Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

П. А. Мозоляко

B-ТОЧКИ КАНТОРОВСКИХ МНОЖЕСТВ

§1. Вступление

Множество $A \subset \mathbb{R}$ мы будем называть метрически плотным, если хаусдорфова размерность множества $A \bigcap I$ равна единице, каков бы ни был невырожденный интервал I.

Пусть u – функция, заданная в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Обозначим через A_u множество всех таких точек $x \in \mathbb{R}$, что вариация функции $y \mapsto u(x, y)$ на интервале $(0, 1)$ конечна. В работах [2,3] Бургейн показал, что множество A_u метрически плотно, если u – положительная гармоническая функция. В [3] доказано и более сильное утверждение: метрически плотной, вообще говоря, оказывается *часть* B_u множества A_u, состоящая из точек, которые мы называем *точками Бургейна* (или B-точками) функции u (см. определение в п. 1.1). Эти результаты были обобщены на полупространства в $\mathbb{R}^n$ в [9], а затем на области в $\mathbb{R}^n$ в [7] (см. также [5, 8]).

Естественно задаться вопросом описания B-точек в терминах поведения граничных значений функции u, например в духе работы [6], однако, по-видимому, в общем случае это довольно затруднительно. Цель настоящей заметки – рассмотреть конкретную, довольно сложно устроенную, граничную функцию f (гармоническое продолжение которой и есть u) и предъявить явные и наглядные условия, описывающие множество B_u. Именно, в роли гармонической функции u выступает гармоническая мера ω_E множества $E \subset [0, 1]$ канторовского типа (т.е. интеграл Пуассона характеристической функции χ_E). В теореме 1 мы даем явное описание B-точек функции ω_E (мы называем их B-точками множества E). Это описание (не используя теорию, развитую в [3]) непосредственно обнаруживает непустоту множества вида

Ключевые слова: точки Бургейна, хаусдорфова размерность, ядро Пуассона.

Работа поддержана грантом Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, выполненных под руководством ведущих ученых, соглашение 075-15-2021-602.

$E \bigcap B_{\omega_E} \bigcap I$ для любого невырожденного интервала I, пересекающего E.

Наше описание позволяет воспринимать B-точки множества E как точки его усиленной плотности (для удобства читателя и для сопоставления с теоремой 1, в теореме 2 мы приводим описание точек плотности множества E). Описание B-точек, данное в теореме 1, не вполне удобно технически. В п. 3.5 дана переформулировка теоремы 1, более удобная для доказательства. Отметим также, что средняя вариация не вполне поддается стандартным техникам дискретизации (соответствующие утверждения для диадических мартингалов почти тривиальны, см., например, [4]; с другой стороны, как показано в [3], в определении средней вариации нельзя заменить ядро Пуассона на ядро Стеклова), поэтому мы работаем в непрерывном контексте.

1.1. Обозначения. Символ $\phi * \psi$ обозначает свертку функций ϕ, ψ на $\mathbb{R}$ (при предположениях, обеспечивающих ее существование). Буквой P мы обозначаем ядро Пуассона на полуплоскости, $P(t) = \frac{1}{\pi(t^2+1)}$. Положим

$$P_{(y)}(t) = \frac{1}{y} P\left(\frac{t}{y}\right) = \frac{y}{\pi(t^2+y^2)};$$
$$P_y(t) = \frac{\partial}{\partial y} P_{(y)}(t) = \frac{t^2 - y^2}{\pi(t^2+y^2)^2}, \quad t \in \mathbb{R},\ y \in (0,1).$$

Там, где это не вызовет путаницы, мы будем применять сокращенное обозначение $P_j = P_{(2^{-j})}$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть задано множество $E \subset \mathbb{R}$, буквой χ_E мы обозначаем характеристическую функцию множества E; под длиной $|E|$ мы понимаем меру Лебега множества E.
Для функции f из $L^\infty(\mathbb{R})$ и точки x из $\mathbb{R}$ определим

$$(\mathrm{Mvar}\, f)(x) = \int_0^1 \left(|f * P_y| * P_{(y)}\right)(x)\, dy, \tag{1a}$$

$$(\mathrm{Vvar}\, f)(x) = \int_0^1 |f * P_y|\,(x)\, dy. \tag{1b}$$

Эти величины мы называем соответственно средней и вертикальной вариацией функции f в точке x.

Из полугруппового свойства ядра Пуассона

$$P_{(y_1+y_2)} = P_{(y_1)} * P_{(y_2)}, \quad y_1, y_2 > 0,$$

следует неравенство

$$\operatorname{Vvar} f \leqslant 4 \operatorname{Mvar} f. \tag{2}$$

Если $(\operatorname{Mvar} f)(x) < \infty$, то точку x мы называем *B-точкой* [*точкой Бургейна*] функции f.

Для того, чтобы средняя вариация функции f расходилась в точке $x \in \mathbb{R}$, необходима некоторая нерегулярность функции f в окрестности этой точки x. Для прояснения зависимости между поведением функции f около точки x и конечностью величины $(\operatorname{Mvar} f)(x)$, имеет смысл рассмотреть какую-нибудь “плохую” функцию и указать ее B-точки. Одним из примеров такой функции является характеристическая функция множества E канторовского типа – вопрос об описании B-точек этой функции представляет интерес и в связи с оценками вертикальной вариации гармонической меры множества E относительно полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

И вертикальная, и средняя вариации (ограниченной) функции очевидно суть локальные величины – для установления их конечности в точке x достаточно знать значения функции f в небольшой окрестности точки x. Это свойство описывается следующей элементарной леммой.

Лемма 1. *Для произвольного ограниченного отрезка $I \subset \mathbb{R}$ и такой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, что $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R} \setminus I$, верно неравенство*

$$(\operatorname{Mvar} f)(x) \leqslant \frac{10\|f\|_\infty}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus I)}, \quad x \in I. \tag{3}$$

Буквами $A, B, C, \ldots$ мы будем обозначать постоянные, возможно разные в разных местах. Мы говорим, что $f(x) \sim g(x)$, или что величина $f(x)$ эквивалентна величине $g(x)$, если значения (неотрицательных) функций f и g в точке x конечны или бесконечны одновременно.

§2. Формулировка основных результатов

2.1. Постановка задачи. Итак, пусть $Q \in (0,1)$, S – сегмент (компактный промежуток), а QS – концентрический сегмент длины $Q|S|$, через $F_Q(S)$ мы обозначим замыкание множества $S \setminus QS$. Оператор F_Q применим к любому дизъюнктному объединению сегментов $S =$

$\bigvee_{l=1}^{N} S_l : F_Q(S) := \bigvee_{l=1}^{N} F_Q(S_l)$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=0}^{\infty}$ – такая последовательность чисел, что

$$0 < q_j < 1; \quad \sum_{j=0}^{\infty} q_j < \infty \tag{4}$$

(это условие равносильно положительности длины определенного ниже множества $E(q, S)$). Зафиксируем сегмент S, $|S| > 0$, и положим $E_0 = S$, $E_{k+1} = F_{q_k}(E_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Множество $E(q, S) := \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} E_k$ совершенно, $|E| > 0$. Далее мы в основном полагаем $S = [0, 1]$, а последовательность q будет зафиксирована, так что там, где это не вызовет недоразумений, вместо $E(q, [0, 1])$ мы будем писать $E(q)$ или E.

В B-точках множества E, то есть в таких точках $x_0 \in [0, 1]$, что

$$(\mathrm{Mvar}\, \chi_E)(x_0) := \int_0^1 \left(|\chi_E * P_y| * P_{(y)} \right)(x)\, dy < \infty, \tag{5}$$

вертикальная вариация гармонической меры ω_E множества E относительно верхней полуплоскости конечна.

Заметим, что если $x_0 \in [0, 1] \setminus E$, то, очевидно, $(\mathrm{Mvar}\, \chi_E)(x_0) < \infty$, поэтому имеет смысл рассматривать только точки $x_0 \in E$. Сходимость или расходимость интеграла (5) сохранится, если вместо функции χ_E взять функцию $f = \chi_G$, $G = [0, 1] \setminus E$.

Каждой точке множества $E = E(q)$ можно поставить во взаимнооднозначное соответствие бесконечную последовательность $\kappa(x_0) = \{\kappa_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящую из нулей и единиц, а именно: $\kappa_j(x_0) = 0$, если ближайший к x_0 интервал из $E_{j+1} \setminus E_j$ лежит справа от x_0, и $\kappa_j(x_0) = 1$ в ином случае. Через $n_k(x_0)$ обозначим моменты изменения траектории $\kappa(x_0)$, т.е. $\kappa_j = \kappa_{j+1}$, $j = n_k, \ldots, n_{k+1} - 1$, $\kappa_{n_k} \neq \kappa_{n_k+1}$, $k \in \mathbb{N}$; если $\kappa_j = \kappa_{j+1}$ для всех $j \geqslant n_k$, то считаем $n_{k+1} = n_{k+2} = \cdots = \infty$. Иногда мы пишем n_k или κ_j вместо $n_k(x_0)$ или $\kappa_j(x_0)$.

Совершенное множество E строится следующим образом:

$$E = \bigcap_0^{\infty} E_k = \bigcap_0^{\infty} \left(\bigvee_{\nu=1}^{2^k} J_k^{\nu} \right), \tag{6}$$

где J_k^ν – сегмент с номером ν из поколения k. Очевидно,

$$|J_k^\nu| = \varepsilon_k = 2^{-k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1}(1-q_j).$$

Положим теперь

$$G = [0,1] \setminus E := \bigvee_0^\infty \left(\bigvee_{\nu=1}^{2^k} I_k^\nu \right), \tag{7}$$

где

$$J_k^\nu \setminus I_k^\nu = J_{k+1}^{2\nu-1} \bigvee J_{k+1}^{2\nu}, \quad k \in \mathbb{N},\ \nu = 1 \dots 2^k,$$

а I_k^ν – интервал с номером ν из поколения k (они составляют $E_k \setminus E_{k+1}$), также

$$|I_k^\nu| = \delta_k = q_k \cdot \varepsilon_k.$$

В силу равенства $\frac{\delta_k}{\varepsilon_k} = q_k$ имеем $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty q_k = \sum_{k=0}^\infty \frac{\delta_k}{\varepsilon_k} < \infty$. Далее, $\varepsilon_{j+1} = \dfrac{\varepsilon_j}{2} - \dfrac{\delta_j}{2} = \dfrac{(1-q_j)\varepsilon_j}{2}, \quad j \in \mathbb{N}$, так что

$$\varepsilon_k \cdot 2^k = \varepsilon_0 \cdot \prod_{j=1}^{k-1}(1-q_j) = \prod_{j=1}^{k-1}(1-q_j);$$

$$\delta_k \cdot 2^k = q_k \varepsilon_k \cdot 2^k = q_k \prod_{j=1}^{k-1}(1-q_j),$$

следовательно условие (4) влечет $|J_k^\nu| \sim 2^{-k},\ k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Точка $x_0 \in E(q)$ есть B-точка множества $E(q)$ [т.е. функции $\chi_{E(q)}$] тогда и только тогда, когда*

$$V(x_0) = \sum_{k=1}^\infty 2^{n_{k+1}(x_0)-n_k(x_0)} q_{n_k(x_0)-1} := \sum_{k=1}^\infty v_k(x_0) < \infty. \tag{8}$$

Следующее утверждение, безусловно, хорошо известно, хотя мы не можем указать точную ссылку. Как и теорема 1, оно описывает некоторую “глубину залегания” точки x_0 в E.

Теорема 2. *Точка $x_0 \in E(q)$ есть точка плотности множества $E(q)$, то есть $\lim\limits_{d\to 0} \frac{|[x_0-d,x_0+d]\cap E(q)|}{2d} = 1$, тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{k\to\infty} v_k(x_0) = 0. \tag{9}$$

Как известно, теорема 2 описывает в точности те точки $x_0 \in E$, для которых $\lim_{y\downarrow 0} \omega_E(x_0 + iy) = 1$ (см. [11]). Приведем теперь два типичных случая расположения точки x_0 в E:

1. Точка $x_0 \in E$ – один из концов какого-либо интервала J_i^ν, т.е. последовательность $\{\kappa_j\}$ состоит только из нулей или только из единиц, начиная с некоторого номера i. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{n_{j+1}-n_j} q_{n_j-1} = \infty \tag{10}$$

и x_0 не B-точка E (равно как и не точка плотности), с другой стороны, вертикальная вариация в этой точке конечна.

2. Последовательность $\{\kappa_j\}$, задающая x_0, состоит из перемежающихся нулей и единиц, $\kappa_{j+1} = 1 - \kappa_j, j \in \mathbb{N}$. В таком случае x_0 "лежит глубоко" в E, при этом $n_{j+1} = n_j + 1, j \in \mathbb{N}$, так что

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{n_{j+1}-n_j} q_{n_j-1} = 2\sum_{j=1}^{\infty} q_{n_j-1} < \infty. \tag{11}$$

Аналогично, x_0 – B-точка для E, если разность $n_j - n_{j-1}$ равномерно ограничена.

Изложение организовано следующим образом: в §3 мы приводим утверждение теоремы 1 к удобного виду, а затем доказываем ее в параграфах 4–6. В параграфе 7 собраны различные вспомогательные утверждения.

§3. Переформулировка теоремы 1

Теорема 1 утверждает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{n_{k+1}(x_0)-n_k(x_0)} q_{n_k(x_0)-1}$ и интеграл $\int\limits_0^1 \left(|\chi_E * P_y| * P_{(y)}\right)(x)\,dy$ сходятся одновременно. Нам будет удобнее заменить их на эквивалентные величины. В пункте 3.1 мы определяем величину $R(x_0) \sim V(x_0),\ x_0 \in E$, с которой мы и будем работать впоследствии. Модификация средней вариации требует чуть больших усилий. Сначала (в п. 3.3) мы заменим $(\mathrm{Mvar}\,\chi_{_E})(x_0)$ на сравнимую величину $B(x_0)$, а затем в п. 3.4 мы вычленим её часть $W(x_0)$ (отвечающую за влияние интервалов старших поколений). Нам также потребуется, чтобы сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k$ была достаточно мала.

3.1. Определение величины $R(x_0)$, сравнимость с $V(x_0)$.

Как мы видели выше, $E_k \setminus E_{k+1} = \bigvee_{j=1}^{2^k} I_k^j$, где I_k^j суть дополнительные к E интервалы поколения k, занумерованные слева направо. Зафиксируем $x_0 \in E, k \in \mathbb{N}$. Через $J_k^{\lambda(k,x_0)}$ мы обозначим сегмент поколения k, содержащий x_0. Ему соответствуют два соседних интервала: старший (т.е. его поколение строго меньше, чем $k-1$) и интервал поколения $k-1$ *. Эти два соседних интервала мы обозначим через $I_{m(k,x_0)}^{\nu_1(k,x_0)}$ и $I_{k-1}^{\nu_2(k,x_0)}$ соответственно $(m(k,x_0) < k-1;\ 1 \leqslant \nu_1(k,x_0) \leqslant 2^{m(k,x_0)})$. Положим

$$R(x_0) := \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{m(j,x_0)} 2^j := \sum_{j=1}^{\infty} r_j(x_0). \tag{12}$$

Наша ближайшая цель – показать, что $V(x_0) \sim R(x_0)$ $(= R_{E(q)}(x_0))$.

Доказательство. Из построения множества E следует, что для произвольного $k \in \mathbb{N}$ и $j, n_k + 1 \leqslant j \leqslant n_{k+1}$, ближайший к x_0 “старший” interval $I_{m(j,x_0)}^{\nu_1(j,x_0)}$ будет один и тот же, а именно $I_{m(n_k,x_0)}^{\nu_1(n_k,x_0)}$. На шаге $j = n_{k+1} + 1$, “старший” интервал $I_{m(j,x_0)}^{\nu_1(j,x_0)}$ поменяется на $I_{j-2}^{\nu_2(j-1,x_0)}$.

Мы имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{m(j,x_0)} 2^j &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \delta_{m(n_k,x_0)} 2^j \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (2^{n_{k+1}+1} - 2^{n_k+2}) \delta_{m(n_k,x_0)} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{n_{k+1}+1} - 2^{n_k+2}) \delta_{n_k-1} \\
&= 4 \sum_{k=1}^{\infty} (2^{n_{k+1}-n_k} - 2) q_{n_k-1} \prod_{j=1}^{n_k-2} (1 - q_j).
\end{aligned}$$

---

*Мы включаем в эту схему и концевые интервалы, т.е. $\lambda(k,x_0) = 1$ или $\lambda(k,x_0) = 2^k$, считая $(-1,0)$ и $(1,2)$ интервалами поколения -1.

Поскольку $0 < C < \prod\limits_{j=1}^{n_k-3}(1-q_j) < 1$ для произвольного $k \in \mathbb{N}$, мы немедленно получаем сравнимость величин в (12) и (8). Аналогично заключаем, что $r_j(x_0) \to 0$ в точности, когда $v_j(x_0) \to 0$, $j \to \infty$.

□

3.2. Малость суммы $\sum\limits_k q_k$.

Заметим, что, полагая $\widetilde{q} = \{q_j\}_{j=k}^{\infty}$ и $E_0 = J_k^{\lambda(k,x_0)}$ для $k \in \mathbb{N}$, мы получим другое канторовское множество $E(\widetilde{q}) = J_k^{\lambda(k,x_0)} \bigcap E(q)$. Локальность вариации (лемма 1) влечет

$$(\mathrm{Mvar}\,\chi_{E(q)\setminus E(\widetilde{q})})(x_0) < \infty$$

и

$$\left|R_{E(q)}(x_0) - R_{E(\widetilde{q})}(x_0)\right| < \infty.$$

Поэтому мы можем считать, что

$$0 < 1 - \prod_{j=1}^{\infty}(1-q_j) \leqslant 3C_q, \tag{13}$$

для достаточно малой константы C_q (ее значение мы выберем позже), кроме того

$$(1-3C_q)2^{-k} \leqslant \varepsilon_k \leqslant 2^{-k}. \tag{14}$$

3.3. Модификация средней вариации. Вспомогательные функции ϕ_j.

Для произвольной функции $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и числа $y > 0$ положим, как и ранее, $\psi_{(y)}(t) := \frac{1}{y}\psi\left(\frac{t}{y}\right)$, и определим

$$\phi_j = \left(S_{(\varepsilon_j)} - S_{\left(\frac{\varepsilon_j}{2}\right)}\right) * \Phi_{\left(\frac{\varepsilon_j}{4}\right)},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{H}{\|H\|_{L^1(\mathbb{R})}};\\ H(x) &= e^{-\frac{1}{1-4x^2}} \cdot \chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, \end{aligned} \tag{15}$$

и S – ядро Стеклова, $S = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. В таком случае

$$\Phi(x) \leqslant C \cdot P(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

притом $\phi_j \leqslant C_\phi P_j$ для некоторых абсолютных постоянных C, C_ϕ. Положим теперь

$$B_f(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} (|f * \phi_j| * P_j)(x_0).$$

Сравнимость средней вариации и $B_{\chi_E}(x_0) := B(x_0)$ обеспечена следующей леммой.

Лемма 2. *Для любой ограниченной функции f верно соотношение*

$$\frac{1}{C} \operatorname{Mvar} f \leqslant B_f \leqslant C \operatorname{Mvar} f, \tag{17}$$

где C есть некоторая абсолютная константа.

Доказательство леммы приведено в работе [1].

Замечание. Локальность средней вариации (лемма 1) влечет $\operatorname{Mvar} \chi_E \sim \operatorname{Mvar} \chi_G$. В дальнейшем нам удобнее рассматривать χ_G вместо χ_E.

3.4. Разбиение ранга j множества $[0,1] \setminus E$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Множество $G = [0,1] \setminus E$ разбивается на две части, состоящие из "старших" и "младших" интервалов соответственно:

$$G = G_j^o \bigvee G_j^n,$$
$$G_j^o := \bigvee_0^{j-1} \left(\bigvee_{\nu=1}^{2^k} I_k^\nu \right),$$
$$G_j^n := \bigvee_j^{\infty} \left(\bigvee_{\nu=1}^{2^k} I_k^\nu \right).$$

Мы видим, что

$$B_{\chi_G} = \sum_{j=1}^{\infty} |\chi_G * \phi_j| * P_j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\chi_{G_j^o} * \phi_j| * P_j + \sum_{j=1}^{\infty} |\chi_{G_j^n} * \phi_j| * P_j.$$

Положим

$$w_j = |\chi_{G_j^o} * \phi_j| * P_j;$$
$$s_j = |\chi_{G_j^n} * \phi_j| * P_j;$$
$$W := \sum_{j=1}^{\infty} w_j;$$
$$\mathcal{S} := \sum_{j=1}^{\infty} s_j,$$

так что

$$W - \mathcal{S} \leqslant B_{\chi_G} \leqslant W + \mathcal{S}. \tag{18}$$

3.5. Завершение переформулировки теоремы 1.

Здесь мы даем краткое описание доказательства теоремы 1. Как было показано ранее, условие $(\mathrm{Mvar}\, \chi_{_E})(x_0) \sim V(x_0)$ равносильно условию $R(x_0) \sim B(x_0)$. Мы докажем следующие неравенства:

$$W(x_0) \leqslant CR(x_0); \tag{19a}$$
$$W(x_0) \geqslant \tfrac{1}{C} R(x_0); \tag{19b}$$
$$s_j(x_0) \leqslant \tfrac{1}{3} w_j(x_0) + C(q_{j-1} + q_j + q_{j+1} + 2^{-j}). \tag{19c}$$

для некоторой абсолютной константы C. Совмещая оценку (19c) с (18) и (4), мы получаем эквивалентность величин $B(x_0)$ и $W(x_0)$, а величины s_j оказываются пренебрежимо малы по сравнению с w_j. Из оценок (19a) и (19b), таким образом, следует эквивалентность $W(x_0) \sim R(x_0)$, что и завершает доказательство теоремы. Неравенства (19a)–(19c) будут доказаны в пп. 4, 5 и 6 соответственно.

§4. Оценка величины $w_j(x_0)$ сверху

Отметим, что поскольку множество G_k^o состоит из "больших" и далеко отстоящих (по сравнению с G_k^n) от x_0 интервалов, мы сможем при оценке величины $(|\chi_{G_j^o} * \phi_j| * P_j)(x)$ заменить функцию ϕ_j во внутренней свертке на ядро Пуассона.

Как уже говорилось ранее, для произвольного числа $j \in \mathbb{N}$ к сегменту j-го поколения, содержащему точку x_0, примыкают два интервала из G_j^o – интервал $I_{m(j,x_0)}^{\nu_1(j,x_0)}$ (где номер поколения $m(j,x_0)$ строго меньше $j-1$) и некоторый интервал $I_{j-1}^{\nu_2(j,x_0)}$ из поколения $j-1$. Все интервалы из G_j^o за исключением двух вышеупомянутых отстоят от x_0 более, чем на ε_j. Действительно, между точкой x_0 и интервалом вида I_k^ν, где $k \leqslant j-1$, $(\nu, k) \neq (\nu_1(j, x_0), m(j, x_0)), (\nu_2(j, x_0), j-1)$ расположен минимум один сегмент J_j^ν, не содержащий точки x_0. При этом $|J_j^\nu| = \varepsilon_j \geqslant \frac{4}{5} 2^{-j}$.

Также нам потребуется следующая элементарная оценка:

$$(\phi * P_{j-1})(0) \geqslant \frac{10}{9}(\phi * P_j)(0), \tag{20}$$

если $\operatorname{supp} \phi \subset \mathbb{R} \setminus [-\frac{4}{5}2^{-j}, \frac{4}{5}2^{-j}]$ и $1 \geqslant \phi \geqslant 0$. Из свойств ядра Пуассона и оценки (16) следует, что

$$w_j = |\chi_{G_j^o} * \phi_j| * P_j \leqslant C\chi_{G_j^o} * P_j =: \widetilde{w}_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Для натурального j имеем

$$\widetilde{w}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{\nu=1}^{2^k} \chi_{I_k^\nu} * P_j.$$

Из оценки

$$\widetilde{w}_{j+1}(x_0) \leqslant \frac{9}{10}\widetilde{w}_j(x_0) + 2(2^j\delta_{j-1} + 2^j\delta_{m(j,x_0)}) + 4 \cdot 2^j\delta_j \tag{21}$$

(которая будет доказана чуть ниже) следует неравенство (19b). Действительно, суммируя по $j \in \mathbb{Z}_+$, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} w_j(x_0) &\leqslant C\sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{w}_j(x_0) \\
&\leqslant C_1\widetilde{w}_0(x_0) + C_2\sum_{j=1}^{\infty}\left(2^j\delta_{j-1} + 2^j\delta_{m(j,x_0)} + 4 \cdot 2^j\delta_j\right) \\
&\leqslant C_1\widetilde{w}_0(x_0) + C_2\sum_{j=1}^{\infty}\left(4q_{j-1} + 2^j\delta_{m(j,x_0)} + 8q_j\right) \\
&\leqslant C_1\widetilde{w}_0(x_0) + C_3\sum_{j=1}^{\infty} q_j + \sum_{j=1}^{\infty} 2^j\delta_{m(j,x_0)} \\
&\leqslant C_1\widetilde{w}_0(x_0) + C_4 + C_5R(x_0) \leqslant C_6R(x_0).
\end{aligned}$$

Докажем неравенство (21). Рассмотрим переход от j-го поколения сегментов к $(j+1)$-му. Множество G_{j+1}^o состоит из интервалов, составляющих G_j^o, и интервалов вида I_j^ν. При этом возможны два случая:

1) $m(j,x_0)=m(j+1,x_0)$ – ближайший к x_0 интервал старшего поколения остается прежним;
2) $m(j,x_0)\neq m(j+1,x_0)$ – происходит смена интервала старшего поколения, ближайшего к x_0. В этом случае $I^{\nu_1(j+1,x_0)}_{m(j+1,x_0)}=I^{\nu_2(j,x_0)}_{j-1}$.
Положим $(II):=\left(\chi_{I^{\nu_1(j+1,x_0)}_{m(j+1,x_0)}}*P_j\right)(x_0)$, $(III):=\left(\chi_{I^{\nu_1(j,x_0)}_{m(j,x_0)}}*P_j\right)(x_0)$,
$(IV):=\left(\chi_{I^{\nu_2(j,x_0)}_{j-1}}*P_j\right)(x_0)$,
$(V):=\sum\limits_{\nu=1}^{2^j}\big(\chi_{I^\nu_j}*P_j\big)(x_0)$, и, наконец,

$$(I):=\sum_{k=1}^{j}\sum_{\nu=1}^{2^k}\big(\chi_{I^\nu_k}*P_j\big)(x_0)-(II)-(III)-(IV)-(V),$$

так что $\widetilde{w}_{j+1}(x_0)=(I)+(II)+(III)+(IV)+(V)$. Сумма (V) включает в себя интервалы, принадлежащие j-му поколению, т.е. интервалы, появившиеся при переходе от G^o_j к G^o_{j+1}. В слагаемых (IV) и (III) участвуют два интервала, прилегающих к сегменту j-го поколения $J^{\lambda(j,x_0)}_j$, содержащему точку x_0. Интервал в (II) является ближайшим к x_0 интервалом из G^o_{j+1}. В сумму (I) входят все оставшиеся интервалы, составляющие G^o_{j+1}.

Поскольку интервалы из (I) отстоят от точки x_0 дальше, чем на 2^{-j-1}, то из (20) с

$$\phi(t):=\chi_{G^o_j\setminus\left(I^{\nu_1(j+1,x_0)}_{m(j+1,x_0)}\cup I^{\nu_1(j,x_0)}_{m(j,x_0)}\cup I^{\nu_2(j,x_0)}_{j-1}\right)}(x_0-t),\quad t\in\mathbb{R}$$

следует, что

$$(I)=\big(\phi*P_j\big)(0)\leqslant\frac{9}{10}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{\nu=1}^{2^k}(\chi_{I^\nu_k}*P_{j-1})(x_0)=\frac{9}{10}\omega_j(x_0).\tag{22}$$

Далее, если $|I^{\nu_1(j,x_0)}_{m(j,x_0)}|\geqslant 2^{-j}$, то $\left(\chi_{I^{\nu_1(j,x_0)}_{m(j,x_0)}}*P_j\right)(x_0)\leqslant 1$, иначе $\left(\chi_{I^{\nu_1(j,x_0)}_{m(j,x_0)}}*P_j\right)(x_0)\leqslant 2^j\delta_{m(j,x_0)}$. Если при переходе от j к $j+1$ происходит смена ближайшего “старшего” интервала, то $(II)\equiv(IV)$, в противном случае $(II)\equiv(III)$. При этом $(IV)\leqslant 2^j\delta_{j-1}$. Таким образом, мы имеем

$$(II) + (III) + (IV) \leqslant 2^j \left| I^{\nu_1(j,x_0)}_{m(j,x_0)} \right| + 2^j \delta_{j-1} \\ = 2^j \delta_{m(j,x_0)} + 2^j \delta_{j-1}. \tag{23}$$

Наконец, расстояние между интервалами из $G^o_{j+1} \setminus G^o_j$ не меньше, чем $|J^\nu_{j+1}| \geqslant \frac{4}{5} 2^{-j-1}$, следовательно сумму (V) можно оценить через интеграл по ближайшему к x_0 интервалу j-го поколения, то есть

$$(V) \leqslant 4 \cdot \int\limits_{I_j^{\nu_2(j+1,x_0)}} P_j(x_0 - t)\, dt \leqslant 4 \cdot 2^j \delta_j. \tag{24}$$

Из неравенств (22), (23) и (24) следует оценка (21).

§5. Оценка величины $w_j(x_0)$ снизу.

Здесь мы докажем неравенство

$$w_j(x_0) \geqslant A \widetilde{r}_j(x_0), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

где $\widetilde{r}_j(x_0) = \min(2^j \delta_{m(j,x_0)}, 1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$ и A – положительная постоянная.

Заметим, что в “масштабе j-го поколения” интервалы из G^o_j расположены “далеко” друг от друга, что позволяет нам (несмотря на то, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_j(x)\, dx = 0$) рассчитывать на отсутствие взаимоуничтожения в свертке $\chi_{G^o_j} * \phi_j$, т.е. что для многих $x \in E$ величина $(\chi_{G^o_j} * \phi_j)(x)$ будет достаточно большой. Более точное утверждение дает следующая лемма (доказательство см. в п. 7).

Лемма 3. *Пусть I – ограниченный промежуток, $I \subset \mathbb{R}$, положим*

$$H_{\phi_j} = \{x \in \mathbb{R} : |\chi_I * \phi_j|(x) > \frac{1}{40} \min(|I| \cdot 2^j, 1);\ \mathrm{dist}(x, I) \leqslant 5 \cdot \varepsilon_j\},$$

где $\varepsilon_j = |J^\nu_j|$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|H_{\phi_j}| \geqslant \frac{\varepsilon_j}{20}.$$

Заметим сначала, что $\operatorname{supp} \phi_j \subset [-\frac{5}{4}\varepsilon_j, \frac{5}{4}\varepsilon_j]$, поэтому заключаем, что при $x \in [0,1] \setminus G^o_j$ носитель функции $\phi_j(x - \cdot)$ имеет непустое пересечение только с интервалами $I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}$ и $I^{\nu_2(j,x)}_{j-1}$, а следовательно

$$|\chi_{G^o_j} * \phi_j|(x) = |(\chi_{I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}} + \chi_{I^{\nu_2(j,x)}_{j-1}}) * \phi_j|(x), \quad x \in \bigvee_{\nu=1}^{2^j} J^\nu_j,\ j \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Так как $\operatorname{supp}\Big(\Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})} * S_{(\frac{\varepsilon_j}{2})}\Big) \subset \Big[-\frac{3}{8}\varepsilon_j, \frac{3}{8}\varepsilon_j\Big]$, то для таких точек $x \in \bigvee_{\nu=1}^{2^j} J^\nu_j$, что $\operatorname{dist}\Big(x, I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}\Big) \geqslant \frac{7}{16}\varepsilon_j$ и $\operatorname{dist}\Big(x, I^{\nu_2(j,x)}_{j-1}\Big) \geqslant \frac{7}{16}\varepsilon_j$ (т.е. для точек x, лежащих в сегменте $\frac{1}{8}J^{\nu(j,x)}_j$), мы имеем

$$\begin{aligned}
\Big|\chi_{G^o_j} * \phi_j\Big|(x) &= \Big|\Big(\chi_{I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}} + \chi_{I^{\nu_2(j,x)}_{j-1}}\Big) * \phi_j\Big|(x) \\
&= \Big|\Big(\chi_{I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}} + \chi_{I^{\nu_2(j,x)}_{j-1}}\Big) * \Big(\Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})} * S_{(\varepsilon_j)} - \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})} * S_{(\frac{\varepsilon_j}{2})}\Big)\Big|(x) \\
&= \Big(\Big(\chi_{I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}} + \chi_{I^{\nu_2(j,x)}_{j-1}}\Big) * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})} * S_{(\varepsilon_j)}\Big)(x).
\end{aligned}$$

Кроме того, для этих x мы имеем

$$\operatorname{dist}\Big(x, I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}\Big) \leqslant \frac{9}{16}\varepsilon_j,$$

поэтому, применяя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}
\Big(\Big(\chi_{I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}} + \chi_{I^{\nu_2(j,x)}_{j-1}}\Big) &* \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})} * S_{(\varepsilon_j)}\Big)(x) \\
&\geqslant \Big(\chi_{I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})} * S_{(\varepsilon_j)}\Big)(x) \\
&\geqslant \frac{1}{50} \cdot \min\Big(\frac{1}{\varepsilon_j}\delta_{m(j,x)}, 1\Big).
\end{aligned} \tag{27}$$

Из (26), (27) и свойств ядра Пуассона следует неравенство

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[0,1]\setminus G^o_j} &|\chi_{G^o_j} * \phi_j|(x) P_j(x_0 - x)\,dx \\
&= \sum_{\nu=1}^{2^j} \int\limits_{J^\nu_j} \Big|\Big(\chi_{I^{\nu_1(j,x)}_{m(j,x)}} + \chi_{I^{\nu_2(j,x)}_{j-1}}\Big) * \phi_j\Big|(x) P_j(x_0 - x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant \sum_{\nu=1}^{2^j} \int\limits_{\frac{1}{8}J_j^\nu} \left| \left(\chi_{I_{m(j,x)}^{\nu_1(j,x)}} + \chi_{I_{j-1}^{\nu_2(j,x)}} \right) * \phi_j \right| (x) P_j(x_0 - x)\, dx \\
&\geqslant \sum_{\nu=1}^{2^j} \int\limits_{\frac{1}{8}J_j^\nu} \left(\chi_{I_{m(j,x)}^{\nu_1(j,x)}} * \Phi_{\left(\frac{\varepsilon_j}{4}\right)} * S_{(\varepsilon_j)} \right)(x) P_j(x_0 - x)\, dx \\
&\geqslant \frac{1}{50} \sum_{\nu=1}^{2^j} \int\limits_{\frac{1}{8}J_j^\nu} \min(2^j \delta_{m(j,x)}, 1) P_j(x_0 - x)\, dx \\
&\geqslant B \sum_{\nu=1}^{2^j} \int\limits_{4J_j^\nu} \min(2^j \delta_{m(j,\widetilde{x})}, 1) P_j(x_0 - x)\, dx, \qquad (28)
\end{aligned}$$

где $\widetilde{x} := x_{\nu,j} + \frac{1}{4}(x - x_{\nu,j})$ для $x \in 4J_j^\nu$, где $x_{\nu,j}$ – центр сегмента J_j^ν (т.е. $\widetilde{x} \in J_j^\nu$), а B – некоторая положительная постоянная (последнее неравенство в (28) нужно и для оценки (19c)). Мы, следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
&(|\chi_{G_j^o} * \phi_j| * P_j)(x_0) \geqslant B \sum_{\nu=1}^{2^j} \int\limits_{2J_j^\nu} \min(2^j \delta_{m(j,x_0)}, 1) P_j(x_0 - x)\, dx \\
&\quad \geqslant B \int\limits_{J_j^{\nu(j,x_0)}} \min(2^j \delta_{m(j,x_0)}, 1) P_j(x_0 - x)\, dx \geqslant B \int\limits_{J_j^{\nu(j,x_0)}} \min(2^j \delta_{m(j,x_0)}, 1) \cdot \frac{2^j}{4}\, dx \\
&\quad \geqslant \frac{B}{4} \min(2^j \delta_{m(j,x_0)}, 1) \cdot 2^j \cdot |J_j^{\nu(j,x_0)}| \geqslant A \min(2^j \delta_{m(j,x_0)}, 1),
\end{aligned}$$

и неравенство (25) доказано. Осталось заметить, что ряды $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \widetilde{r}_j(x_0)$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} r_j(x_0)$ сходятся или расходятся одновременно, и мы получаем (19a).

§6. Оценка величины $\mathcal{S}(x_0)$ через $W(x_0)$

Оценивая величину $s_j(x_0)$, мы уже не можем, как в случае с $w_j(x_0)$, мажорировать внутреннюю свертку в $\mathcal{S}$ ядром Пуассона (это связано с тем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=k}^{\infty} q_j$ не обязан сходиться). С другой стороны, в отличие от ситуации, описанной в пункте 5, в масштабе j-го поколения интервалы, составляющие G_j^n, будут распределены относительно равномерно в E_j. Это позволяет нам надеяться на то, что из-за равенства нулю интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_j(x)\,dx$ и симметричности функции ϕ_j в свертке $\chi_{G_j^n} * \phi_j$ произойдет взаимоуничтожение.

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Заметим, что из определения функции ϕ_j следует, что

$$|\chi_{G_j^n} * \phi_j| * P_j \leqslant C|\chi_{G_j^n} * (S_{(\varepsilon_j)} - S_{(\frac{\varepsilon_j}{2})})| * P_j$$
$$= C\left|\frac{1}{\varepsilon_j}\left|G_j^n \bigcap \operatorname{supp} S_{(\varepsilon_j)}\right| - \frac{2}{\varepsilon_j}\left|G_j^n \bigcap \operatorname{supp} S_{(\frac{\varepsilon_j}{2})}\right|\right| * P_j,$$

т.е. чтобы оценить сокращение в $\chi_{G_j^n} * \phi_j$, достаточно рассмотреть изменение меры множества G_j^n на носителе функций $S_{(\varepsilon_j)}$ и $S_{(\frac{\varepsilon_j}{2})}$ соответственно (выбор функций ϕ_j обусловлен именно этим соображением).

Множество G_j^n целиком лежит в $E_j = \bigcup\limits_{\nu=1}^{2^j} J_j^\nu$; ту его часть, которая лежит в сегменте J_j^ν, обозначим через $\mathcal{G}_j^\nu$, т.е. $G_j^n = \bigcup\limits_{\nu=1}^{2^j} \mathcal{G}_j^\nu$. Положим теперь

$$\Delta_j(t) = \operatorname{supp} S_{(\varepsilon_j)}(\cdot - t) = \left[t - \frac{1}{2}\varepsilon_j, t + \frac{1}{2}\varepsilon_j\right], \quad t \in [0,1],\ j \in \mathbb{N},$$

при этом $\frac{1}{2}\Delta_j(t) = \operatorname{supp} S_{(\frac{\varepsilon_j}{2})}(t - \cdot)$.

6.1. Равномерность распределения интервалов из $\mathcal{G}_j^n$. Оценка меры $\left|\operatorname{supp} S_{(\varepsilon_j)}(t-\cdot) \bigcap G_j^n\right|$.

Рассмотрим различные случаи расположения промежутка $\Delta_j(t)$ относительно множества G_j^n.

Разобьем множество $\Delta_j(t) \bigcap G_j^n$ на две части, которые мы обозначим через $\mathcal{G}_j^l(t)$ и $\mathcal{G}_j^r(t)$ по следующему правилу.

1. $\left|\Delta_j(t) \bigcap G_j^n\right| = 0$. В этом случае $\Delta_j(t)$ попадает в особо крупный интервал из G_j^o, и $\mathcal{G}_j^l(t) = \mathcal{G}_j^r(t) := \emptyset$.

2. $\left|\Delta_j(t)\bigcap\mathcal{G}_j^\nu\right|\neq 0$ **для некоторого** $\nu=1,\dots,2^j$**.** Промежуток $\Delta_j(t)$ имеет пересечение ненулевой длины в точности с одним сегментом j-го поколения. Положим

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}_j^r(t):=\Delta_j(t)\bigcap\mathcal{G}_j^\nu;\\&\mathcal{G}_j^l(t):=\varnothing,\end{aligned}$$

если левый конец отрезка J_j^ν лежит в $\Delta_j(t)$, и

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}_j^l(t):=\Delta_j(t)\bigcap\mathcal{G}_j^\nu;\\&\mathcal{G}_j^r(t):=\varnothing\end{aligned}$$

в противном случае.

3. $\left|\Delta_j(t)\bigcap\mathcal{G}_j^\nu\right|\neq 0$ **и** $\left|\Delta_j(t)\bigcap\mathcal{G}_j^{\nu+1}\right|\neq 0$ **для некоторого** $\nu=1\dots2^j-1$**.** Промежуток $\Delta_j(t)$ имеет пересечение ненулевой длины в точности с двумя сегментами j-го поколения. Положим тогда

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}_j^l(t):=\Delta_j(t)\bigcap\mathcal{G}_j^\nu;\\&\mathcal{G}_j^r(t):=\Delta_j(t)\bigcap\mathcal{G}_j^{\nu+1}.\end{aligned}$$

Заметим, наконец, что $\Delta_j(t)$ имеет непустое пересечение не более чем с одним интервалом из G_j^o; если такой интервал существует, то обозначим его через $I_{m_c(j,t)}^{\nu_c(t)}$. Если $\Delta_j(t)\bigcap G_j^o=\varnothing$, то это означает, что $\Delta_j(t)=J_j^\nu$ для некоторого $\nu=1\dots2^j$. Обозначим в таком случае через $I_{m_c(j,t)}^{\nu_c(t)}$ ближайший к J_j^ν интервал из G_{j-1}^o, т.е. $I_{m_c(j,t)}^{\nu_c(t)}=I_{m(j,t)}^{\nu_1}$ (см. обозначения в п. 3.1).

Чтобы оценить меру пересечения $\Delta_j(t)\bigcap G_j^n=\mathcal{G}_j^l(t)\bigcup\mathcal{G}_j^r(t)$, заметим, что множества $\mathcal{G}_j^\nu$ симметричны (относительно центра сегмента J_j^ν) и конгруэнтны по ν. Зафиксируем какой-нибудь сегмент j-го поколения, например J_j^1. Мы можем "пересадить" множество $\mathcal{G}_j^l(t)$ на правый конец множества $\mathcal{G}_j^1$ и множество $\mathcal{G}_j^r(t)$ на левый конец $\mathcal{G}_j^1$, т.е. найдутся такие сдвиги $d_l(t),d_r(t)$ ($d_l(t)=\mathrm{dist}(\mathcal{G}_j^l(t),0)-\varepsilon_j+\mathrm{diam}(\mathcal{G}_j^l(t))$, $d_r(t)=\mathrm{dist}(\mathcal{G}_j^r(t),0)$), что $\widetilde{\mathcal{G}}_j^l(t)\bigcup(\widetilde{\mathcal{G}}_j^r(t)\subset\mathcal{G}_j^1$, где

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{G}}_j^l(t)=\{x-d_l(t):x\in\mathcal{G}_j^l(t)\};\\&\widetilde{\mathcal{G}}_j^r(t)=\{x-d_r(t):x\in\mathcal{G}_j^r(t)\}.\end{aligned}$$

Кроме того, множества $\widetilde{\mathcal{G}}_j^l(t)$ и $\widetilde{\mathcal{G}}_j^r(t)$ отделены друг от друга промежутком $I(t)$ длины $\varepsilon_j - \mathrm{diam}(\mathcal{G}_j^l(t)) - \mathrm{diam}(\mathcal{G}_j^r(t)) = |I_{m_c(j,t)}^{\nu_c(t)} \bigcap \Delta_j(t)|$. Отсюда мы получаем, что

$$|\widetilde{\mathcal{G}}_j^l(t)| + |\widetilde{\mathcal{G}}_j^r(t)| = |\mathcal{G}_j^l(t)| + |\mathcal{G}_j^r(t)| = |\mathcal{G}_j^1| - |I(t) \bigcap \mathcal{G}_j^1|,$$

т.е. для оценки длины $\left|\Delta_j(t) \bigcap G_j^n\right|$ достаточно уметь оценивать длину множества $\mathcal{G}_j^1 \bigcap I$, где I – произвольный промежуток, лежащий в J_j^1. Эта оценка обеспечивается следующей леммой.

Лемма 4. *Для произвольного $j \in \mathbb{N}$ и промежутка $I \subset J_j^1$ верна оценка*

$$|\mathcal{G}_j^1 \bigcap I| \leqslant 4|I| \sum_{k=j}^{\infty} q_k + \delta_j.$$

Доказательство. Найдем такое число $k \in \mathbb{N}$, что $\varepsilon_{k+1} \leqslant |I| \leqslant \varepsilon_k$, при этом, очевидно, $k \geqslant j$. Тогда I пересекается не более, чем с двумя сегментами вида J_k^λ и одним интервалом из $\mathcal{G}_j^1$, лежащими внутри J_j^1. Обозначим эти сегменты через J_l и J_r, а интервал через I_c (один или оба этих сегмента, или интервал могут быть пустыми множествами). Тогда, очевидно, $I \subset J_l \bigcup J_r \bigcup I_c$, и

$$|\mathcal{G}_j^1 \bigcap I| \leqslant |\mathcal{G}_j^1 \bigcap \left(J_l \bigcup J_r \bigcup I_c\right)| \leqslant |\mathcal{G}_j^1 \bigcap J_l| + |\mathcal{G}_j^1 \bigcap J_r| + |I_c|.$$

Осталось заметить, что из построения множества E следует, что $|\mathcal{G}_j^1 \bigcap J_k^\lambda| \leqslant \varepsilon_k \cdot \sum\limits_{k=j}^{\infty} q_k$, кроме того $|I_c| \leqslant \delta_j$. Отсюда получаем неравенство

$$|\mathcal{G}_j^\nu \bigcap I| \leqslant 2\varepsilon_k \cdot \sum_{k=j}^{\infty} q_k + \delta_j \leqslant 4|I| \sum_{k=j}^{\infty} q_k + \delta_j. \qquad \square$$

Учитывая вышеизложенное, мы получаем следующий факт.

Следствие 1. *Для произвольной точки $t \in \mathbb{R}$ и числа $j \in \mathbb{N}$ верна оценка*

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_j^1| \geqslant \left|\Delta_j(t) \bigcap G_j^n\right| &= |\widetilde{\mathcal{G}}_j^l(t)| + |\widetilde{\mathcal{G}}_j^r(t)| \\ &\geqslant |\mathcal{G}_j^1| - \left(\delta_j + 4\min\left(\varepsilon_j, \left|I_{m_c(j,t)}^{\nu_c(j,t)}\right|\right) \sum_{j=i}^{\infty} q_i\right). \end{aligned}$$

6.2. Равномерность распределения интервалов из $\mathcal{G}_j^n$. Оценка меры $\left|\operatorname{supp} S_{\left(\frac{\varepsilon_j}{2}\right)}(t-\cdot)\bigcap G_j^n\right|$.

Заметим сразу, что

$$\begin{aligned}|\operatorname{supp} S_{\left(\frac{\varepsilon_j}{2}\right)} \setminus \operatorname{supp} S_{(\varepsilon_{j+1})}| &= \left|\frac{1}{2}\Delta_j(t) \setminus \Delta_{j+1}(t)\right| \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} = \frac{1}{2}(\delta_j + 2\varepsilon_{j+1}) - \varepsilon_{j+1} = \frac{1}{2}\delta_j,\end{aligned}$$

поэтому мы можем оценивать меру $|\operatorname{supp} S_{(\varepsilon_{j+1})}(t-\cdot)\bigcap G_j^n|$. Далее, мы имеем

$$\operatorname{supp} S_{(\varepsilon_{j+1})}(t-\cdot)\bigcap G_j^n = \Big(\Delta_{j+1}(t)\bigcap G_{j+1}^n\Big)\bigcup\Big(\Delta_{j+1}(t)\bigcap (G_j^n \setminus G_{j+1}^n)\Big).$$

Множество $G_j^n \setminus G_{j+1}^n$ состоит из интервалов j-го поколения длины δ_j, и $\Delta_{j+1}(t)$ пересекается не более чем с одним подобным интервалом, так что достаточно оценить величину $|\Delta_{j+1}(t)\bigcap G_{j+1}^n|$. Применяя следствие 1, получаем

$$|\Delta_{j+1}(t)\bigcap G_{j+1}^n| \geqslant |\mathcal{G}_{j+1}^1| - \left(\delta_{j+1} + 4\min\left(\varepsilon_{j+1}, \left|I_{m_c(j+1,t)}^{\nu_c(j+1,t)}\right|\right)\sum_{j=i}^{\infty} q_i\right)$$

и, учитывая, что $\mathcal{G}_j^1 = \mathcal{G}_{j+1}^1 \bigcup \mathcal{G}_{j+1}^2 \bigcup I_j^1$, мы имеем

$$\begin{aligned}\left|\chi_{G_j^n} * \left(S_{(\varepsilon_j)} - S_{\left(\frac{\varepsilon_j}{2}\right)}\right)\right|(t) &= \left|\frac{1}{\varepsilon_j}\left|G_j^n \bigcap \Delta_j(t)\right| - \frac{2}{\varepsilon_j}\left|G_j^n \bigcap \frac{1}{2}\Delta_j(t)\right|\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{\varepsilon_j}\left|G_j^n\bigcap\Delta_j(t)\right| - \frac{2}{\varepsilon_j}\left|G_j^n\bigcap\Delta_{j+1}(t)\right|\right| + \frac{2}{\varepsilon_j}\cdot\frac{\delta_j}{2} \\ &\leqslant \left|\frac{1}{\varepsilon_j}\left|\mathcal{G}_j^1\right| - \frac{2}{\varepsilon_j}\left|\Delta_{j+1}(t)\bigcap G_{j+1}^n\right|\right| + \frac{2}{\varepsilon_j} \\ &\times\left(\frac{3\delta_j}{2} + \delta_j + 4\min\left(\varepsilon_j, \left|I_{m_c(j,t)}^{\nu_c(j,t)}\right|\right)\sum_{j=i}^{\infty} q_i\right) \\ &\leqslant \left|\frac{1}{\varepsilon_j}\left|\mathcal{G}_j^1\right| - \frac{2}{\varepsilon_j}\left|\mathcal{G}_{j+1}^1\right|\right| + 5q_j + 2q_{j+1} \\ &+ C\min\left(1, 2^j\left(|I_{m_c(j,t)}^{\nu_c(j,t)}| + |I_{m_c(j+1,t)}^{\nu_c(j+1,t)}|\right)\right)\sum_{j=i}^{\infty} q_i\end{aligned} \tag{29}$$

$$\leqslant C_1(q_j+q_{j+1})+C_2\min\left(1,2^j\left(|I^{\nu_c(j,t)}_{m_c(j,t)}|+|I^{\nu_c(j+1,t)}_{m_c(j+1,t)}|\right)\right)\sum_{j=i}^{\infty}q_i.$$

6.3. Оценка длин интервалов $I^{\nu_c(j,t)}_{m_c(j,t)}$ и $I^{\nu_c(j+1,t)}_{m_c(j+1,t)}$.

Нам будет удобно оценить меру $|I^{\nu_c(j,t)}_{m_c(j,t)}|$ через длины интервалов вида $I^{\nu_1(j,t)}_{m(j,t)}$ и длины интервалов $(j-1)$-го и j-го поколений. Для этого каждой точке $t\in\mathbb{R}$ поставим во взаимнооднозначное соотвествие сегмент j-го поколения $J^{\nu(t)}_j$ по следующему правилу.

(1) Пусть $t\in J^{\nu}_j$ для некоторого $\nu=1\dots 2^j$. Положим тогда $J^{\nu(t)}_j=J^{\nu}_j$.

(2) Пусть $t\notin E_j=\bigcup_{\nu=1}^{2^j}J^{\nu}_j$. В этом случае через $J^{\nu(t)}_j$ мы обозначим ближайший к точке t сегмент j-го поколения (если t находится в точности в центре какого-нибудь интервала из G^o_j, то мы возьмем ближайший к ней справа).

Из определения интервала $I^{\nu_c(j,t)}_{m_c(j,t)}$, таким образом, следует, что либо он будет принадлежать $(j-1)$-му поколению интервалов, либо j-му поколению, либо он будет ближайшим к сегменту $J^{\nu(t)}_j$ интервалом старшего ($I^{\nu_c(j,t)}_{m_c(j,t)}\subset G^o_{j-1}$) поколения. Рассуждая аналогично для $I^{\nu_c(j+1,t)}_{m_c(j+1,t)}$, мы получаем

$$|I^{\nu_c(j,t)}_{m_c(j,t)}|+|I^{\nu_c(j+1,t)}_{m_c(j+1,t)}|\leqslant 2\delta_{j-1}+2\delta_j+2\delta_{j+1}+2\delta_{m(j,t)},$$

и неравенство (29) влечет оценку

$$\begin{aligned}&\left|\chi_{G^n_j}*\left(S_{(\varepsilon_j)}-S_{\left(\frac{\varepsilon_j}{2}\right)}\right)\right|(t)\\ &\quad\leqslant C_1(q_j+q_{j+1})+C_3 2^j\left(\delta_{j-1}+\delta_j+\delta_{j+1}+\delta_{m(j,t)}\right)\sum_{j=i}^{\infty}q_i\\ &\quad\leqslant C_4(q_{j-1}+q_j+q_{j+1})+C_3\min(1,2^j\delta_{m(j,t)})\cdot\sum_{j=i}^{\infty}q_i.\end{aligned}\tag{30}$$

6.4. Завершение доказательства неравенства (19c)**.**

Заметим сначала, что

$$\left|\chi_{G^n_j}*\left(S_{(\varepsilon_j)}-S_{\left(\frac{\varepsilon_j}{2}\right)}\right)\right|(t)=0,\quad t\notin F_j:=\bigcup_{\nu=1}^{2^j}4J^{\nu}_j,$$

и $[0,1] = \bigcup\limits_{\nu=1}^{2^j} J_j^\nu \bigcup G_j^o$.
Из оценки (30) следует неравенство

$$\begin{aligned}
s_j(x_0) &= \left(\left|\chi_{G_j^n} * \phi_j\right| * P_j\right)(x_0) \\
&\leqslant C_1 \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{F_j}(t) \left|\chi_{G_j^n} * \left(S_{(\varepsilon_j)} - S_{\left(\frac{\varepsilon_j}{2}\right)}\right)\right|(t) P_j(x_0 - t) dt \\
\leqslant C_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{F_j}(t) &\left(q_{j-1} + q_j + q_{j+1} + \min(1, 2^j \delta_{m(j,t)}) \cdot \sum_{i=j}^{\infty} q_i\right) P_j(x_0 - t)\, dt \\
\leqslant C_2(q_{j-1} + q_j + q_{j+1}) &+ C_2 \sum_{i=j}^{\infty} q_i \cdot \int\limits_{F_j} \min(1, \left(2^j \delta_{m(j,t)}\right)) P_j(x_0 - t)\, dt \\
&= C_2(q_{j-1} + q_j + q_{j+1}) \\
&+ C_2 \sum_{i=j}^{\infty} q_i \cdot \sum_{\nu=1}^{2^j} \int\limits_{4J_j^\nu} \min(1, \left(2^j \delta_{m(j,t)}\right)) P_j(x_0 - t)\, dt. \qquad (31)
\end{aligned}$$

Легко заметить, что величину $C_2 \sum\limits_{i=j}^{\infty} q_i$ мы можем сделать сколь угодно малой, необходимо лишь соответственно уменьшить постоянную C_q из (13), а тогда из неравенств (31) и (28) следует оценка (19c). Теорема 1 доказана.

§7. Точки плотности канторовского множества и оценка длины множества точек Бургейна, вспомогательные утверждения

7.1. Доказательство теоремы 2. Зафиксировав положительное число d, найдем (полагая d достаточно малым) такое число $k \in \mathbb{N}$, что $\varepsilon_{k+1} \leqslant 2d \leqslant \varepsilon_k$. В таком случае отрезок $[x_0 - d, x_0 + d]$ пересекается не более, чем с двумя сегментами вида J_k^ν (а именно $J_k^{\lambda(x_0)}$ и $J_k^{\lambda(x_0)+1}$), и мы можем записать неравенство

$$\frac{|[x_0-d,x_0+d]\bigcap E|}{2d}=\frac{2d-|[x_0-d,x_0+d]\bigcap([0,1]\setminus E)|}{2d}$$
$$\geqslant\frac{2d-|(J_k^{\lambda(x_0)+1}\bigvee J_k^{\lambda(x_0)}\bigvee I_{k-1}^{\nu_2(k,x_0)}\bigvee([x-d,x+d]\bigcap I_{m(k,x_0)}^{\nu_1(k,x_0)}))\bigcap([0,1]\setminus E)|}{2d}$$
$$\geqslant 1-\frac{2\varepsilon_k\sum\limits_{j=k}^{\infty}q_j+\delta_{k-1}+\min(\delta_{m(k,x_0)},2d)}{2d}$$
$$\geqslant 1-2^k(2\varepsilon_k\sum_{j=k}^{\infty}q_j+\delta_{k-1})-\min(2^k\delta_{m(k,x_0)},1).$$

Отсюда мы сразу получаем, что из (19a), (19b) следует, что x_0 – точка плотности совершенного множества E. С другой стороны, мы имеем

$$\frac{|[x_0-d,x_0+d]\bigcap E|}{2d}=\frac{2d-|[x_0-d,x_0+d]\bigcap([0,1]\setminus E)|}{2d}$$
$$\leqslant 1-\frac{[x_0-d,x_0+d]\bigcap I_{m(k+1,x_0)}^{\nu_1(k+1,x_0)}}{2d}\leqslant 1-\frac{1}{8}\min(2^{k+1}\delta_{m(k+1,x_0)},1)$$

для $\frac{2}{3}\varepsilon_k\leqslant d\leqslant\varepsilon_k$; эта оценка доказывает обратное утверждение. $\square$

7.2. Замечание о мере множества точек Бургейна функции χ_E, лежащих в E.

Несмотря на то, что дать оценку длины множества точек Бургейна в конкретном случае представляется по-видимому затруднительным, нетрудно понять, что множество B-точек (а также точек конечной вариации), принадлежащих E, может иметь либо полную либо нулевую меру.

Действительно, рассмотрим пространство Ω, состоящее из бесконечных двоичных последовательностей, и событие $\mathcal{B}$, состоящее в том, что точка $x\in\Omega$ является точкой Бургейна функции χ_E. Поскольку ряд в (8) сходится или расходится независимо от поведения конечного числа его членов, событие $\mathcal{B}$ лежит в хвостовой σ-алгебре, порожденной последовательностью величин, принимающих значение 0 или 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$, так что вероятность события $\mathcal{B}$ сама равна либо нулю либо единице.

Вероятностная мера, заданная стандартным образом (как произведение мер) на Ω, т.е. на канторовском множестве E, является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега в силу того, что $|E|>0$, поэтому и лебегова мера множества $\{x\in E:(\mathrm{Mvar}\,\chi_E)(x)<\infty\}$ равна либо нулю, либо единице. Сказать что-то более конкретное получается в том случае, когда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k$ сходится достаточно быстро (т.е. множество E “не очень пористое”), точную формулировку дает следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Пусть последовательность* $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ *такова, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{q_k} < \infty.$$

Тогда

$$|\{x \in E : (\mathrm{Mvar}\, \chi_{_E})(x) < \infty\}| = |E|.$$

Доказательство. Обозначим буквой P стандартную вероятностную меру, заданную на множестве бесконечных двоичных последовательностей. Из вышеизложенного ясно, что достаточно доказать неравенство

$$P\{x \in E : (\mathrm{Vvar}\, \chi_{_E})(x) < \infty\} > \varepsilon \tag{32}$$

для какого-нибудь положительного ε. Мы имеем

$$2^{n_{k+1}(x)-n_k(x)} q_{n_k(x)-1} = 2^{n_{k+1}(x)-n_k(x)+\frac{1}{2}\log_2 q_{n_k(x)-1}} \sqrt{q_{n_k(x)-1}}, \quad x \in E,$$

при этом (так как приращения n_k независимы и $P\{n_{k+1} - n_k = N\} = 2^{-N-1}$, $N \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} P\{x \in E : n_{k+1}(x) - n_k(x) + \frac{1}{2}\log_2 q_{n_k(x)-1} < 0\} \\ \geqslant 1 - C 2^{\frac{1}{2}\log_2 q_{n_k(x)-1}} = 1 - \sqrt{q_{n_k(x)-1}}. \end{aligned}$$

Поскольку $n_{k+1} - n_k \geqslant 1$, а сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$ можно сделать сколь угодно малой, мы немедленно видим, что

$$\begin{aligned} &P\{x \in E : (\mathrm{Vvar}\, \chi_{_E})(x) < \infty\} \\ &\quad = P\{x \in E : \sum_{k=1}^{\infty} 2^{n_{k+1}(x)-n_k(x)} q_{n_k(x)-1} < \infty\} \\ &\quad \geqslant P\{x \in E : n_{k+1}(x) - n_k(x) + \frac{1}{2}\log_2 q_{n_k(x)-1} < 0, \ \forall k \in \mathbb{N}\} \\ &\quad \geqslant 1 - C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{q_{n_k(x)-1}} \geqslant \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

для некоторого положительного числа ε (на самом деле видно, что разность $1-\varepsilon$ можно сделать сколь угодно малой). $\square$

Лемма 5. *Положим*

$$B_{\mu,\phi} = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu * \phi_j| * P_j,$$

где функции ϕ_j определены в п. 3.3. *Тогда для любого конечного заряда μ на $\mathbb{R}$ верна оценка*

$$\frac{1}{C} B_{\mu,\phi} \leqslant \operatorname{Mvar}\mu \leqslant C B_{\mu,\phi}, \tag{33}$$

где $C > 1$ – абсолютная постоянная.

Доказательство леммы 5 приведено в работе [1].
Теперь мы докажем лемму 3.

Доказательство. Мы имеем

$$\phi_j = (S_{(\varepsilon_j)} - S_{(\varepsilon_j/2)}) * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})} = S_{(\varepsilon_j)} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})} - S_{(\varepsilon_j/2)} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})},$$

при этом $\operatorname{supp}(S_{(\varepsilon_j)} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})}(x-\cdot)) \subset [x - \frac{5}{8}\varepsilon_j, x + \frac{5}{8}\varepsilon_j]$, и $\operatorname{supp}(S_{(\varepsilon_{\frac{j}{2}})} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})}(x-\cdot)) \subset [x - \frac{3}{8}\varepsilon_j, x + \frac{3}{8}\varepsilon_j]$. Отсюда мы получаем, что для точек $x \in \mathbb{R}$ таких, что $\operatorname{dist}(x, I) \in [\frac{9}{16}\varepsilon_j, \frac{5}{8}\varepsilon_j]$, верна оценка

$$|\chi_I * \phi_j|(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_I(t)(S_{(\varepsilon_j)} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})})(x-t)\,dt =$$

$$\int_I (S_{(\varepsilon_j)} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})})(x-t)\,dt \leqslant \int_{\{t: t\in I,\, \operatorname{dist}(t, \mathbb{R}\setminus I \leqslant \frac{1}{16}\varepsilon_j)\}} (S_{(\varepsilon_j)} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})})(x-t)\,dt.$$

Осталось заметить, что

$$(S_{(\varepsilon_j)} * \Phi_{(\frac{\varepsilon_j}{4})})(x-t) \geqslant \frac{1}{2\varepsilon_j}$$

при $x \in \mathbb{R}$ таких, что $\operatorname{dist}(x, I) \in [\frac{9}{16}\varepsilon_j, \frac{5}{8}\varepsilon_j]$ и $t \in I$, $\operatorname{dist}(t, \mathbb{R}\setminus I \leqslant \frac{1}{16}\varepsilon_j)$, поэтому

$$|\chi_I * \phi_j|(x) \geqslant \frac{1}{32}\min(|I| \cdot \frac{1}{\varepsilon_j}, 1)$$

и

$$|H_{\phi_j}| \geqslant |\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(x, I) \in [\frac{9}{16}\varepsilon_j, \frac{5}{8}\varepsilon_j]\}| \geqslant \frac{\varepsilon_j}{20}. \quad \square$$

Список литературы

1. П. А. Мозоляко, *Об определении точек Бургейна борелевского заряда на вещественной прямой.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **389** (2011), 191–205.
2. J. Bourgain, *On the radial variation of bounded analytic functions on the disc.* — Duke Math. J., **3**, Vol. 69 (1993), 671–682.
3. Ж. Бургейн, *Ограниченность вариации свёрток мер.* — Матем. заметки, **54**, No. 4 (1993), 25–34.
4. A. Cantón, J. L. Fernández, D. Pestana, J. M. Rodríguez, *On harmonic functions on trees.* — Potential Anal., **15**, No. 3 (2001), 199–244.
5. P. W. Jones, P. F. X. Müller, *Radial variation of Bloch functions.* — Math. Res. Lett., **4(2-3)** (1997), 395–400.
6. M. Holschneider, Ph. Tchamitchian, *Pointwise analysis of Riemann's "nondifferentiable" function.* — Inventiones Mathematicae, **1**, Vol. 105 (1991), 159–175.
7. П. А. Мозоляко, В. П. Хавин, *Конечность вариации положительной гармонической функции вдоль нормалей к границе.* — Алгебра и анализ, **28:3** (2016), 67–110; St. Petersburg Math. J., **28:3** (2017), 345–375.
8. P. F. X. Müller, K. Riegler, *Radial variation of Bloch functions on the unit ball of* $\mathbb{R}^d$. — Ark. Mat., **58**, No. 1 (2020), 161–178.
9. M. D. O'Neill, *Vertical variation of harmonic functions in upper half spaces.* — Colloq. Math., **87** (2001), 1–12.
10. W. Rudin, *The radial variation of analytic functions.* — Duke Math. J., **22** (1955), 235–242.
11. W. Rudin, *Tauberian theorems for positive harmonic functions.* — Nederl. Acad. Wetensch. Indig. Math., **40** (1978), 376–384.

Mozolyako P. A. B-points of a Cantor-type set.

In this note we study the behavior of the harmonic continuation u to the upper half-plane for the characteristic function of a Cantor-type set E of positive length, which is precisely the harmonic measure of such a set, near the boundary. We are interested in the description of points $x \in E$ (given in terms of their Cantor encoding) such that the mean variation of u along $[x, x+i]$ – a certain weighted average of variations along $[x, x+t+i]$, $t \in \mathbb{R}$ – is finite.

ФМКН СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pmzlcroak@gmail.com

Поступило 25 июля 2022 г.