивости комплескной интерполяции пространств типа Харди. Оказалось (см. [7]), что если заменить в этом условии комплексные интерполяционные пространства на вещественные, то при довольно общих предположениях получается характеризация K-замкнутости и устойчивости вещественной интерполяции соответствующих пространств типа Харди. Этот довольно сложный результат естественным образом включает в себя и некоторый аналог эквивалентности условий (i) и (iii), который, однако, работает лишь в случае окружности, главным образом из-за того, что условие, соответствующее (i), получается из того же результата статьи [4] о характеризации устойчивости комплексной интерполяции в терминах BMO-регулярности. В настоящей работе мы покажем, что соответствующее свойство, названное (в виде условия (iii) в следующей теореме) BMO-регулярностью слабого типа, допускает аналогичную характеризацию и для общих пространств однородного типа, причём она, по существу, также сводится к делимости BMO-регулярности.

Теорема 6. *Пусть* (X, Y) *– пара квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве* $S \times \Omega$*, обладающих свойством Фату и* r*-выпуклых при некотором* $r > 0$*. Следующие утверждения эквивалентны.*

- (i) *Пара* $((X,Y)_{\alpha,p}, (X,Y)_{\beta,q})$ BMO-*регулярна при некоторых (эквивалентно, при всех)* $0 < \alpha < \beta < 1$ *и* $0 < p, q \leqslant \infty$.
- (i′) *Вложение* $((X,Y)_{\alpha,p}, (X,Y)_{\beta,q_0}) \subset ((X,Y)_{\alpha,p}, (X,Y)_{\beta,q_1})$ BMO-*регулярно при некоторых (эквивалентно, при всех)* $0 < \alpha < \beta < 1$ *и* $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q_0 \leqslant q_1 \leqslant \infty$.
- (i″) *Вложение* $(E, (X,Y)_{\beta,r}) \subset (E, (X,Y)_{\beta,\infty})$ BMO-*регулярно при некоторых (эквивалентно, при всех)* $0 < \alpha < \beta < 1$ *и для некоторых (эквивалетно, для всех) решёток измеримых функций* E *типа* $\mathcal{C}_\alpha(X,Y)$, r*-выпуклых и обладающих свойством Фату.*
- (ii) *Вложение* $(X, (X,Y)_{\theta,r}) \subset (X, (X,Y)_{\theta,\infty})$ BMO-*регулярно при некотором (эквивалентно, при всех)* $0 < \theta < 1$.
- (ii′) *Вложение* $(X^r)'(X^r, Y^r)_{\theta,r} \subset (X^r)'(X^r, Y^r)_{\theta,\infty}$ BMO-*регулярно при некотором (эквивалентно, при всех)* $0 < \theta < 1$.
- (iii) *Решётка* $(\mathrm{L}_1, (X^r)'Y^r)_{\theta,s}$ BMO-*регулярна при некоторых (эквивалентно, при всех) значениях* $0 < \theta < 1$ *и* $0 < s \leqslant \infty$.

Соответствующие условия (i) и (iii) теорем 5 и 6 аналогичны друг другу. Как уже отмечалось, в предыдущих работах условие (iii) принималось за определение BMO-регулярности слабого типа, что выглядит несколько искусственно. Теорема 6 позволяет эквивалентным образом брать в качестве определения более естественные условия (i) и (ii). С другой стороны, отметим, что сложно показать напрямую, что условие (i) теоремы 6 слабее BMO-регулярности, однако в смысле условия (iii) это сразу следует из того, что вещественное интерполяционное пространство пары BMO-регулярных пространств также BMO-регулярно (см. предложение 14 в разделе 3). Во всех рассуждениях настоящей статьи мы для простоты и во избежание путаницы по-прежнему будем называть BMO-регулярностью слабого типа именно условие (iii) при каких-то значениях θ и p, и пользоваться без подробных комментариев его основными свойствами, установленными в [7, §3].

Характеризация BMO-регулярности слабого типа в виде условия (iii) ранее вводилась и использовалась только для достаточно малых значений θ. Теорема 6, в частности, явно показывает, что соответствующие условия эквивалентны для всего диапазона показателей $0 < \theta < 1$.

Условие (ii) возникло при доказательстве достаточности BMO-регулярности слабого типа для K-замкнутости пространств типа Харди (см. [13, теорема 16]), однако представляет и самостоятельный интерес, поскольку распространяет условия (i$'$) и (i) на предельный случай $\alpha = 0$. Некоторые естественные примеры (см. раздел 4 ниже) показывают, что индекс r в условиях (i$''$), (ii) и (ii$'$), вообще говоря, нельзя заменить бо́льшим значением, а индекс ∞ – меньшим.

В доказательстве отмечено, что для пар, обладающих свойством BMO-регулярности слабого типа, условие (i) выполнено также и при $\alpha = \beta$. Однако простые примеры показывают, что в этом случае оно уже не достаточно ни при каких $p \neq q$. См. по этому поводу замечание в конце раздела 4.

Условие (i$'$) обобщает условие (i), но только наполовину. Любопытно, что в случае решёток на окружности и при некоторых дополнительных ограничениях эквивалентным условием также будет и BMO-регулярность вложения

$$((X,Y)_{\alpha,p_0},(X,Y)_{\beta,q_0}) \subset ((X,Y)_{\alpha,p_1},(X,Y)_{\beta,q_1}) \tag{1}$$

при $0 < p_0 \leqslant p_1 \leqslant \infty$ и $0 < q_0 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, поскольку оно по [13, предложение 19] влечёт K-замкнутость соответствующего вложения пространств типа Харди, которая по реитерации (см. [13, предложение 21]) даёт K-замкнутость в соответствующей паре из условия (i) с увеличенным α и уменьшенным β, а значит, и её BMO-регулярность по характеризации [7]. Ещё проще заметить, что по реитерации условие (1) сразу влечёт устойчивость вещественной интерполяции пространств типа Харди, что также эквивалентно BMO-регулярности слабого типа пары (X, Y). Осталось невыясненным, является ли условие (1) эквивалентным BMO-регулярности слабого типа в общей ситуации.

Даже в случае окружности теорема 6 несколько сильнее соответствующего результата из [7], опирающегося на K-замкнутость пространств типа Харди, поскольку последняя дополнительно требует так называемого условия $(*)$: в обеих решётках у всех функций должны быть мажоранты с суммируемым по первой переменной логарифмом при фиксированной второй переменной.

Отметим, что в случае, когда одно из пространств пары BMO-регулярно, характеризация принимает совсем простой вид.

Теорема 7. *Пусть в условиях теоремы* 6 *решётка* $X^{1-\eta}Y^{\eta}$ BMO-*регулярна при некотором* $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. *Тогда пара* (X, Y) *обладает* BMO-*регулярностью слабого типа тогда и только тогда, когда решётка* $(X, Y)_{\theta,p}$ BMO-*регулярна при некоторых* (*эквивалентно, при всех*) *значениях* $0 < \theta < 1$, $\theta \neq \eta$ *и* $0 < p \leqslant \infty$.

Доказательство теорем 6 и 7 приводится ниже в разделе 3.

§2. Произведение Кальдерона–Лозановского для вещественных интерполяционных пространств

Первая часть следующего результата обобщает и уточняет известный факт о связи между вещественной и комплексной интерполяцией (см., например, [1, теорема 4.7.1]) в случае решёток измеримых функций со свойством Фату и произведений Кальдерона–Лозановского вместо комплексных интерполяционных пространств. И хотя в основных теоремах настоящей работы без этого результата можно обойтись, он будет полезен в дальнейшем. Отметим, что во многих случаях без особых проблем можно пользоваться стандартными фактами о комплексных интерполяционных пространствах, работая только с решётками с порядково непрерывной нормой и избегая бесконечных показателей и случая $\alpha = \beta$. Также бывают полезны и некоторые более общие факты (см., например, [2]), однако оказывается, что в нашей ситуации можно полностью избежать собственно комплексной интерполяции и всех сопутствующих сложностей.

Теорема 8. *Предположим, что X и Y – пара квазибанаховых решёток измеримых функций на измеримом пространстве Ω, причём они обладают свойством Фату и r_0-выпуклы при некотором $r_0 > 0$. Пусть $0 < \alpha, \beta < 1$ и $0 < p, q \leqslant \infty$. Тогда имеет место формула*

$$(X,Y)^{1-\theta}_{\alpha,p}(X,Y)^{\theta}_{\beta,q} = (X,Y)_{\gamma,r} \tag{2}$$

при $0 < \theta < 1$, $\gamma = (1-\theta)\alpha + \theta\beta$ и $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$. Если решётки X и Y банаховы, то также имеет место формула

$$(X',Y')^{1/2}_{\alpha,p}(X,Y)^{1/2}_{\beta,q} = \Big(X^{1/2}Y'^{1/2},\ X'^{1/2}Y^{1/2}\Big)_{\frac{1}{2}(1+\beta-\alpha),r} \tag{3}$$

при том же значении r для $\theta = \frac{1}{2}$. Если $\beta > \alpha$, то пространство в (3) совпадает с решёткой $\big(\mathrm{L}_2, X'^{1/2}Y^{1/2}\big)_{\beta-\alpha,r}$, а при $\beta < \alpha$ оно совпадает с решёткой $\big(\mathrm{L}_2, X^{1/2}Y'^{1/2}\big)_{\alpha-\beta,r}$.

Соотношения (3) возникли в связи с естественным подходом к доказательству эквивалентности между условиями (i) и (iii) теоремы 6. Было бы интересно выяснить, что получается при $\theta \neq \frac{1}{2}$. Также было бы любопытно исследовать обобщения этого результата на некоторые пары банаховых пространств, наподобие результатов статьи [3].

Приступим к доказательству теоремы 8. Возводя обе части формулы (2) в степень $1/r_0$, можно считать, что решётки X и Y банаховы. Далее, для обеих соотношений (2) и (3) достаточно проверить включение слева направо, поскольку обратное включение получается из него же по двойственности с заменой X на X', Y на Y' и всех показателей p, q, r на их сопряжённые. При этом мы пользуемся общей формулой двойственности для вещественных интерполяционных пространств решёток измеримых функций (см. замечания после предложения 10 в [13]). Таким образом, для проверки формулы (2) достаточно доказать включение

$$(X^{1-\theta}, Y^{1-\theta})_{\alpha,p/(1-\theta)}(X^{\theta}, Y^{\theta})_{\beta,q/\theta} \subset (X,Y)_{\gamma,r}. \tag{4}$$

Возьмём произвольную функцию h из его левой части с нормой $1/2$. У неё есть некоторая факторизация в произведение функций $h = h_0h_1$, таких, что

$$\|h_0\|_{(X^{1-\theta},Y^{1-\theta})_{\alpha,p/(1-\theta)}} \leqslant 1, \quad \|h_1\|_{(X^{\theta},Y^{\theta})_{\beta,q/\theta}} \leqslant 1.$$

Если ввести для $s, t > 0$ обозначения

$$a(s) = 2s^{-\alpha}K(s, h_0; X, Y), \quad b(t) = 2t^{-\beta}K(t, h_1; X, Y),$$

последние оценки имеют вид

$$\left(\int_0^{\infty} [a\,(v)]^{p/(1-\theta)}\ \frac{\mathrm{d}v}{v}\right)^{(1-\theta)/p} \leqslant 2, \quad \left(\int_0^{\infty} [b\,(v)]^{q/\theta}\ \frac{\mathrm{d}v}{v}\right)^{\theta/q} \leqslant 2$$

с естественными модификациями при бесконечных показателях. Найдутся разложения $h_0 = f_0 + g_0$ и $h_1 = f_1 + g_1$, удовлетворяющие оценкам

$$\|f_0\|_{X^{1-\theta}} \leqslant a(s)\, s^{\alpha}, \quad \|g_0\|_{Y^{1-\theta}} \leqslant a(s)\, s^{\alpha-1},$$

$$\|f_1\|_{X^{\theta}} \leqslant b(t)\ t^{\beta}, \quad \|g_1\|_{Y^{\theta}} \leqslant b(t)\ t^{\beta-1}.$$

Из соотношений $X = X^{1-\theta}X^{\theta}$ и $Y = Y^{1-\theta}Y^{\theta}$ получаются оценки

$$\|f_0 g_0\|_X \leqslant a(s)\, b(t)\, s^{\alpha}t^{\beta}, \quad \|f_1 g_1\|_Y \leqslant a(s)\, b(t)\, s^{\alpha-1}t^{\beta-1}. \tag{5}$$

Для произвольного $u > 0$ положим $s = u^{1-\theta}$ и $t = u^{\theta}$, тогда для величин в правых частях неравенств (5) имеем $s^{\alpha}t^{\beta} = u^{\gamma}$ и $s^{\alpha-1}t^{\beta-1} = u^{\gamma-1}$. Из неравенства Юнга сразу следует хорошо известное вложение $X^{1-\theta}Y^{\theta} \subset (X, Y)_{\theta,\infty}$, которое для всякого значения $s_2 > 0$ даёт разложение $f_0 g_1 = f_2 + g_2$ с оценками

$$\|f_2\|_X \leqslant ca(s)\, b(t)\, s^{\alpha}t^{\beta-1}s_2^{\theta}, \quad \|g_2\|_Y \leqslant ca(s)\, b(t)\, s^{\alpha}t^{\beta-1}s_2^{\theta-1}$$

для подходящей константы c. В этом разложении с точностью до константы получаются такие же оценки, как и в (5), если выбрать $s_2 = u = t^{1/\theta} = s^{1/(1-\theta)}$. Аналогично найдётся разложение $f_1 g_0 = f_3 + g_3$ с такими же оценками. Собирая всё вместе, получаем разложение $h = f_4 + g_4$, $f_4 = f_0 g_0 + f_2 + f_3$, $g_4 = f_1 g_1 + g_2 + g_3$, причём

$$\|f_4\|_X \leqslant c_1 a\left(u^{1-\theta}\right)\, b\left(u^{\theta}\right)\, u^{\gamma}, \quad \|g_4\|_Y \leqslant c_1 a\left(u^{1-\theta}\right)\, b\left(u^{\theta}\right)\, u^{\gamma-1}$$

с подходящей константой c_1. Теперь для оценки нормы функции h в правой части (4) остаётся лишь воспользоваться неравенством Гёльдера:

$$\left(\int_0^\infty \left[u^{-\gamma}K(u,h;X,Y)\right]^r \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/r} \leqslant c_1 \left(\int_0^\infty \left[a\left(u^{1-\theta}\right)b\left(u^\theta\right)\right]^r \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/r}$$
$$\leqslant c_1 \left(\int_0^\infty \left[a\left(u^{1-\theta}\right)\right]^{p/(1-\theta)} \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{(1-\theta)/p} \left(\int_0^\infty \left[b\left(u^\theta\right)\right]^{q/\theta} \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{\theta/q}$$
$$\leqslant c_2 \left(\int_0^\infty \left[a\left(v\right)\right]^{p/(1-\theta)} \frac{\mathrm{d}v}{v}\right)^{(1-\theta)/p} \left(\int_0^\infty \left[b\left(v\right)\right]^{q/\theta} \frac{\mathrm{d}v}{v}\right)^{\theta/q} \leqslant 4\,c_2$$

с подходящей константой c_2, которая возникает после степенной замены переменной интегрирования.

Доказательство соотношения (3) проводится аналогичным образом. Произвольная функция h из его левой части с нормой $1/2$ допускает факторизацию в произведение функций $h = h_0h_1$ с оценками

$$\|h_0\|_{(X'^{1/2},Y'^{1/2})_{\alpha,2p}} \leqslant 1, \quad \|h_1\|_{(X^{1/2},Y^{1/2})_{\beta,2q}} \leqslant 1.$$

Обозначаем при $s,t>0$

$$a(s) = 2s^{-\alpha}K(s,h_0;X',Y'), \quad b(t) = 2t^{-\beta}K(t,h_1;X,Y),$$

и берём соответствующие разложения $h_0 = f_0+g_0$ и $h_1 = f_1+g_1$, такие, что

$$\|f_0\|_{X'^{1/2}} \leqslant a(s)\,s^\alpha, \quad \|g_0\|_{Y'^{1/2}} \leqslant a(s)\,s^{\alpha-1},$$
$$\|f_1\|_{X^{1/2}} \leqslant b(t)\;t^\beta, \quad \|g_1\|_{Y^{1/2}} \leqslant b(t)\;t^{\beta-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|f_1g_0\|_{X^{1/2}Y'^{1/2}} &\leqslant a(s)\,b(t)\,s^{\alpha-1}t^\beta,\\ \|f_0g_1\|_{X'^{1/2}Y^{1/2}} &\leqslant a(s)\,b(t)\,s^\alpha t^{\beta-1}.\end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим для удобства $\gamma = \frac{1}{2}(1+\beta-\alpha)$ и положим $s = u^{-1/2}$, $t = u^{1/2}$ при $u>0$. Это даёт $s^{\alpha-1}t^\beta = u^\gamma$ и $s^\alpha t^{\beta-1} = u^{\gamma-1}$. С учётом тождества Лозановского $X'X = Y'Y = \mathrm{L}_1$ получаем оценку

$$\|f_0f_1 + g_0g_1\|_{\mathrm{L}_2} \leqslant a(s)\,b(t)\,\left(s^\alpha t^\beta + s^{\alpha-1}t^{\beta-1}\right) = 2a(s)\,b(t)\,u^{\gamma-\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, по той же формуле Лозановского также имеем

$$\mathrm{L}_2 = \left(X^{1/2}Y'^{1/2}\right)^{1/2}\left(X'^{1/2}Y^{1/2}\right)^{1/2} \subset \left(X^{1/2}Y'^{1/2}, X'^{1/2}Y^{1/2}\right)_{1/2,\infty},$$

что для всякого $s_1 > 0$ даёт разложение $f_0 f_1 + g_0 g_1 = f_2 + g_2$ с оценками

$$\|f_2\|_{X^{1/2}Y'^{1/2}} \leqslant c_1 a(s)\, b(t)\, u^{\gamma-\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}}, \quad \|g_2\|_{X'^{1/2}Y^{1/2}} \leqslant c_1 a(s)\, b(t)\, u^{\gamma-\frac{1}{2}} s_1^{-\frac{1}{2}}$$

с подходящей константой c_1. Полагая $s_1 = u$, получаем оценки такого же вида, что и в (6). Таким образом, для разложения $h = f_3 + g_3$, $f_3 = f_1 g_0 + f_2$, $g_3 = f_0 g_1 + g_2$ имеют место оценки

$$\begin{aligned}
&\|f_3\|_{X^{1/2}Y'^{1/2}} \leqslant c_2 a(u^{-1/2})\, b(u^{1/2})\, u^{\gamma},\\
&\|g_3\|_{X'^{1/2}Y^{1/2}} \leqslant c_2 a(u^{-1/2})\, b(u^{1/2})\, u^{\gamma-1},\\
&u^{-\gamma} K\left(u, h; X^{1/2}Y'^{1/2}, X'^{1/2}Y^{1/2}\right) \leqslant c_2 a(u^{-1/2})\, b(u^{1/2})
\end{aligned}$$

с подходящей константой c_2, и оценка нормы функции h в правой части (3) получается из неравенства Гёльдера так же, как и в предыдущем утверждении. Наконец, последнее утверждение теоремы получается из реитерации и формулы $(Z', Z)_{1/2,2} = \mathrm{L}_2$ (см. [13, предложение 11] и замечания перед ним), поскольку при $\beta > \alpha$

$$\begin{aligned}
&\left(X^{1/2}Y'^{1/2}, X'^{1/2}Y^{1/2}\right)_{\frac{1}{2}(1+\beta-\alpha),r}\\
&= \left(\left(X^{1/2}Y'^{1/2}, X'^{1/2}Y^{1/2}\right)_{1/2,2}, X'^{1/2}Y^{1/2}\right)_{\beta-\alpha,r} = \left(\mathrm{L}_2, X'^{1/2}Y^{1/2}\right)_{\beta-\alpha,r},
\end{aligned}$$

и аналогично при $\beta < \alpha$.

Полезным следствием формулы (3) является следующее утверждение.

Предложение 9. *Предположим, что (X, Y) – пара банаховых решёток измеримых функций на Ω со свойством Фату, и пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Если банаховы решётки измеримых функций E и F имеют тип $\mathcal{C}_\alpha(X, Y)$ и $\mathcal{C}_\beta(X, Y)$ соответственно, то решётка $E'F$ имеет тип $\mathcal{C}_{\beta-\alpha}(\mathrm{L}_1, X'Y)$.*

Действительно, возводя соотношения (3) в степень 2 при $p = q = r = 1$ и при $p = q = r = \infty$, имеем

$$\begin{aligned}
(\mathrm{L}_1, X'Y)_{\beta-\alpha,\frac{1}{2}} &= (X', Y')_{\alpha,1}(X, Y)_{\beta,1}\\
&= \left[(X, Y)_{\alpha,\infty}\right]' (X, Y)_{\beta,1} \subset E'F \subset \left[(X, Y)_{\alpha,1}\right]' (X, Y)_{\beta,\infty}\\
&= (X', Y')_{\alpha,\infty}(X, Y)_{\beta,\infty} = (\mathrm{L}_1, X'Y)_{\beta-\alpha,\infty}\,.
\end{aligned}$$

§3. Доказательство основного результата

Простым следствием предложения 9 и реитерации является следующее утверждение, которое в симметричном виде уже появлялось в основном результате статьи [7]; см. теорему 2.7, (vii). При этом оно выражает важное свойство, которым обычная BMO-регулярность не обладает: если для заданной пары подходящих решёток (X, Y) какая-то одна подходящая пара промежуточных пространств (E, F) обладает BMO-регулярностью слабого типа, то все такие пары и исходная пара (X, Y) также обладают BMO-регулярностью слабого типа.

Теорема 10. *Предположим, что* (X, Y) *– пара квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве* $S \times \Omega$, *обладающих свойством Фату и* r*-выпуклых при некотором* $r > 0$. *Пусть* $0 < \alpha < \beta < 1$, E *и* F *являются* r*-выпуклыми квазибанаховыми решётками измеримых функций со свойством Фату типов* $\mathcal{C}_\alpha(X, Y)$ *и* $\mathcal{C}_\beta(X, Y)$ *соответственно. Следующие пары могут обладать* BMO*-регулярностью слабого типа лишь одновременно:* (X, Y), (X, F), (E, Y), (E, F).

Возводя все решётки в степень r, можно считать, что они банаховы. BMO-регулярности слабого типа решёток (X, Y) и (E, F) соответствует BMO-регулярность одних и тех же пространств $(\mathrm{L}_1, E'F)_{\theta,p} = (\mathrm{L}_1, X'Y)_{\theta(\beta-\alpha),p}$ при достаточно малых значениях $0 < \theta < 1$. Далее, пусть $E_1 = (E, F)_{\alpha_1,p}$ и $F_1 = (E, F)_{\beta_1,p}$ для каких-то $0 < \alpha_1 < \beta_1 < 1$. Эти решётки имеют типы $\mathcal{C}_{\alpha_2}(X, Y)$ и $\mathcal{C}_{\beta_2}(X, Y)$ соответственно при некоторых значениях $0 < \alpha_2 < \beta_2 < 1$, и по доказанному пара (E_1, F_1) обладает BMO-регулярностью слабого типа лишь одновременно с парой (X, Y). С другой стороны, решётки E_1 и F_1 имеют аналогичные типы в парах (X, F) и (E, Y), поэтому BMO-регулярность слабого типа для этих пар также эквивалентна BMO-регулярности слабого типа для пары (X, Y).

Нам понадобится следующее обобщение известной теоремы о делимости BMO-регулярных вложений; см. замечания перед [13, предложение 20].

Предложение 11. *Пусть* X_0, Y_0, X_1, Y_1, E, F *– квазинормированные решётки измеримых функций на* $S \times \Omega$, r*-выпуклые при некотором* $r > 0$ *и обладающие свойством Фату, причём пара* (E, F) BMO*-регулярна. Если вложение* $(X_0E, Y_0F) \subset (X_1E, Y_1F)$ BMO*-регулярно, то вложение* $(X_0, Y_0) \subset (X_1, Y_1)$ *также* BMO*-регулярно.*

Легко распространить на вложения известный результат о том, что если пара решёток ВМО-регулярна и при этом одна из решёток ВМО-регулярна, то и вторая решётка также ВМО-регулярна (см. [6, лемма 1] и [11, предложение 26]).

Предложение 12. *Пусть X, Y_0 и Y_1 – квазинормированные решётки измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$, обладающие свойством Фату и r-выпуклые при некотором $r > 0$. Если решётка X и вложение $(X, Y_0) \subset (X, Y_1)$* ВМО*-регулярны, то вложение $Y_0 \subset Y_1$ также* ВМО*-регулярно.*

Действительно, применением предложения 11 при $X_0 = X_1 = F = \mathrm{L}_\infty$ и $E = X$ условие предложения 12 сводится к простому случаю $X = \mathrm{L}_\infty$.

Следующее предложение сразу же следует из легко проверяемых соотношений $EX \cap EY = E(X \cap Y)$ и $E(X, Y)_{\theta,\infty} \subset (EX, EY)_{\theta,\infty}$.

Предложение 13. *Пусть X, Y, Z и E – квазинормированные решётки измеримых функций на измеримом пространстве Ω. Если решётка Z является пространством типа $\mathcal{C}_\theta(X, Y)$, $0 < \theta < 1$, то решётка EZ является пространством типа $\mathcal{C}_\theta(EX, EY)$.*

По поводу следующего утверждения см. замечания перед [13, предложение 8].

Предложение 14. *Если квазинормированные решётки X_0, X_1, Y_0 и Y_1 измеримых функций на $S \times \Omega$ таковы, что вложения $X_0 \subset X_1$ и $Y_0 \subset Y_1$* ВМО*-регулярны, то вложение $(X_0, Y_0)_{\eta,q} \subset (X_1, Y_1)_{\eta,q}$ также* ВМО*-регулярно при всех $0 < \theta < 1$ и $0 < q \leqslant \infty$.*

Теперь всё готово для доказательства основных результатов. Проверим сначала эквивалентность условий теоремы 6 без соответствующих пунктов в скобочках. Возводя все условия в достаточно малую степень, можно считать, что $r = 1$, все решётки банаховы, и все встречающиеся в формулировках показатели интерполяционных пространств не меньше 1.

Пусть выполнено условие (iii) при каких-то значениях θ и s, и пусть даны значения $0 < \alpha < \beta < 1$ и $0 < p, q \leqslant \infty$. По доказательству предложения 3.5 в [7], заменяя пару (X, Y) на $\left(X^\delta, Y^\delta\right)$ при достаточно малом $\delta > 0$, можно считать, что решётка $\left(\mathrm{L}_1, (X^\delta)' Y^\delta\right)_{\theta, s_1/2}$ ВМО-регулярна при $\theta = \beta - \alpha$ и $1/s_1 = (1-\theta)/(p/\delta)' + \theta/(q/\delta)$. По теореме 8 эта решётка равна произведению

$$\left((X^\delta)', (Y^\delta)'\right)_{\alpha,(p/\delta)'} \left(X^\delta, Y^\delta\right)_{\beta,q/\delta} = \left(X^\delta, Y^\delta\right)'_{\alpha,p/\delta} \left(X^\delta, Y^\delta\right)_{\beta,q/\delta}.$$

Отсюда по теореме 5 получаем условие (i) теоремы 6 в степени δ, что доказывает переход (iii) $\Rightarrow$ (i) для всех значений параметров. Более того, из самодвойственности BMO-регулярности слабого типа, формулы $(Z', Z)_{1/2,2} = \mathrm{L}_2$ и теоремы реитерации видно, что условие (iii) влечёт BMO-регулярность решёток $\left((X^\delta)^{1/2}(Y^\delta)'^{1/2}, (X^\delta)'^{1/2}(Y^\delta)^{1/2}\right)_{\eta,s_1}$ как при $\eta = \frac{1}{2}(1+\theta)$, так и при $\eta = \frac{1}{2}(1-\theta)$, что по предложению 14 и теореме реитерации влечёт BMO-регулярность решётки

$$\left((X^\delta)^{1/2}(Y^\delta)'^{1/2}, (X^\delta)'^{1/2}(Y^\delta)^{1/2}\right)_{1/2,s_1},$$

а это даёт условие (i) также и при $\alpha = \beta$.

Переходы (i) $\Rightarrow$ (i$'$) $\Rightarrow$ (i$''$) тривиальны, причём при полной выполненности условия (iii) можно брать в них произвольные значения $0 < \alpha < \beta = \theta < 1$ и $0 < p \leqslant \infty$.

Умножая вложение в условии (ii) на решётку X', получаем BMO-регулярность вложения $(\mathrm{L}_1, X'(X,Y)_{\theta,1}) \subset (\mathrm{L}_1, X'(X,Y)_{\theta,\infty})$, что по предложению 12 с учётом BMO-регулярности решётки L_1 влечёт BMO-регулярность вложения $X'(X,Y)_{\theta,1} \subset X'(X,Y)_{\theta,\infty}$, то есть условие (ii$'$). Из предложения 13 и теоремы Лозановского следует, что обе эти решётки имеют тип $\mathcal{C}_\theta(\mathrm{L}_1, X'Y)$. Применяя предложение 14 к этому вложению и BMO-регулярному вложению $\mathrm{L}_1 \subset \mathrm{L}_1$, по теореме реитерации получаем BMO-регулярность решёток $(\mathrm{L}_1, X'Y)_{\alpha,p}$ при всех значениях $0 < \alpha < \theta$ и $0 < p \leqslant \infty$, что доказывает переход (ii$'$)$\Rightarrow$ (iii) с произвольно малым уменьшением значения θ. Обратный переход (iii) $\Rightarrow$ (ii), также с произвольно малым уменьшением значения θ, был установлен при доказательстве теоремы 16 в [13].

Заметим теперь, что условие (i$''$) с учётом реитерации $(X,Y)_{\beta,q} = (E,Y)_{\beta_1,q}$, $\theta_1 = (\theta-\alpha)/(1-\alpha)$ является условием (ii) для пары (E,Y) вместо (X,Y) и с параметром θ_1, который при достаточно малых значениях α может быть сколь угодно близок к значению β в условии (i$''$). Поэтому для пары (E,Y) также выполнено условие (iii) с любым параметром $0 < \theta_2 < \theta_1$. По теореме 10 тогда и для пары (X,Y) выполнено условие (iii), причём из соответствующего рассуждения видно, что снижение параметра θ снова можно сделать произвольно малым при достаточно малых значениях α. Таким образом, мы получили переход от условия (i$''$) к условию (iii) с какими-то параметрами, а применение уже доказанного перехода (iii)$\Rightarrow$ (i) позволяет сделать эти параметры произвольными, что доказывает переход (i$''$)$\Rightarrow$ (iii). Наконец, произвольность решётки E в условии (i$'$) следует из теоремы 10 и условия (ii) для пары (E, Y) вместо (X, Y). Теорема 6 доказана.

Теорема 7 легко следует из остальных результатов: предложение 10 и теорема реитерации позволяют свести всё к случаю $\eta = 0$, то есть к ВМО-регулярности решётки X, а условие (ii) теоремы 6 по предложениям 14 и 12 эквивалентно ВМО-регулярности решёток $(X, Y)_{\theta,p}$.

§4. Точность условий с вложениями

Рассматривая пространства Лоренца с переменными индексами, нетрудно показать, что параметры в условиях (i$'$), (ii) и (ii$'$) теоремы 6 в общей ситуации не могут быть улучшены. Сначала отметим естественное обобщение на вложения характеризации ВМО-регулярности в терминах ограниченности максимального оператора Харди–Литлвуда (см., например, [11, теорема 1]).

Предложение 15. *Пусть X_0 и X_1 – банаховы решётки измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$ со свойством Фату, и $0 < \delta < 1$. Вложение $X_0 \subset X_1$ ВМО-регулярно тогда и только тогда, когда максимальный оператор, действующий по первой переменной, ограничен как оператор из $\left(\mathrm{L}_1^{1-\theta} X_0^{\theta}\right)^{\delta}$ в $\left(\mathrm{L}_1^{1-\theta} X_1^{\theta}\right)^{\delta}$ при некотором значении $0 < \theta < 1$ (эквивалентно, при всех достаточно малых значениях θ).*

Необходимость этого условия сводится к ограниченности максимального оператора в пространствах Лебега с весами Макенхаупта так же, как и в случае одной решётки. Для проверки его достаточности заметим, что, как хорошо известно, $\log(Mf) \in \mathrm{BMO}$, если функция Mf почти всюду конечна, поэтому функции Mf будут подходящими мажорантами для функций f, и вложение $\left(\mathrm{L}_1^{1-\theta} X_0^{\theta}\right)^{\delta} \subset \left(\mathrm{L}_1^{1-\theta} X_1^{\theta}\right)^{\delta}$ ВМО-регулярно. Остаётся только возвести его в степень $1/\delta$ и воспользоваться соответствующим обобщением делимости ВМО-регулярности на вложения (например, как частный случай предложения 11 при $X_1 = Y_1 = F = \mathrm{L}_\infty$).

Пространства Лоренца определяются эквивалентным образом как

$$\mathrm{L}_{p,q} = (\mathrm{L}_{p_0}, \mathrm{L}_{p_1})_{\theta,q}\,, \quad 0 < p < \infty, 0 < q \leqslant \infty, \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, 0 < \theta < 1.$$

Для заданных непересекающихся подмножеств $E_0, E_1 \subset \mathbb{T}$ и решёток измеримых функций Y_0 и Y_1 можно задавать составные решётки $Y = \chi_{E_0} Y_0 + \chi_{E_1} Y_1$ как соответствующие прямые суммы. Наш пример опирается на следующее естественное обобщение замечания в конце [7, §2]: если I_0 и I_1 – прилегающие друг к другу дуги, $I = I_0 \cup I_1$, а перестановочно инвариантные решётки X_0 и Y_1 таковы, что $Y_0 \subsetneqq X_1$ или $Y_1 \subsetneqq X_0$, то вложение $X \subset Y$ решёток, таких, что $\chi_I X = \chi_{I_0} X_0 + \chi_{I_1} X_1$ и $\chi_I Y = \chi_{I_0} Y_0 + \chi_{I_1} Y_1$, не является BMO-регулярным. Проверяется это таким же сведением к предложению 15, как и упомянутый результат.

Рассмотрим теперь условие (ii$'$) теоремы 6 при $r = 1$ для таких решёток, составленных из банаховых пространств Лоренца $X_j = \mathrm{L}_{p', q_j'}$, $Y_j = \mathrm{L}_q$, $1 < p, q, q_j < \infty$, $q > p$, $j \in \{0, 1\}$, где мы берём в качестве I_0 и I_1 верхнюю и нижнюю полуокружности. Пара (X, Y) BMO-регулярна, поскольку, например, по теореме реитерации обе решётки в условии (i) при подходящих параметрах являются пространствами Лебега, BMO-регулярность которых хорошо известна. С другой стороны, пользуясь теоремой 8, потенциально более узкое при $1 \leqslant r_0 < r_1 \leqslant \infty$ чем (ii$'$) условие BMO-регулярности вложения $X'(X, Y)_{\theta, r_0} \subset X'(X, Y)_{\theta, r_1}$ переписывается как BMO-регулярность вложения

$$\chi_{I_0} \mathrm{L}_{u, s_0} + \chi_{I_1} \mathrm{L}_{u, s_1} \subset \chi_{I_0} \mathrm{L}_{u, t_0} + \chi_{I_1} \mathrm{L}_{u, t_1}, \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q},$$
$$\frac{1}{s_j} = \frac{1}{q_j} + \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{r_0}, \quad \frac{1}{t_j} = \frac{1}{q_j} + \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{r_1}, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Для этого необходимы условия $t_j \geqslant s_{1-j}$, $j \in \{0, 1\}$. Если они выполняются при всех рассматриваемых значениях q_j, то при близких к 1 значениях q_0 и близких к ∞ значениях q_1 отсюда следуют соотношения

$$1 - \varepsilon + \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{r_1} = 1/t_0 \leqslant 1/s_1 = \varepsilon + \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{r_0}, \quad \varepsilon > 0.$$

При произвольно близких к 1 значениях θ и произвольно малых ε это может быть выполнено только если $1/r_0 - 1/r_1 \geqslant 1$, откуда следует, что $r_0 = 1$ и $r_1 = \infty$.

Напоследок отметим, что условие (i) теоремы 6 при $\alpha = \beta$ и $p \neq q$, вообще говоря, уже не достаточно для BMO-регулярности слабого типа. Выберем, например, в примере выше пространства $X = \chi_{I_0} \mathrm{L}_{2,1} + \chi_{I_1} \mathrm{L}_{2,\infty}$ и $Y = X' = \chi_{I_0} \mathrm{L}_{2,\infty} + \chi_{I_1} \mathrm{L}_{2,1}$. Тогда решётки $(X, Y)_{1/2, p}$ BMO-регулярны при всех $0 < p \leqslant \infty$, поскольку они являются одинаковыми перестановочно инвариантными пространствами на обеих полуокружностях, и можно воспользоваться предложением 2 в [11] (или, как вариант, показать это с помощью предложения 14). Однако решётка в условии (iii) при $\theta = \frac{1}{2}$ и $s = 2$ равна

$$
\begin{aligned}
Z = (\mathrm{L}_1,\ \chi_{I_0}\mathrm{L}_{2,\infty}\mathrm{L}_{2,\infty} + \chi_{I_1}\mathrm{L}_{2,1}\mathrm{L}_{2,1})_{1/2,2} \\
= \left(\mathrm{L}_1,\ \chi_{I_0}\mathrm{L}_{1,\infty} + \chi_{I_1}\mathrm{L}_{1,1/2}\right)_{1/2,2} \\
= \chi_{I_0}\left(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_{1,\infty}\right)_{1/2,2} + \chi_{I_1}\left(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_{1,1/2}\right)_{1/2,2} \\
= \chi_{I_0}\mathrm{L}_{1,2} + \chi_{I_1}\left(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_{1,1/2}\right)_{1/2,2},
\end{aligned}
$$

где мы воспользовались предложением 5.3.1 в [1]. Поскольку

$$
\mathrm{L}_{1,2} \subsetneqq \mathrm{L}_1 = (\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_1)_{1/2,2} \subset \left(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_{1,1/2}\right)_{1/2,2},
$$

решётка Z не является BMO-регулярной и пара (X, Y) не обладает BMO-регулярностью слабого типа.

Список литературы

1. J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, 1976.
2. M. Cwikel, Y. Sagher, *Relations between real and complex interpolation spaces.* — Indiana Univ. Math. J. **36**, No. 4 (1987), 905–912.
3. F. Cobos, T. Schonbek, *On a theorem by Lions and Peetre about interpolation between a Banach space and its dual.* — Houston J. Math. **24**, No. 2 (1998), 325–344.
4. N. J. Kalton, *Complex interpolation of Hardy-type subspaces.* — Math. Nachr. **171** (1995), 227–258.
5. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H_p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
6. S. V. Kislyakov, *On BMO-regular couples of lattices of measurable functions.* — Stud. Math. **159**, No. 2 (2003), 277–289.
7. D. V. Rutsky, *Real Interpolation of Hardy-type Spaces and BMO-regularity.* — J. Fourier Anal. Appl. **26**, No. 4 (2020), 1–40.
8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* Невский Диалект; БХВ-Петербург (2004). 4-е изд.
9. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и анализ **14**, No. 2 (2002), 117–135.
10. Д. В. Руцкий, *Замечания о BMO-регулярности и AK-устойчивости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 116–165.
11. Д. В. Руцкий, *BMO-регулярность в решетках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алгебра и Анализ **23**, No. 2 (2011), 248–295.
12. Д. В. Руцкий, Вещественная интерполяция пространств типа Харди: анонс и некоторые замечания. — Зап. научн. семин. ПОМИ **480** (2019), 170–190.

13. Д. В. Руцкий, *Весовая BMO-регулярность слабого типа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **503** (2021), 97–112.

Rutsky D. V. Description of weak-type BMO-regularity.

The weak-type BMO-regularity property for couples of quasi-Banach lattices of measurable functions was recently introduced as a suitable substitute for the usual BMO-regularity in connection with characterization of the K-closedness of Hardy-type spaces on the unit circle and stability for the real interpolation. It was characterized in terms of the BMO-regularity of couples $((X,Y)_{\alpha,p},(X,Y)_{\beta,q})$, $0<\alpha<\beta<1$, of the real interpolation spaces. In the present note, a natural characterization of this property similar to that of BMO-regularity for couples of Banach lattices (X,Y) in terms of the BMO-regularity of $X'Y$ is extended to couples of lattices of measurable functions on homogeneous type spaces. We also derive equivalent conditions corresponding to the limit case where $\alpha=0$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 12 октября 2022 г.