Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

М. С. Кузнецова, Н. А. Широков

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТИ, БЛИЗКОЙ К КРУГУ

Введение

Теорему Радо [1], стр. 60, можно трактовать следующим образом: если области G_1 и G_2 ограничены жордановыми кривыми и эти кривые достаточно близки в геометрическом смысле, то функции f_1 и f_2, конформно отображающие, соответственно, G_1 и G_2 на единичный круг $\mathbb{D}$ так, что $f_1(a) = f_2(a) = 0$, $f_1'(a) > 0$, $f_2'(a) > 0$, $a \in G_1 \cap G_2$, а точка a удалена от границ G_1 и G_2, близки тоже.

Количественное уточнение теоремы Радо при некоторых ограничениях на G_1 и G_2 дано в [2]. В частности, [2] содержит следующий результат (теорема 2).

Теорема А. *Пусть L – жорданова кривая, для которой выполнено следующее условие: существует гомеоморфизм χ между L и единичной окружностью $\mathbb{T}$ такой, что $|\chi(\zeta) - \zeta| \leqslant \epsilon$, $\zeta \in \mathbb{T}$, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Пусть G – внешность кривой L, функция f конформно отображает G на $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ так, что $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) > 0$. Тогда существует абсолютная постоянная A_0 такая, что*

$$|f(\chi(\zeta)) - \zeta| \leqslant A_0 \epsilon \log(\frac{1}{\epsilon}), \quad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{1}$$

В работе [2] получена оценка разности значений конформных отображений для двух областей, одна из которых ограничена квазиконформной кривой, и границы областей достаточно близки. Ограничений на локализацию участков границ, на которых эти границы различаются, не накладывалось.

В [3] понадобилась более сильная оценка разности конформных отображений в случае, когда области различаются в окрестности малой дуги.

Ключевые слова: конформные отображения, квазиконформные отображения, теорема Радо.

Второй автор был поддержан грантом РФФИ 20-01-00209.

В настоящей работе рассматривается вопрос об отклонении от тождественного отображения конформного отображения области, отличающейся от единичного круга в конечном числе областей малого диаметра.

§1. Формулировка результата

Пусть $0 \leqslant \theta_1 < \ldots < \theta_m < \pi < \theta_{m+1} < \ldots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$, $n \geqslant 2$.

Предположим также, что $\theta_k - \theta_{k-1} \geqslant c_0 > 0$ при $k \leqslant m$ или $k \geqslant m+2$, $\pi - \theta_m \geqslant c_0$, $\theta_{m+1} - \pi \geqslant c_0$. Далее нам еще понадобятся величины α_k и δ_k, удовлетворяющие неравенствам $B_1^{-1}\alpha \leqslant \alpha_k \leqslant B_1\alpha$, $\alpha > 0$, $B_1 > 0$, $B_2^{-1}\delta \leqslant \delta_k \leqslant B_2\delta$, $\delta > 0$, $B_2 > 0$, $\alpha \leqslant c_0' c_0$, $\delta \leqslant c_*\alpha$, $\delta_k \leqslant \frac{1}{2}\alpha_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, $\alpha_k \leqslant \frac{1}{10}c_0$.

Введем множества $G_k \stackrel{def}{=} \{z = re^{i\theta} \,:\, |r-1| \leqslant \delta_k,\, |\theta - \theta_k| \leqslant \alpha_k\}$, $k = 1, \ldots n$. Для $z = e^{i\theta}$, $z \notin G_k$, обозначим через $d_k(z)$ длину наименьшей дуги $\mathbb{T}$ между z и G_k. Положим $\theta_k^* = \frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1})$, $\theta_0^* = \theta_n^*$, $\Gamma_k = \{z = e^{i\theta} \,:\, \theta_k^* \leqslant \theta \leqslant \theta_{k+1}^*\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пусть D – жорданова область такая, что $\overline{D} \triangle \overline{\mathbb{D}} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$. Функция f конформно отображает D на $\mathbb{D}$ так, что $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, g – обратная функция к f.

Теорема. *Существуют постоянные c_1, c_2, c_3 такие, что при выборе c_0' и c_* достаточно малыми, зависящими только от A_0 из (1), c_0, B_1, B_2, при $k = 1, \ldots n$, $z = e^{i\theta} \in \Gamma_{k-1}$, $|\theta - \theta_k| \geqslant \alpha_k + 2\delta_k$, выполнено соотношение*

$$|f(z) - z| \leqslant c_1\alpha\delta \cdot \frac{1}{d_k(z) + \alpha} \cdot \log\left(\frac{2(d_k(z) + \alpha)}{d_k(z) + \delta}\right) + c_2\frac{\delta^2}{\alpha} + c_3\alpha\delta \qquad \text{(I)}$$

а при $z \in \partial D$, $|\arg z - \theta_k| \leqslant \alpha_k + 2\delta_k$ имеет место оценка

$$|f(z) - z| \leqslant 2\alpha_k. \qquad \text{(II)}$$

§2. Перевод ситуации в полуплоскость и предварительные рассуждения

Обозначим $w(z) = i \cdot \frac{1-z}{1+z}$. Функция w конформно отображает $\overline{\mathbb{D}}$ на верхнюю замкнутую полуплоскость $\mathbb{C}_+$ так, что $w(0) = i$, $w(-1) = \infty$; $p(w) = \frac{1+iw}{1-iw}$ – обратное к $w(z)$ отображение.

Положим $\widetilde{\Pi}_k \overset{def}{=} w(G_k)$, а через Π_k обозначим наименьший прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, такой, что $\widetilde{\Pi}_k \subset \Pi_k$, $k = 1, 2, \dots n$. Пусть

$$\Pi_k \overset{def}{=} \{\zeta = x + iy \,:\, |x - x_k| \leqslant a_k,\, |y| \leqslant b_k\}, \quad \widetilde{G_k} \overset{def}{=} p(\Pi_k).$$

При достаточно малом c_* будет выполнено включение $\widetilde{G_k} \cap \mathbb{T} \subset \{z = e^{i\theta} \,:\, |\theta - \theta_k| \leqslant \alpha_k + \frac{3}{2}\delta_k\}$. Определим кривые γ_l^- и γ_l^+, $1 \leqslant l \leqslant n$, следующим образом: $\gamma_l^- = \partial\widetilde{G_l} \cap \overline{\mathbb{D}}$, $\gamma_l^+ = \partial\widetilde{G_l} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Gamma_k \setminus \widetilde{G_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $z_0 \neq -1$.

Проведем следующее геометрическое построение.

Обозначим через $D_+(z_0)$ область, ограниченную частью границы ∂D от точки -1 до точки z_0, проходимую в отрицательном направлении, а на дуге ∂D от точки -1 до z_0, проходимой в положительном направлении, заменим дуги $\partial D \cap \widetilde{G_l}$ на дуги γ_l^+. Тогда $D \subset D_+(z_0)$. Обозначим через $f_{+,k}(z)$ функцию, конформно отображающую $\overline{D}_+(z_0)$ на $\overline{\mathbb{D}}$ так, что $f_{+,k}(0) = 0$, $f_{+,k}(-1) = -1$. Области D и $D_+(z_0)$ имеют на границе общую дугу от -1 до z_0, проходимую в отрицательном направлении, по принципу Монтеля [4], гл.1, длина дуги $\mathbb{T}$ от -1 до $f(z_0)$, проходимой в отрицательном направлении, будет не больше, чем длина дуги от -1 до $f_{+,k}(z_0)$, проходимой в отрицательном направлении. Обозначим через $D_{+-}(z_0)$ область, граница которой от -1 до z_0 в положительном направлении совпадает с границей области $D_+(z_0)$, а граница от -1 до z_0 в отрицательном направлении состоит из дуг γ_l^- (вместо дуг $\partial D \cap \widetilde{G_l}$) и дуг окружности $\mathbb{T}$ между ними. Тогда $D_{+-}(z_0) \subset D_+(z_0)$. Пусть функция $f_{+-,k}$ конформно отображает $D_{+-}(z_0)$ на $\mathbb{D}$ так, что $f_{+-,k}(0) = 0$, $f_{+-,k}(-1) = -1$. Области $D_+(z_0)$ и $D_{+-}(z_0)$ имеют общую дугу на границе от -1 до z_0, проходимую в положительном направлении, по принципу Монтеля дуга окружности $\mathbb{T}$ от -1 до $f_{+-,k}(z_0)$, проходимая в положительном направлении, не длиннее дуги от -1 до $f_{+,k}(z_0)$, проходимой в положительном направлении. Тогда длина дуги $\mathbb{T}$ от -1 до $f_{+-,k}(z_0)$, проходимой в отрицательном направлении, не короче длины дуги $\mathbb{T}$ от -1 до $f_{+,k}(z_0)$, проходимой в отрицательном направлении. Таким образом, длина дуги $\mathbb{T}$ от -1 до $f(z_0)$, проходимой в отрицательном направлении, не больше длины дуги $\mathbb{T}$ от -1 до $f_{+-,k}(z_0)$, проходимой в отрицательном направлении.

Обозначим через $D_{-+}(z_0)$ область, граница которой получена заменой дуг γ_l^- на границе области $D_{+-}(z_0)$ на дуги γ_l^+, а дуг γ_l^+ на границе области $D_{+-}(z_0)$ на дуги γ_l^-. Пусть функция $f_{-+,k}(z)$ конформно отображает область $D_{-+}(z_0)$ на $\mathbb{D}$ так, что $f_{-+,k}(0) = 0,\ f_{-+,k}(-1) = -1$. Рассуждая аналогично предыдущим действиям с областью $D_{+-}(z_0)$, получим, что длина дуги $\mathbb{T}$ от -1 до $f(z_0)$, проходимой в положительном направлении, не больше длины дуги $\mathbb{T}$ от -1 до $f_{-+,k}(z_0)$, проходимой в положительном направлении. Таким образом получаем, что $f(z_0)$ заведомо лежит на меньшей дуге с концами $f_{-+,k}(z_0)$ и $f_{+-,k}(z_0)$, если
$A_0 \cdot \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \delta_j \cdot \log \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \delta_j} < 0.1$, где A_0 – постоянная из (1).

Для $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ через $d(z_1, z_2)$ обозначим длину наименьшей дуги окружности $\mathbb{T}$ с концами в этих точках. Пусть $d_{+-}(z_0) = d(f_{+-,k}(z_0), z_0)$, $d_{-+}(z_0) = d(f_{-+,k}(z_0), z_0)$. В результате вышеизложенных рассуждений получаем, что

$$d(f(z_0), z_0) \leqslant \max(d_{+-}(z_0), d_{-+}(z_0)) \tag{2}$$

Соотношение (2) показывает, что теорема будет доказана, если соответствующие неравенства доказать для любого k и функций $f_{+-,k}$ и $f_{-+,k}$ с постоянными, не зависящии от k и выбора функций.

Продолжим геометрические построения.

Положим $w(D_{+-}(z_0)) = U_{+-}(z_0)$, $w(D_{-+}(z_0)) = U_{-+}(z_0)$, пусть функции $\phi_{+-,k}\, \phi_{-+,k}$ конформно отображают, соответственно, области $U_{+-}(z_0)$ и $U_{-+}(z_0)$ на $\mathbb{C}_+$ так, что $\phi_{+-,k}(i) = \phi_{-+,k}(i) = i$; $F_{+-,k}$ и $F_{-+,k}$ – обратные к $\phi_{+-,k}$ и $\phi_{-+,k}$ отображения. Определим $w(\gamma^\pm) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_l^\pm$, $1 \leqslant l \leqslant n$, $\Pi_l^\pm = \Pi^\pm(x_l, a_l, b_l)$, где $\Pi^\pm(x_l, a_l, b_l)$ – объединение отрезков $[x_l - a_l, x_l - a_l \pm ib_l]$, $[x_l + a_l, x_l + a_l \pm ib_l]$ и $[x_l - a_l \pm ib_l, x_l + a_l \pm ib_l]$, знак $+$ или $-$ выбирается таким же, как в $\Pi_l^\pm$.

В дальнейших рассуждениях упростим обозначения, опуская знаки $+, -$ и индекс k, рассматривая любой набор из $+, -$ и получая оценки, не зависящие от конкретного набора. Таким образом, предшествующие обозначения примут вид U, ϕ, F, обозначим через $f_0(z)$ функцию $f_{+-,k}$ или $f_{-+,k}$ соответственно. Поскольку $f_0(z) = p(\phi(w(z)))$, выведем оценку для $\phi(\zeta) - \zeta$.

Определим числа ω_l, λ_l, β_l, $\beta_{l1} \in \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\phi(x_l - a_l \pm ib_l) = \omega_l - \lambda_l, \qquad \phi(x_l + -a_l \pm ib_l) = \omega_l + \lambda_l, \tag{3}$$

$$\phi(x_l - a_l) = \omega_l - \lambda_l - \beta_l, \qquad \phi(x_l + a_l) = \omega_l + \lambda_l + \beta_{l1}, \tag{4}$$

Пусть

$$\Gamma \stackrel{def}{=} (-\infty, x_{m+1} - a_{m+1}] \cup [x_{m+1} + a_{m+1}, x_{m+2} - a_{m+2}] \cup \ldots$$

$$\cup [x_{n-1} + a_{n-1}, x_n - a_n] \cup [x_n + a_n, x_1 - a_1] \cup [x_1 + a_1, x_2 - a_2] \cup \ldots$$

$$\cup [x_{m-1} + a_{m-1}, x_m - a_m] \cup [x_m + a_m, +\infty) \cup \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k. \quad (5)$$

Для любых точек ζ_1, ζ_2, $\zeta_3 \in \Gamma$ таких, что ζ_3 лежит между ζ_1 и ζ_2, при $b_l \leqslant \frac{1}{2}a_l$, $1 \leqslant l \leqslant n$, выполнено соотношение

$$\left| \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \right| \leqslant T, \quad \text{где} \quad T = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (6)$$

По теореме Л. Альфорса–А. Бёрлинга [5], гл.4 конформное отображение ϕ области, ограниченной кривой Γ и лежащей над ней, на верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ можно продолжить на всю плоскость как K-квазиконформное отображение, где K – постоянная, зависящая только от T. Сохраним для этого отображения обозначение ϕ. По теореме Белинского [6] существует $D = D(K)$ такое, что для любых $A \in \mathbb{C}$, $r > 0$ и для $S_r(A) \stackrel{def}{=} \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - A| = r\}$ справедливо соотношение

$$\max_{\zeta \in S_r(A)} |\phi(\zeta) - \phi(A)| \leqslant D \min_{\zeta \in S_r(A)} |\phi(\zeta) - \phi(A)|. \quad (7)$$

В нашем случае, так как K – абсолютная постоянная, то D – абсолютная постоянная. Возьмем в качестве A любую точку $x_l - a_l + ib_l$, $1 \leqslant l \leqslant n$, и рассмотрим кольцо $\mathcal{K}(A)$, ограниченное окружностями $S_{r_1}(A)$, $r_1 = b_l$, и $S_{r_2}(A)$, $r_2 = 2a_l$. Пусть $\phi(\mathcal{K}(A)) = \mathcal{L}(A)$. Двусвязная область $\mathcal{L}(A)$ ограничена кривыми $\phi(S_{r_1}(A))$ и $\phi(S_{r_2}(A))$, при этом $\omega_l - \lambda_l - \beta_l \in \phi(S_{r_1}(A))$, $\omega_l + \lambda_l \in \phi(S_{r_2}(A))$, $\phi(A) = \phi(x_l - a_l + ib_l) = \omega_l - \lambda_l$.

В силу оценки (7) окружность $S_{\beta_l/D}(\omega_l - \lambda_l)$ лежит внутри односвязной области, ограниченной кривой $\phi(S_{r_1}(A))$, а кривая $\phi(S_{r_2}(A))$ лежит в круге, ограниченном окружностью $S_{2D\lambda_l}(\omega_l - \lambda_l)$. Пусть $\widetilde{\mathcal{L}}(A)$ – кольцо, ограниченное окружностями $S_{\beta_l/D}(\omega_l - \lambda_l)$ и $S_{2D\lambda_l}(\omega_l - \lambda_l)$, тогда $\mathcal{L}(A) \subset \widetilde{\mathcal{L}}(A)$, поэтому для модулей двусвязных областей имеем $m(\mathcal{L}(A)) \leqslant m(\widetilde{\mathcal{L}}(A))$, а для модулей областей $\mathcal{L}(A)$ и $\mathcal{K}(A)$ справедливо неравенство $m(\mathcal{K}(A)) \leqslant K \cdot m(\mathcal{L}(A))$, поскольку отображение ϕ K-квазиконформно отображает $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$. В результате упомянутые неравенства и вид модулей двусвязных областей [5], гл.1, влекут неравенство

$$K \cdot \log \frac{2D\lambda_l}{\beta_l/D} \geqslant \log \frac{2a_l}{b_l} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta_l}{\lambda_l} \leqslant 2D^2 \left(\frac{b_l}{2a_l}\right)^{\frac{1}{K}}. \tag{8}$$

Аналогично получается неравенство

$$\frac{\beta_{l1}}{\lambda_l} \leqslant 2D^2 \left(\frac{b_l}{2a_l}\right)^{\frac{1}{K}}. \tag{9}$$

Для дальнейших рассуждений будем использовать неравенства $\frac{\beta_l}{\lambda_l} \leqslant c_4 \leqslant \frac{1}{5}$, $\frac{\beta_{l1}}{\lambda_l} \leqslant c_4 \leqslant \frac{1}{5}$, где постоянная c_4 будет определена в соответствии с последующими требованиями.

Так как $\frac{b_l}{2a_l} \leqslant c_3 \frac{\delta_l}{\alpha_l}$, $c_3 = c_3(c_0)$, то (8) и (9) влекут, что нужное условие, как следует из (1) и (7), получится при выполнении неравенства

$$2D^2 (c_3 c_*)^{\frac{1}{K}} \leqslant c_4, \tag{10}$$

что дает ограничения на c_*.

Пусть функция $\zeta = F(\omega)$ – обратная к функции $\omega = \phi(\zeta)$, тогда $F(i) = i$, F отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ на область U. По формуле Кристофеля–Шварца [1], гл.3 получаем соотношение

$$F'(\omega) = R \prod_{l=1}^{n} \pi_l(\omega), \tag{11}$$

где $R > 0$ и выражения для $\pi_l(\omega)$ имеют следующий вид:
в случае, когда $F(\omega_l - \lambda_l) = x_l - a_l - ib_l$,

$$\pi_l(\omega) = \sqrt{\frac{(\omega - \omega_l - \lambda_l - \beta_{l1})(\omega - \omega_l + \lambda_l + \beta_l)}{(\omega - \omega_l - \lambda_l)(\omega - \omega_l + \lambda_l)}}, \tag{12}$$

в случае, когда $F(\omega_l - \lambda_l) = x_l - a_l + ib_l$,

$$\pi_l(\omega) = \sqrt{\frac{(\omega - \omega_l - \lambda_l)(\omega - \omega_l + \lambda_l)}{(\omega - \omega_l - \lambda_l - \beta_{l1})(\omega - \omega_l + \lambda_l + \beta_l)}}. \tag{13}$$

Положим

$$\Phi(\omega) = \prod_{l=1}^{n} \pi_l(\omega), \qquad \epsilon_l = \beta_{l1} - \beta_l. \tag{14}$$

§3. Первоначальная оценка величин R, λ_l, β_l, β_{l1}

Пусть $v_l = \pi_l(\omega) - 1$, $\widetilde{\omega}_l = \omega - \omega_l$, тогда в случае, когда $\pi_l(\omega)$ задается формулой (12), имеем

$$v_l = \frac{\dfrac{\beta_l - \beta_{l1}}{\widetilde{\omega}_l} - \dfrac{\lambda_l\beta_l + \lambda_l\beta_{l1} + \beta_l\beta_{l1}}{\widetilde{\omega}_l^{\,2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{\lambda_l^2}{\widetilde{\omega}_l^{\,2}}} \cdot \sqrt{\left(1 - \dfrac{\lambda_l + \beta_{l1}}{\widetilde{\omega}_l}\right)\left(1 + \dfrac{\lambda_l + \beta_l}{\widetilde{\omega}_l}\right)} + 1 - \dfrac{\lambda_l^2}{\widetilde{\omega}_l^{\,2}}} \tag{15}$$

В текущих рассуждениях $\omega = i$, поэтому $|\widetilde{\omega}_l| \geqslant 1$, $1 \leqslant l \leqslant n$. В нижеследующем соотношении (23) будет определено условие на c_5: $0 \leqslant c_5 \leqslant \frac{1}{14}$, будем считать, что $\lambda_l < c_5$, $1 \leqslant l \leqslant n$.

Имеем оценки

$$\left|\frac{\beta_l - \beta_{l1}}{\widetilde{\omega}_l} - \frac{\lambda_l\beta_l + \lambda_l\beta_{l1} + \beta_l\beta_{l1}}{\widetilde{\omega}_l^{\,2}}\right| < \frac{\lambda_l}{4} + \frac{\lambda_l^2}{2}, \tag{16}$$

$$\Re e\left(1 - \frac{\lambda_l^2}{\widetilde{\omega}_l^{\,2}}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{14^2}, \quad \left|\frac{\lambda_l + \beta_l}{\widetilde{\omega}_l}\right| \leqslant \frac{1}{7}, \quad \left|\frac{\lambda_l + \beta_{l1}}{\widetilde{\omega}_l}\right| \leqslant \frac{1}{7}.$$

Пусть $\zeta_1 = -\dfrac{\lambda_l^2}{\widetilde{\omega}_l^{\,2}}$, $\zeta_2 = -\dfrac{\lambda_l + \beta_{l1}}{\widetilde{\omega}_l}$, $\zeta_3 = \dfrac{\lambda_l + \beta_l}{\widetilde{\omega}_l}$, тогда

$$\begin{aligned}
1 + \zeta_1 &= |1 + \zeta_1| \cdot e^{i\Theta_1}, \quad |\Theta_1| \leqslant \arcsin|\zeta_1| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot |\zeta_1| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{14^2},\\
1 + \zeta_2 &= |1 + \zeta_2| \cdot e^{i\Theta_2}, \quad |\Theta_2| \leqslant \arcsin|\zeta_2| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot |\zeta_2| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{7},\\
1 + \zeta_3 &= |1 + \zeta_3| \cdot e^{i\Theta_3}, \quad |\Theta_3| \leqslant \arcsin|\zeta_3| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot |\zeta_3| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Re e\sqrt{(1 + \zeta_1)(1 + \zeta_2)(1 + \zeta_3)}\\
&\quad = \sqrt{|1 + \zeta_1| \cdot |1 + \zeta_2| \cdot |1 + \zeta_3|}\cos\frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3}{2}\\
&\quad \geqslant \sqrt{\left(1 - \frac{1}{14^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{14^2}\right)\\
&\quad > \left(1 - \frac{1}{14}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\cos\frac{\pi}{6} = \frac{39}{49} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}$$

поэтому

$$\Re e(\sqrt{(1+\zeta_1)(1+\zeta_2)(1+\zeta_3)}+1+\zeta_1) > \frac{39}{49}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{1}{14^2} > \frac{3}{2} \quad (17)$$

и (15), (16), (17) влекут

$$|v_l(i)| < \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\lambda_l}{4}+\frac{\lambda_l^2}{2}\right) = \frac{\lambda_l}{6}+\frac{\lambda_l^2}{3}, \quad l=1,2,\dots n. \quad (18)$$

Оценка (18) справедлива и в том случае, когда v_l задается равенством (13). В силу неравенства $c_5 < \frac{1}{14}$, при $\lambda_l < c_5$ имеем $\frac{\lambda_l}{6}+\frac{\lambda_l^2}{3} < \frac{\lambda_l}{5}$.

При $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ имеем соотношение $|\log(1+z)-z| \leqslant |z|^2$, тогда (18) влечет

$$\Big|\sum_{l=1}^{n}\log(1+v_l(i))-v_l(i)\Big| \leqslant \sum_{l=1}^{n}|v_l(i)|^2 \leqslant \frac{1}{25}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^2, \quad (19)$$

$$\Big|\sum_{l=1}^{n}v_l(i)\Big| \leqslant \frac{1}{5}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l. \quad (20)$$

Из условия $\theta_{k+1}-\theta_k \geqslant c_0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, находим, что $n \leqslant \frac{2\pi}{c_0}$.

Пусть $\lambda_{l_0} = \max\limits_{1\leqslant l\leqslant n}\lambda_l$ и пусть $\lambda_{l_0} = c_5$. Тогда (19) и (20) влекут

$$-\frac{2\pi}{5c_0}c_5-\frac{2\pi}{25c_0}c_5^2 \leqslant \Re e\sum_{l=1}^{n}\log(1+v_l(i)) \leqslant \frac{2\pi}{5c_0}c_5+\frac{2\pi}{25c_0}c_5^2, \quad (21)$$

$$\Big|\sum_{l=1}^{n}\log(1+v_l(i))\Big| \leqslant \frac{2\pi}{5c_0}c_5+\frac{2\pi}{25c_0}c_5^2. \quad (22)$$

Выберем c_5: положим

$$\frac{2\pi}{5c_0}c_5'+\frac{2\pi}{25c_0}c_5'^2 = \frac{1}{6}, \quad c_5 = \min\left(\frac{1}{14}, c_5'\right). \quad (23)$$

Из (22) и (23) находим при выбранном c_5, что для

$$|\Phi(i)| = \Big|\prod_{l=1}^{n}\pi_l(i)\Big| = e^{\Re e\sum\limits_{l=1}^{n}\log(1+v_l(i))}$$

справедливы соотношения

$$e^{-1/6} \leqslant |\Phi(i)| \leqslant e^{1/6}. \quad (24)$$

Отметим, что при $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant 1/6$ выполнено

$$|e^z - 1| \leqslant \frac{1}{5}, \tag{25}$$

тогда из (22), (23) и (25) получаем

$$|\Phi(i) - 1| \leqslant \frac{1}{5}. \tag{26}$$

Соотношения (24) и (26) будут выполняться, если при соответствующем выборе c_0' и c_* можно выбрать c_5 в (23). Докажем, что c_5 будет достаточно малым при достаточно малых c_0' и c_*. Пусть функция f_0 – это какая-то из функций $f_{+-,k}$ или $f_{-+,k}$, $f_1(z) = e^{i\psi} f_0(z)$, $|\psi| \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $f_1'(0) > 0$. По теореме A находим $|f_1(-1) + 1| \leqslant A_0 \delta_* \log \frac{1}{\delta_*}$, $\delta_* = \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant n} \max\limits_{z \in \gamma_l^{\pm}} ||z| - 1| \leqslant 2 \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant n} \delta_l \leqslant 2B_1 B_2 c_* c_0' c_0 \overset{def}{=} \Delta_*$, в таком случае

$$|\psi| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot A_0 \Delta_* \log \frac{1}{\Delta_*} \tag{27}$$

Из теоремы A и (27) следует, что $d(f_0(z), \frac{z}{|z|}) \leqslant \pi A_0 \Delta_* \log \frac{1}{\Delta_*}$, где $d(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = |\theta_2 - \theta_1|$ при условии, что $|\theta_2 - \theta_1| < \pi$. В таком случае дуга $f_0(\gamma_l^{\pm})$ содержится в дуге S_l с серединой в θ_l и длины $2\alpha_l + 2\pi A_0 \Delta_* \log \frac{1}{\Delta_*}$, $\alpha_l \leqslant B_1 \alpha \leqslant B_1 c_0' c_0$. Считаем, что заведомо выполнено условие

$$B_1 c_0' c_0 + \pi A_0 \Delta_* \log \frac{1}{\Delta_*} \leqslant \frac{c_0}{2}. \tag{28}$$

Далее, $[\omega_l - \lambda_l - \beta_l, \omega_l + \lambda_l + \beta_{l1}] \subset w(S_l)$ и длина $w(S_l)$ не больше $\max\limits_{z \in S_l} |w'(z)| \cdot \left(B_1 c_0' c_0 + \pi A_0 \Delta_* \log \frac{1}{\Delta_*}\right)$.

По (28) и условию на θ_l имеем $S_l \cap S_0 = \varnothing$, где $S_0 = \{z = e^{i\theta} : |\theta - \pi| \leqslant \frac{c_0}{2}\}$, поэтому $\max\limits_{z \in S_l} |w'(z)| \leqslant |w'(e^{i\theta_0})|$, $\theta = \pi - \frac{c_0}{2}$,

$|w'(e^{i\theta_0})| = \dfrac{2}{|1 + e^{i\theta_0}|^2} = \dfrac{2}{|e^{-\frac{c_0}{2} i} - 1|^2} = \dfrac{1}{2 \sin^2 \frac{c_0}{4}}$, следовательно,

$$\text{длина } \; w(S_l) \leqslant \frac{1}{\sin^2 \frac{c_0}{4}} \left(B_1 c_0' c_0 + \pi A_0 \Delta_* \log \frac{1}{\Delta_*} \right), l = 1, \dots n. \tag{29}$$

Поскольку $2\lambda_l + \beta_l + \beta_{l1}$ не больше длины $w(S_l)$, $l = 1, \dots n$, из (29) находим, что c_0', c_* можно выбрать так, чтобы для c_5 выполнялись нужные ограничения.

Пусть g_0 – обратная функция к f_0. Для функции f_0 при $z\in\partial D_{+-}(z_0)$ или $z\in\partial D_{-+}(z_0)$ выполнено соотношение

$$|f_0(z)-z| \leqslant A_0\Delta_* \log\frac{1}{\Delta_*} + \frac{\pi}{2}A_0\Delta_*\log\frac{1}{\Delta_*}, \tag{30}$$

поэтому

$$\begin{aligned} |f_0'(0)-1| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{f_0(z)-z}{z^2}dz\right| \\ &\leqslant A_0\Delta_*\log\frac{1}{\Delta_*} + \frac{\pi}{2}A_0\Delta_*\log\frac{1}{\Delta_*} \stackrel{def}{=} \mu. \end{aligned} \tag{31}$$

Полагаем, что c_0', c_* выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $\mu \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда $|f_0'(0)| \geqslant 1 - \mu \geqslant \frac{1}{2}$. Имеем

$$|g_0'(0)-1| = \left|\frac{1}{f_0'(0)} - 1\right| \leqslant 2\mu. \tag{32}$$

Считаем, что функция F связана именно с той областью $D_{-+}(z_0)$ или $D_{+-}(z_0)$, для которой получена оценка (32). Имеем соотношение

$$g_0(\eta) = p(F(\omega(\eta))), \quad \eta\in\overline{D}, \quad g_0'(\eta) = p'(F(\omega(\eta)))\cdot(F'(\omega(\eta))\cdot\omega'(\eta),$$

в частности,

$$\begin{aligned} g_0'(0) &= p'(F(\omega(0)))\cdot(F'(\omega(0))\cdot\omega'(0) \\ &= p'(i)F'(i)\omega'(0) = p'(\omega'(0))\omega'(0)F'(i) = F'(i). \end{aligned}$$

Поэтому в силу (32) находим: $|F'(i)-1| = |g_0'(0)-1| \leqslant 2\mu$. Выберем c_0', c_* так, чтобы $\mu\leqslant\frac{1}{10}$, тогда

$$|F'(i)-1| \leqslant \frac{1}{5}. \tag{33}$$

Далее, $F'(w) = R\Phi(\omega)$, поэтому (33), (24), (25), (26) влекут

$$|R\Phi(i)-1| = |(R-1)+R(\Phi(i)-1)| \leqslant \frac{1}{5}, \quad |R\Phi(i)| \leqslant \frac{6}{5},$$

$$R \leqslant \frac{1}{|\Phi(i)|}\cdot\frac{6}{5} \leqslant e^{1/6}\cdot\frac{6}{5} \leqslant \frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5} < \frac{3}{2}, \tag{34}$$

$$|R-1| \leqslant R|\Phi(i)-1| + \frac{1}{5} \leqslant \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5} = 1/2, \quad R\geqslant\frac{1}{2}. \tag{35}$$

Пусть $\Phi_l(\omega) = \prod\limits_{k\neq l} \pi_k(\omega)$, $\lambda^* = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j$. Используя равенство (15) и рассуждая аналогично шагам (16)–(22), получим, что при соответствующем выборе чисел c_0' и c_* будет справедливо соотношение

$$\max_{\omega\in[\omega_l-\lambda_l-\beta_l,\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}]} |\Phi_l(\omega) - 1| \leqslant c_6\lambda^*. \tag{36}$$

Пусть $\Psi_l(\omega) = \Phi_l(\omega) - 1$. Имеем равенства

$$\begin{aligned} b_l &= |F(\omega_l - \lambda_l) - F(\omega_l - \lambda_l - \beta_l)| \\ &= \left|\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l} F'(\omega)d\omega\right| = \left|\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l} R\Phi(\omega)d\omega\right| \\ &= R\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l} |\Phi(\omega)|d\omega = R\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l} |\pi_l(\omega)||1+\Psi_l(\omega)|d\omega. \end{aligned} \tag{37}$$

Аналогично

$$b_l = R\int\limits_{\omega_l+\lambda_l}^{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}} |\pi_l(\omega)||1+\Psi_l(\omega)|d\omega. \tag{38}$$

Таким образом, (37) и (38) влекут

$$\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l} |\pi_l(\omega)||1+\Psi_l(\omega)|d\omega = \int\limits_{\omega_l+\lambda_l}^{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}} |\pi_l(\omega)||1+\Psi_l(\omega)|d\omega. \tag{39}$$

Рассмотрим случай, когда $\pi_l(\omega)$ задается равенством (12), случай равенства (13) изучается аналогично.

При $\omega \in [\omega_l - \lambda_l - \beta_l, \omega_l - \lambda_l]$ имеем

$$|\pi_l(\omega)| = \sqrt{\frac{\omega - \omega_l + \lambda_l + \beta_l}{\omega_l - \lambda_l - \omega}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{\beta_{l1}}{\lambda_l}\right)\right). \tag{40}$$

При $\omega \in [\omega_l + \lambda_l, \omega_l + \lambda_l + \beta_{l1}]$ выполнено

$$|\pi_l(\omega)| = \sqrt{\frac{\omega_l + \lambda_l + \beta_{l1} - \omega}{\omega - \omega_l - \lambda_l}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{\beta_l}{\lambda_l}\right)\right). \tag{41}$$

Постоянные в символах $O(\cdot)$ формул (40) и (41) абсолютные. Из (39)–(41) находим, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l}\sqrt{\frac{\omega-\omega_l+\lambda_l+\beta_l}{\omega_l-\lambda_l-\omega}}\cdot\left(1+O\left(\frac{\beta_{l1}}{\lambda_l}\right)\right)|1+\Psi_l(\omega)|d\omega\\&=\int\limits_{\omega_l+\lambda_l}^{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}}\sqrt{\frac{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}-\omega}{\omega-\omega_l-\lambda_l}}\cdot\left(1+O\left(\frac{\beta_l}{\lambda_l}\right)\right)|1+\Psi_l(\omega)|d\omega.\end{aligned}\tag{42}$$

Пусть $|1+\Psi_l(\omega)|=1+T_l(\omega)$, тогда (36) дает соотношение

$$|T_l(\omega)|\leqslant c_6\lambda^*.\tag{43}$$

Учтем, что $\displaystyle\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l}\sqrt{\frac{\omega-\omega_l+\lambda_l+\beta_l}{\omega_l-\lambda_l-\omega}}d\omega=\int\limits_0^{\beta_l}\sqrt{\frac{t}{\beta_l-t}}dt=\frac{\pi}{2}\beta_l,$

$$\int\limits_{\omega_l+\lambda_l}^{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}}\sqrt{\frac{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}-\omega}{\omega-\omega_l-\lambda_l}}=\int\limits_0^{\beta_{l1}}\sqrt{\frac{\beta_{l1}-t}{t}}dt=\frac{\pi}{2}\beta_{l1},$$

тогда формула (42) влечет

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2}\beta_l+O\left(\frac{\beta_{l1}\beta_l}{\lambda_l}\right)+\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l}\sqrt{\frac{\omega-\omega_l+\lambda_l+\beta_l}{\omega_l-\lambda_l-\omega}}T_l(\omega)d\omega\\&\quad+O\left(\frac{\beta_{l1}\beta_l}{\lambda_l}\right)\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l}\sqrt{\frac{\omega-\omega_l+\lambda_l+\beta_l}{\omega_l-\lambda_l-\omega}}T_l(\omega)d\omega\\&\quad=\frac{\pi}{2}\beta_{l1}+O\left(\frac{\beta_{l1}\beta_l}{\lambda_l}\right)+\int\limits_{\omega_l+\lambda_l}^{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}}\sqrt{\frac{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}-\omega}{\omega-\omega_l-\lambda_l}}T_l(\omega)d\omega\\&\quad+O\left(\frac{\beta_{l1}\beta_l}{\lambda_l}\right)\int\limits_{\omega_l+\lambda_l}^{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}}\sqrt{\frac{\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}-\omega}{\omega-\omega_l-\lambda_l}}T_l(\omega)d\omega.\end{aligned}\tag{44}$$

Так как $\beta_{l1} - \beta_l = \epsilon_l$, $\frac{\beta_{l1}\beta_l}{\lambda_l} = \frac{\beta_l^2}{\lambda_l} + \epsilon_l \frac{\beta_l}{\lambda_l}$, то формула (44) влечет

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\epsilon_l = O\left(\epsilon_l \frac{\beta_l}{\lambda_l}\right) + O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right) + \tau_l \beta_l \lambda^* + \tau_{l1}\beta_{l1}\lambda^* \\ + q_l \frac{\beta_{l1}\beta_l}{\lambda_l}\beta_l\lambda^* + q_{l1}\frac{\beta_{l1}\beta_l}{\lambda_l}\beta_{l1}\lambda^*,\end{aligned} \tag{45}$$

где $|q_l|, |q_{l1}| \leqslant c_7$, $|\tau_l|, |\tau_{l1}| \leqslant c_6 \frac{\pi}{2}$. Постоянные c_0', c_* можно выбрать так, чтобы $|\epsilon_l| \cdot |O\big(\frac{\beta_l}{\lambda_l}\big)| + \frac{\pi}{2} c_6 \lambda^* |\epsilon_l| < \frac{\pi}{4}|\epsilon_l|$, тогда (45) дает оценку

$$|\epsilon_l| \leqslant B_3 \cdot \frac{\beta_l^2}{\lambda_l} + c_9 \beta_l \lambda^*, \quad B_3 - \text{абсолютная постоянная.} \tag{46}$$

Оценка (46) выполнена при всех $l = 1, 2, \dots n$, её можно подставить в оценку для $\Psi_l(\omega)$ и улучшить оценку для ϵ_l, так как улучшится оценка для $\Psi_l(\omega)$, в итоге находим, что

$$|\epsilon_l| \leqslant c_{10}\beta_l \cdot \max_{1\leqslant\nu\leqslant n} \frac{\beta_\nu^2}{\lambda_\nu} + c_{11}\beta_l\lambda^* \cdot \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\beta_\nu + B_3 \cdot \frac{\beta_l^2}{\lambda_l}. \tag{47}$$

Оценка (47) справедлива и для $\pi_l(\omega)$, заданных формулой (13), что проверяется рассуждениями, аналогичными (41)–(47).

Используя оценки для R в (34), (35), соотношения (37) и (47), находим, что c_0', c_* можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\pi\max(\beta_l, \beta_{l1}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\max(\beta_l,\beta_{l1}) \leqslant b_l \\ \leqslant \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi\min(\beta_l,\beta_{l1}) = \frac{9}{8}\pi\min(\beta_l,\beta_{l1}).\end{aligned} \tag{48}$$

Далее,

$$\begin{aligned}2a_l = |F(\omega_l+\lambda_l) - F(\omega_l-\lambda_l)| = \left|\int\limits_{\omega_l-\lambda_l}^{\omega_l+\lambda_l} F'(\omega)d\omega\right| \\ = \left|R\int\limits_{\omega_l-\lambda_l}^{\omega_l+\lambda_l}\Phi(\omega)d\omega\right| = R\int\limits_{\omega_l-\lambda_l}^{\omega_l}|\pi_l(\omega)|(1+T_l(\omega))d\omega \\ + R\int\limits_{\omega_l}^{\omega_l+\lambda_l}|\pi_l(\omega)|(1+T_l(\omega))d\omega \overset{def}{=} I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{49}$$

Улучшение оценки для ϵ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, в (47) влечет следующую улучшенную оценку для $T_l(\omega)$ при $\omega \in [\omega_l - \lambda_l - \beta_l, \omega_l + \lambda_l + \beta_{l1}]$:

$$|T_l(\omega)| \leqslant c_{12} \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \frac{\beta_\nu^2}{\lambda_\nu} + c_{13} \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \beta_\nu \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \lambda_\nu. \tag{50}$$

Вновь рассматриваем случай, когда $\pi_l(\omega)$ задается формулой (12), ситуация с равенством (13) разбирается аналогично. Положим, $\widetilde{I}_1 \overset{def}{=} \int\limits_{\omega_l - \lambda_l}^{\omega_l} |\pi_l(\omega)| d\omega$. Имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_1 &= \int\limits_{\omega_l - \lambda_l}^{\omega_l} \sqrt{\left| \frac{\omega - \omega_l + \lambda_l + \beta_l}{\omega_l - \lambda_l - \omega} \right|} \left(1 + O\left(\frac{\beta_{l1}}{\lambda_l}\right)\right) d\omega \\
&= \int\limits_0^{\lambda_l} \sqrt{\frac{t + \beta_l}{t}} \left(1 + O\left(\frac{\beta_{l1}}{\lambda_l}\right)\right) dt \\
&= \left(\sqrt{\lambda_l(\lambda_l + \beta_l)} + \frac{1}{2}\beta \cdot \log\left|\frac{\sqrt{\lambda_l + \beta_l} + \sqrt{\lambda_l}}{\sqrt{\lambda_l + \beta_l} - \sqrt{\lambda_l}}\right|\right) \\
&\times \left(1 + O\left(\frac{\beta_{l1}}{\lambda_l}\right)\right).
\end{aligned} \tag{51}$$

Из (50) и (51) находим, что

$$I_1 = R\lambda_l \left(1 + O\left(\beta_l \log \frac{\lambda_l}{\beta_l}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{\beta_l}{\lambda_l}\right)\right) \tag{52}$$

Аналогично оценка (52) проверяется для I_2.

Используя (34), (35), (49) и (52), находим, что c_0' и c_* можно выбрать так, что выполняются соотношения

$$\frac{1}{4}\lambda_l \leqslant a_l \leqslant 2\lambda_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant n. \tag{53}$$

Так как для $D = D_{+-}(z_0)$ или $D = D_{-+}(z_0)$ имеем $w(D) = U$, $w(0) = i$, то с некоторыми постоянными c_{14}, c_{15} выполнены соотношения

$$\frac{1}{c_{14}}\alpha_l \leqslant a_l \leqslant c_{14}\alpha_l, \quad \frac{1}{c_{15}}\delta_l \leqslant b_l \leqslant c_{15}\delta_l. \tag{54}$$

Тогда из условий на α_l и δ_l, неравенств (48) и (53) с постоянными c_{16} и c_{17} следуют неравенства

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\frac{\beta_\nu^2}{\lambda_\nu}\leqslant c_{16}\frac{\beta_l^2}{\lambda_l},\quad \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\beta_\nu\cdot\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\lambda_\nu\leqslant c_{17}\beta_l\lambda_l,\quad 1\leqslant l\leqslant n. \tag{55}$$

§4. Уточнение оценки для ϵ_l

Пусть $|\epsilon_{n_0}|=\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}|\epsilon_\nu|$, $\epsilon=\epsilon_{n_0}$. Имеем равенство

$$\begin{aligned}(F(\omega_{n_0}-\lambda_{n_0})-F(\omega_{n_0}-\lambda_{n_0}-\beta_{n_0}))-(F(\omega_{n_0}+\lambda_{n_0})\\ -F(\omega_{n_0}+\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}))=0.\end{aligned}\tag{56}$$

Учитывая формулы (11) и (14) для $F'(\omega)$, из (56) находим

$$\int\limits_{\omega_{n_0}-\lambda_{n_0}-\beta_{n_0}}^{\omega_{n_0}-\lambda_{n_0}}\Phi(\omega)d\omega+\int\limits_{\omega_{n_0}+\lambda_{n_0}}^{\omega_{n_0}+\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}1}\Phi(\omega)d\omega=0. \tag{57}$$

Обозначим $V_l(\omega)=\pi_l^2(\omega)-1$, тогда

$$\prod_{l\neq n_0}\pi_l(\omega)=e^{\frac12\sum\limits_{l\neq n_0}\log(1+V_l(\omega))}. \tag{58}$$

Пусть $\quad\Omega(\omega)=\dfrac12\sum\limits_{l\neq n_0}V_l(\omega),\quad \Xi(\omega)=\dfrac12\sum\limits_{l\neq n_0}(\log(1+V_l(\omega))-V_l(\omega)).$

Положим $\log(1+v)=v+q(v)v^2$, где $|q(v)|<1$ при $|v|\leqslant\frac12$, тогда

$$\Xi(\omega)=\frac12\sum_{l\neq n_0}q(V_l(\omega))V_l^2(\omega). \tag{59}$$

Используя (12), (13) и (54) и (47), получим, что можно выбрать c_0', c_* так, чтобы при $\omega\in[\omega_{n_0}-\lambda_{n_0}-\beta_{n_0},\omega_{n_0}+\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}]$ выполнялись соотношения:

$$|\Omega(\omega)|\leqslant\frac12\sum_{l\neq n_0}|V_l(\omega)|\leqslant\frac12,\quad |\Xi(\omega)|\leqslant\frac12. \tag{60}$$

Пусть $e^\mu=1+\mu+Q(\mu)\mu^2$, где при $|\mu|\leqslant1$ имеем $|Q(\mu)|<\frac12 e$.

Теперь в силу (58), (59), (60) получим:

$$\prod_{l\neq n_0} \pi_l(\omega) = e^{\Omega(\omega)+\Xi(\omega)} = 1 + \Omega(\omega) + \Xi(\omega) + Q(\Omega(\omega) + \Xi(\omega)) \cdot (\Omega(\omega) + \Xi(\omega))^2. \tag{61}$$

Положим

$$\Xi(\omega) + Q(\Omega(\omega) + \Xi(\omega)) \cdot (\Omega(\omega) + \Xi(\omega))^2 = \Lambda(\omega). \tag{62}$$

Из (12) заключаем, что при $l \neq n_0$, $\omega \in [\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \beta_{n_0}, \omega_{n_0} + \lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1}]$ имеем

$$\begin{aligned} V_l(\omega) - V_l(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0}) &= \frac{\epsilon_l(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \omega)}{(\omega - \omega_l)^2 - \lambda_l^2} \\ &+ (2\lambda_l\beta_l + \beta_l^2 + \epsilon_l(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \omega_l + \lambda_l + \beta_l)) \\ &\times \frac{(\omega - \omega_{n_0} + \lambda_{n_0})(\omega - 2\omega_l + \omega_{n_0} - \lambda_{n_0})}{((\omega - \omega_l)^2 - \lambda_l^2)((\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \omega_l)^2 - \lambda_l^2)}. \end{aligned} \tag{63}$$

Из (13) при $l \neq n_0$, $\omega \in [\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \beta_{n_0}, \omega_{n_0} + \lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1}]$ находим

$$\begin{aligned} &V_l(\omega) - V_l(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0}) \\ &\quad = \frac{\epsilon_l(\omega - \omega_{n_0} + \lambda_{n_0})}{(\omega - \omega_l)^2 - \epsilon_l(\omega - \omega_l + \lambda_l + \beta_l) - (\beta_l + \lambda_l)^2} \\ &\quad + (2\lambda_l\beta_l + \beta_l^2 + \epsilon_l(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \omega_l + \lambda_l + \beta_l))(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \omega) \\ &\quad \times (\omega - 2\omega_l + \omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \epsilon_l) \\ &\quad \times ((\omega - \omega_l)^2 - \epsilon_l(\omega - \omega_l + \lambda_l + \beta_l) - (\beta_l + \lambda_l)^2)^{-1} \\ &\quad \times ((\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \omega_l)^2 - \epsilon_l(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \omega_l + \lambda_l + \beta_l) - (\beta_l + \lambda_l)^2)^{-1}. \end{aligned} \tag{64}$$

Из (63) и (64) заключаем, что при $\omega \in [\omega_{n_0} - \lambda_{n_0} - \beta_{n_0}, \omega_{n_0} + \lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1}]$ с абсолютными постоянными B_4 и B_5 справедливы оценки

$$|V_l(\omega) - V_l(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0})| \leqslant \frac{B_4|\epsilon_l|\lambda_{n_0}}{c_0^2(n_0 - l)^2} + B_5 \cdot \frac{\lambda_l\beta_{n_0}\lambda_{n_0}}{c_0^3(n_0 - l)^3}, \quad l \neq n_0; \tag{65}$$

в свою очередь, оценки (65) влекут соотношение

$$|\Omega(\omega) - \Omega(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0})| \leqslant c_{18}|\epsilon|\lambda_{n_0} + c_{19}\beta_{n_0}\lambda_{n_0}^2. \tag{66}$$

Используя (65), (53), (54), находим, что

$$|\Xi(\omega) - \Xi(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0})| \leqslant c_{20}|\epsilon|\lambda_{n_0} + c_{21}\beta_{n_0}\lambda_{n_0}^2, \tag{67}$$

$$|\Lambda(\omega) - \Lambda(\omega_{n_0} - \lambda_{n_0})| \leqslant c_{22}|\epsilon|\lambda_{n_0} + c_{23}\beta_{n_0}\lambda_{n_0}^2. \tag{68}$$

Положим $\Omega(\omega_{n_0}-\lambda_{n_0})+\Xi(\omega_{n_0}-\lambda_{n_0})=\widetilde{c}$, $\Lambda(\omega_{n_0}-\lambda_{n_0})-\Xi(\omega_{n_0}-\lambda_{n_0})=\widetilde{\widetilde{c}}$,

$$\Omega(\omega)+\Xi(\omega)+Q(\Omega(\omega)+\Xi(\omega))(\Omega(\omega)+\Xi(\omega))^2-\widetilde{c}-\widetilde{\widetilde{c}}=M(\omega). \quad (69)$$

Из (57), (61), (69) получаем

$$\int\limits_{\omega_{n_0}-\lambda_{n_0}-\beta_{n_0}}^{\omega_{n_0}-\lambda_{n_0}} \pi_{n_0}(\omega)(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}+M(\omega))d\omega + \int\limits_{\omega_{n_0}+\lambda_{n_0}}^{\omega_{n_0}+\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} \pi_{n_0}(\omega)(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}+M(\omega))d\omega=0. \quad (70)$$

Далее (70) преобразуем по-разному в зависимости от того, задается $\pi_{n_0}(\omega)$ равенством (12) или (13). Полагаем $\beta_{n_0 1}>\beta_{n_0}$ – рассуждения в случае противоположного неравенства аналогичны.

Тождество (70) можно записать в виде

$$\int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} \pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}+M(\omega_{n_0}-\tau))d\tau + \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} \pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}+M(\omega_{n_0}+\tau))d\tau=0. \quad (71)$$

Если $\pi_{n_0}(\omega)$ выражается формулой (12), то (71) эквивалентно равенству

$$(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}})\int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} (\pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)+\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau))d\tau=-(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}) \times\int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} \pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)d\tau-\int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} \pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)M(\omega_{n_0}-\tau)d\tau - \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} \pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)M(\omega_{n_0}+\tau)d\tau. \quad (72)$$

При $\tau \in [\lambda_{n_0}, \lambda_{n_0} + \beta_{n_0}]$ имеем $\pi_{n_0}(\omega_{n_0} - \tau) = -i|\pi_{n_0}(\omega_{n_0} - \tau)|$, при $\tau \in [\lambda_{n_0}, \lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1}]$ имеем $\pi_{n_0}(\omega_{n_0} + \tau) = i|\pi_{n_0}(\omega_{n_0} + \tau)|$, поэтому (72) влечет

$$\begin{aligned} |1 + \widetilde{c} + \widetilde{\widetilde{c}}| &\left| \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} (|\pi_{n_0}(\omega_{n_0} + \tau)| - |\pi_{n_0}(\omega_{n_0} - \tau)|) d\tau \right| \\ &+ \leqslant |1 + \widetilde{c} + \widetilde{\widetilde{c}}| \int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} |\pi_{n_0}(\omega_{n_0} + \tau)| d\tau \\ &+ \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} |\pi_{n_0}(\omega_{n_0} - \tau)||M(\omega_{n_0} - \tau)| d\tau \\ &+ \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} |\pi_{n_0}(\omega_{n_0} + \tau)||M(\omega_{n_0} + \tau)| d\tau. \end{aligned} \tag{73}$$

При $\tau \in [\lambda_{n_0}, \lambda_{n_0} + \beta_{n_0}]$ выполнено

$$\begin{aligned} &|\pi_{n_0}(\omega_{n_0} + \tau)| - |\pi_{n_0}(\omega_{n_0} - \tau)| \\ &\quad = \sqrt{\frac{(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1} - \tau)(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0} + \tau)}{\tau^2 - \lambda_{n_0}^2}} - \sqrt{\frac{(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0} - \tau)(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1} + \tau)}{\tau^2 - \lambda_{n_0}^2}} \\ &= \frac{2\tau\epsilon}{\sqrt{\tau^2 - \lambda_{n_0}^2}\left(\sqrt{(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1} - \tau)(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0} + \tau)} + \sqrt{(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0} - \tau)(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1} + \tau)}\right)}. \end{aligned} \tag{74}$$

В рассматриваемом случае $\epsilon = \beta_{n_0 1} - \beta_{n_0} > 0$, при $\tau \in [\lambda_{n_0}, \lambda_{n_0} + \beta_{n_0}]$ будут верны соотношения

$$\tau + \lambda_{n_0} \leqslant 3\lambda_{n_0}, \;\; \lambda_{n_0} + \beta_{n_0} + \tau \leqslant 4\lambda_{n_0}, \;\; \lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1} + \tau \leqslant 4\lambda_{n_0},$$

тогда (74) влечет

$$\begin{aligned} &|\pi_{n_0}(\omega_{n_0} + \tau)| - |\pi_{n_0}(\omega_{n_0} - \tau)| \\ &\quad \geqslant \frac{2\lambda_{n_0}|\epsilon|}{2\sqrt{3}\lambda_{n_0}\sqrt{\tau - \lambda_{n_0}}\left(\sqrt{(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1} - \tau)} + \sqrt{(\lambda_{n_0} + \beta_{n_0} - \tau)}\right)} \\ &\qquad \geqslant \frac{|\epsilon|}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau - \lambda_{n_0}} \cdot \sqrt{\lambda_{n_0} + \beta_{n_0 1} - \tau}}. \end{aligned} \tag{75}$$

Из (75) находим

$$\left|\int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} (|\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)|-|\pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)|)d\tau\right|$$

$$\geqslant \frac{|\epsilon|}{2\sqrt{3}} \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-\lambda_{n_0}}\cdot\sqrt{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}-\tau}}$$

$$= \frac{|\epsilon|}{2\sqrt{3}} \int\limits_{0}^{\beta_{n_0}} \frac{dv}{\sqrt{v}\sqrt{\beta_{n_0 1}-v}} = \frac{|\epsilon|}{2\sqrt{3}} \int\limits_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{\gamma-y}}, \quad (76)$$

где $\gamma = \frac{\beta_{n_0 1}}{\beta_{n_0}} = 1 + \frac{\epsilon}{\beta_{n_0}}$.

В силу (47) и (55) имеем $|\epsilon| \leqslant c_{16}\frac{\beta_{n_0}^2}{\lambda_{n_0}} + c_{17}\beta_{n_0}\lambda_{n_0}$, поэтому при соответствующем выборе c_0' и c_* получаем $\gamma \leqslant 1 + c_{16}\frac{\beta_{n_0}}{\lambda_{n_0}} + c_{17}\lambda_{n_0} \leqslant 2$, и (76) влечет

$$\left|\int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} (|\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)|-|\pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)|)d\tau\right|$$

$$\geqslant |\epsilon|\frac{1}{2\sqrt{3}} \int\limits_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}} \stackrel{def}{=} B_6'|\epsilon|. \quad (77)$$

Применяя (12), (13), (47), (55), заключаем, что $|\widetilde{c}| \leqslant c_{24}'\frac{\beta_{n_0}^2}{\lambda_{n_0}} + c_{25}'\beta_{n_0}\lambda_{n_0}$, $|\widetilde{\widetilde{c}}| \leqslant c_{24}''\frac{\beta_{n_0}^2}{\lambda_{n_0}} + c_{25}''\beta_{n_0}\lambda_{n_0}$, поэтому соответствующий выбор чисел c_0' и c_* дает оценки $|\widetilde{c}| \leqslant \frac{1}{4}$, $|\widetilde{\widetilde{c}}| \leqslant \frac{1}{4}$, поэтому $\frac{1}{2} \leqslant |1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}| \leqslant \frac{3}{2}$ и (77) влечет

$$|1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}|\cdot\left|\int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} (|\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)|-|\pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)|)d\tau\right| \geqslant \frac{1}{2}B_6'|\epsilon| \stackrel{def}{=} B_6|\epsilon|. \quad (78)$$

Далее, при $\gamma = \frac{\beta_{n_0 1}}{\beta_{n_0}}$ имеем

$$\int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} |\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)|d\tau$$
$$= \int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} \sqrt{\frac{(\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}-\tau)(\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}+\tau)}{(\tau-\lambda_{n_0})(\tau+\lambda_{n_0})}}d\tau$$
$$\leqslant \left(1+O\left(\frac{\beta_{n_0}}{\lambda_{n_0}}\right)\right)\int\limits_{\beta_{n_0}}^{\beta_{n_0 1}} \sqrt{\frac{\beta_{n_0 1}-v}{v}}dv$$
$$= \left(1+O\left(\frac{\beta_{n_0}}{\lambda_{n_0}}\right)\right)\beta_{n_0 1}\int\limits_{1/\gamma}^{1} \sqrt{\frac{1-y}{y}}dy$$
$$= O(1)\beta_{n_0 1}(\gamma-1)^{3/2} = O(1)\cdot\left(\frac{\epsilon}{\beta_{n_0}}\right)^{1/2}\cdot\epsilon, \quad (79)$$

в $O(1)$ постоянная абсолютная.

Применяя оценки, аналогичные формулам (45), (67), (68), получим соотношение

$$\begin{aligned}\int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} &|\pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)||M(\omega_{n_0}-\tau)|d\tau \\ &+ \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} |\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)||M(\omega_{n_0}+\tau)|d\tau \\ &\leqslant c'_{26}|\epsilon|\beta_{n_0}\lambda_{n_0} + c'_{27}\beta_{n_0}^2\lambda_{n_0}^2 + c''_{26}|\epsilon|\beta_{n_0 1}\lambda_{n_0} + c''_{27}\beta_{n_0}^2\lambda_{n_0}^2 \\ &= c_{26}|\epsilon|\beta_{n_0}\lambda_{n_0} + c_{27}\beta_{n_0}^2\lambda_{n_0}^2.\end{aligned} \quad (80)$$

При выводе соотношения (80) мы учли, что при соответствующем выборе величин c'_0 и c_* выполнено $\beta_{n_0 1} \leqslant 2\beta_{n_0}$.

Применяя (46), (55), (78), (79), (80), получаем неравенство

$$B_6|\epsilon| \leqslant c_{28}\left(\frac{\beta_{n_0}}{\lambda_{n_0}}\right)^{1/2}|\epsilon| + c_{26}|\epsilon|\beta_{n_0}\lambda_{n_0} + c_{27}\beta_{n_0}^2\lambda_{n_0}^2. \quad (81)$$

Постоянные c_0' и c_* можно выбрать так, чтобы выполнялась оценка

$$c_{28} \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \left(\frac{\beta_\nu}{\lambda_\nu}\right)^{1/2} + c_{26} \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \beta_\nu \lambda_\nu \leqslant \frac{1}{2} B_6. \tag{82}$$

Тогда (81) и (82) влекут соотношение

$$|\epsilon| \leqslant \frac{2}{B_6} c_{27} \beta_{n_0}^2 \lambda_{n_0}^2 \leqslant c_{29} \min_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \beta_\nu^2 \lambda_\nu^2, \tag{83}$$

тогда (83) дает следующее неравенство:

$$|\epsilon_l| \leqslant |\epsilon_{n_0}| \leqslant c_{29} \beta_l^2 \lambda_l^2. \tag{84}$$

Предположим теперь, что $\pi_{n_0}(\omega)$ задается формулой (13). Тогда (71) эквивалентно равенству

$$\begin{aligned}
&(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}) \int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} \pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)d\tau \\
&= -(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}) \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} (\pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)+\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau))d\tau \\
&- \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} \pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)M(\omega_{n_0}-\tau)d\tau - \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0 1}} \pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)M(\omega_{n_0}+\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{85}$$

Рассуждая, как в (75), (76), получаем оценку

$$\left|(1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}) \int\limits_{\lambda_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}} (\pi_{n_0}(\omega_{n_0}-\tau)+\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau))d\tau\right| \leqslant B_7|\epsilon|, \tag{86}$$

с абсолютной постоянной B_7. Далее,

$$|1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}|\left|\int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_01}}\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)d\tau\right| = |1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}|\int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_01}}|\pi_{n_0}(\omega_{n_0}+\tau)|d\tau$$

$$= |1+\widetilde{c}+\widetilde{\widetilde{c}}|\int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_01}}\sqrt{\frac{\tau-\lambda_{n_0}}{\lambda_{n_0}+\beta_{n_01}-\tau}\cdot\frac{\tau+\lambda_{n_0}}{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}+\tau}}d\tau$$

$$\geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_{\lambda_{n_0}+\beta_{n_0}}^{\lambda_{n_0}+\beta_{n_01}}\sqrt{\frac{\tau-\lambda_{n_0}}{\lambda_{n_0}+\beta_{n_01}-\tau}}d\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\limits_{\beta_{n_0}}^{\beta_{n_01}}\sqrt{\frac{v}{\beta_{n_01}-v}}dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{n_01}\int\limits_{1/\gamma}^{1}\sqrt{\frac{y}{1-y}}dy \geqslant B_8\beta_{n_01}(\gamma-1)^{1/2} = B_8\beta_{n_01}^{1/2}|\epsilon|^{1/2}. \tag{87}$$

Теперь (80), (85), (86), (87) влекут

$$B_8\beta_{n_01}^{1/2}|\epsilon|^{1/2} \leqslant B_7|\epsilon| + c_{26}|\epsilon|\beta_{n_0}\lambda_{n_0} + c_{27}\beta_{n_0}^2\lambda_{n_0}^2. \tag{88}$$

Можно выбрать c_0' и c_* так, чтобы $c_{26}\cdot\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}\beta_\nu\lambda_\nu \leqslant B_7$ и $4B_7|\epsilon|^{1/2} \leqslant B_8\min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}\beta_\nu^{1/2}$, тогда (88) влечет

$$\frac{1}{2}B_8\beta_{n_01}^{1/2}|\epsilon|^{1/2} \leqslant c_{27}\beta_{n_0}^2\lambda_{n_0}^2, \quad |\epsilon| \leqslant c_{28}\beta_{n_0}^3\lambda_{n_0}^4 \leqslant c_{28}\beta_{n_0}^2\lambda_{n_0}^2. \tag{89}$$

Таким образом, оценка (84) справедлива при обоих возможных случаях для $\pi_{n_0}(\omega)$.

§5. Уточнение оценки для R

Рассуждая, как в (59)–(62), используя оценки (84), (89) и формулы (12) и (13), получим соотношение

$$\left|\prod_{\nu\neq l}\pi_\nu(\omega)-1\right| \leqslant c_{29}\beta_l\lambda_l, \quad \omega\in[\omega_l-\lambda_l-\beta_l, \omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}]. \tag{90}$$

Далее, в случае, когда $\pi_l(\omega)$ задается равенством (12), имеем

$$\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l} |\pi_l(\omega)|d\omega = \int\limits_{\lambda_l}^{\lambda_l+\beta_l} \sqrt{\frac{\lambda_l+\beta_l-\tau}{\tau-\lambda_l}\cdot\frac{\lambda_l+\beta_l+\epsilon_l+\tau}{\tau+\lambda_l}}d\tau$$

$$= \int\limits_{\lambda_l}^{\lambda_l+\beta_l} \sqrt{\frac{\lambda_l+\beta_l-\tau}{\tau-\lambda_l}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\frac{\beta_l+\epsilon_l}{\tau+\lambda_l}+O\left(\left(\frac{\beta_l}{\lambda_l}\right)^2\right)\right)d\tau$$

$$= \left(1+\frac{1}{4}\frac{\beta_l}{\lambda_l}+O\left(\left(\frac{\beta_l}{\lambda_l}\right)^2\right)\right)\int\limits_0^{\beta_l}\sqrt{\frac{\beta_l-v}{v}}dv = \frac{\pi}{2}\beta_l+O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right), \tag{91}$$

тогда (90), (91), (34) влекут соотношение

$$b_l = \int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l} |F'(\omega)|d\omega = R\int\limits_{\omega_l-\lambda_l-\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l} |\Phi(\omega)|d\omega = \frac{\pi}{2}R\beta_l+O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right). \tag{92}$$

Оценка (92) аналогично получается для случая, когда π_l задаётся формулой (13).

Предположим, что $|\omega_l| = \min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}|\omega_\nu|$. Имеем соотношения:

$$i-F(\omega_l) = F(i)-F(\omega_l) = \int\limits_{\omega_l}^{i} F'(\omega)d\omega = R\int\limits_{\omega_l}^{i}\Phi(\omega)d\omega$$

$$= R\int\limits_{\omega_l}^{\omega_l+i}\Phi(\omega)d\omega + R\int\limits_{\omega_l+i}^{i}\Phi(\omega)d\omega \overset{def}{=} I_1+I_2. \tag{93}$$

Предположим, что $\pi_l(\omega)$ задается формулой (12). Тогда в силу соотношения (92) имеем

$$\Im m F(\omega_l) = -b_l = -\frac{\pi}{2}R\beta_l+O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right), \tag{94}$$

$$|\Im m R\int\limits_{\omega_l+i}^{i}\Phi(\omega)d\omega| = |\Im m R\int\limits_{\omega_l}^{0}(\Phi(x+i)-1)dx|. \tag{95}$$

Теперь из (93), (94), (95) заключаем, что

$$1+\frac{\pi}{2}R\beta_l+O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right)+O(\lambda_l\beta_l)=\Im m(i-F(\omega_l))$$
$$=R\Im m\int\limits_{\omega_l}^{\omega_l+i}\Phi(\omega)d\omega+\Im mI_2=R\Re e\int\limits_0^1\Phi(\omega_l+iy)dy+\Im mI_2. \tag{96}$$

Из (12) находим

$$\Re e\pi_l(\omega_l+iy)=\Re e\sqrt{\frac{(iy-\lambda_l-\beta_l-\epsilon_l)(iy+\lambda_l+\beta_l)}{(iy)^2-\lambda_l^2}}$$
$$=\Re e\sqrt{\frac{y^2+(\lambda_l+\beta_l)^2+\epsilon_l(iy+\lambda_l+\beta_l)}{y^2+\lambda_l^2}}=1$$
$$+\frac{1}{2}\Re e\frac{2\lambda_l\beta_l+\beta_l^2}{y^2+\lambda_l^2}+\frac{1}{2}\Re e\frac{\epsilon_l(iy+\lambda_l+\beta_l)}{y^2+\lambda_l^2}+O\left(\frac{\beta_l^2\lambda_l^2}{(y^2+\lambda_l^2)^2}\right). \tag{97}$$

Имея ввиду оценки (84) и (89) при $y\in[0,1]$, учитывая, что (97) влечет

$$\Re e\pi_l(\omega_l+iy)=1+\frac{\lambda_l\beta_l+\frac{1}{2}\beta_l^2}{y^2+\lambda_l^2}+O\left(\frac{\beta_l^2\lambda_l^2}{(y^2+\lambda_l^2)^2}\right), \tag{98$'$}$$

заключаем, что

$$1+\frac{1}{2}R\beta_l+O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right)+O(\lambda_l\beta_l)$$
$$=R\int\limits_0^1\left(1+\frac{\lambda_l\beta_l+\frac{1}{2}\beta_l^2}{y^2+\lambda_l^2}+O\left(\frac{\beta_l^2\lambda_l^2}{(y^2+\lambda_l^2)^2}\right)\right)dy \tag{98}$$
$$=R+R\int\limits_0^1\frac{\lambda_l\beta_l+\frac{1}{2}\beta_l^2}{y^2+\lambda_l^2}dy+O\left(\int\limits_0^1\frac{\beta_l^2\lambda_l^2}{(y^2+\lambda_l^2)^2}dy\right).$$

Поскольку

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\lambda_l\beta_l+\frac{1}{2}\beta_l^2}{y^2+\lambda_l^2}dy=O(\lambda_l\beta_l),\qquad\int\limits_1^{+\infty}\frac{\beta_l^2\lambda_l^2}{(y^2+\lambda_l^2)^2}dy=O(\lambda_l^2\beta_l^2),$$

из (98) находим

$$1+\frac{\pi}{2}R\beta_l+O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right)+O(\lambda_l\beta_l)=R+R\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda_l\beta_l+\frac{1}{2}\beta_l^2}{y^2+\lambda_l^2}dy$$
$$+O\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{\beta_l^2\lambda_l^2}{(y^2+\lambda_l^2)^2}dy\right)+O(\lambda_l\beta_l)R+R\cdot\frac{\pi}{2}\left(\beta_l+\frac{\beta_l^2}{2\lambda_l}\right)$$
$$+O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right)+O(\lambda_l\beta_l)=R+\frac{\pi}{2}R\beta_l+O\left(\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}\right)+O(\lambda_l\beta_l). \tag{99}$$

Из (99) получим

$$|R-1|\leqslant c'_{30}\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}+c'_{31}\lambda_l\beta_l\leqslant c_{30}\min_{1\leqslant\nu\leqslant n}\frac{\beta_\nu^2}{\lambda_\nu}+c_{31}\min_{1\leqslant\nu\leqslant n}\lambda_\nu\beta_\nu. \tag{100}$$

В случае, когда $\pi_l(\omega)$ задается равенством (13), имеем соотношение $\Im mF(\omega_l)=b_l$. Для b_l справедлива формула (94). Далее, в этом случае имеем равенство

$$\Re e\pi_l(\omega_l+iy)=\Re e\sqrt{\frac{y^2+\lambda_l^2}{y^2+(\lambda_l+\beta_l)^2+\epsilon_l(iy+\lambda_l+\beta_l)}}$$
$$=1-\frac{1}{2}\Re e\frac{2\lambda_l\beta_l+\beta_l^2+\epsilon_l(iy+\lambda_l+\beta_l)}{y^2+(\lambda_l+\beta_l)^2+\epsilon_l(iy+\lambda_l+\beta_l)}+O\left(\frac{\lambda_l^2\beta_l^2}{(y^2+\lambda_l^2)^2}\right)$$
$$=1-\frac{\lambda_l\beta_l+\frac{1}{2}\beta_l^2}{y^2+\lambda_l^2}+O\left(\frac{\lambda_l^2\beta_l^2}{(y^2+\lambda_l^2)^2}\right),\quad \text{где}\quad y>0. \tag{101}$$

Применяя рассуждения (98), (99) с соотношением (101) вместо (98′) получаем, что оценка (100) справедлива и в этом случае.

§6. Окончание доказательства теоремы

Пусть $|\omega_*-\omega_l|\geqslant c_{32}>8\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}\lambda_\nu$, $1\leqslant l\leqslant n$, $\omega_*\in\mathbb{R}$. Тогда при $\omega\in[\omega_*,i]$ имеем $\operatorname{dist}(\omega,[\omega_\nu-\lambda_\nu-\beta_\nu,\omega_\nu+\lambda_\nu+\beta_{\nu1}])\geqslant c_{33}$. Оценки (84), (89), формулы (12), (13), подставленные в соотношения (58)–(61), дадут неравенство

$$|\Phi(\omega)-1|\leqslant c_{34}\lambda_l\beta_l. \tag{102}$$

Применяя оценки (102) и (100), получаем

$$\begin{aligned}|F(\omega_*)-\omega_*| &= |(F(\omega_*)-F(i))-(\omega_*-i)| = \left|\int\limits_{[i,\,\omega_*]}(F'(\omega)-1)d\omega\right| \\ &= \left|\int\limits_{[i,\,\omega_*]}R\Phi(\omega)-1)d\omega\right| \leqslant R\int\limits_{[i,\,\omega_*]}|\Phi(\omega)-1||d\omega| \\ &+|R-1||i-\omega_*| \leqslant c_{35}\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}+c_{36}\beta_l\lambda_l.\end{aligned}\tag{103}$$

Пусть $\operatorname{dist}(\widehat{\omega},[\omega_l-\lambda_l-\beta_l,\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}]) \leqslant \operatorname{dist}(\widehat{\omega},[\omega_\nu-\lambda_\nu-\beta_\nu,\omega_\nu+\lambda_\nu+\beta_{\nu 1}])$, $\nu\neq l$. Предположим, что $\widehat{\omega}<\omega_l-\lambda_l-\beta_l$, случай $\widehat{\omega}>\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1}$ рассматривается аналогично. Пусть $\pi_l(\omega)$ задаётся формулой (12), рассуждения при задании $\pi_l(\omega)$ равенством (13) аналогичны. Выберем точку ω_* так, чтобы

$$\omega_*<\omega_l-\lambda_l-\beta_l, \quad |\omega_*-\omega_l+\lambda_l+\beta_l| = \omega_*-\omega_\mu-\lambda_\mu-\beta_{\mu 1},$$

где ω_μ – ближайшая слева точка к ω_l среди $\omega_1,\ldots,\omega_n$; если ω_l – самая левая из ω_ν, получаем $\omega_*=\omega_l-\lambda_l-\beta_l-c_{32}$. Тогда при соответствующем выборе чисел c_0', c_* имеем $|\omega_*-\omega_\nu|\geqslant c_{32}$, $\nu=1,\ldots,n$. Используя оценку (103), находим

$$\begin{aligned}|F(\widehat{\omega})-\widehat{\omega}| &\leqslant |(F(\widehat{\omega})-F(\omega_*))-(\widehat{\omega}-\omega_*)|+|F(\omega_*)-\omega_*| \\ &\leqslant \left|\int\limits_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}(F'(\omega)-1)d\omega\right| + c_{35}\frac{\beta_l^2}{\lambda_l}+c_{36}\beta_l\lambda_l.\end{aligned}\tag{104}$$

Применяя равенства (12), (13), оценки (84), (89) и рассуждения (58)–(61), получим соотношение

$$\left|\prod_{\nu\neq l}\pi_\nu(\omega)-1\right| \overset{def}{=} |\Phi_l(\omega)-1| \leqslant c_{37}\lambda_l\beta_l, \quad \omega\in[\omega_*,\widehat{\omega}].\tag{105}$$

Применяя (105), (102), (100), находим

$$\left|\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}(F'(\omega)-1)d\omega\right| = \left|\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}(R\Phi(\omega)-1)d\omega\right| \leqslant R\left|\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}(\Phi_l(\omega)\pi_l(\omega)-1)d\omega\right|$$
$$+ |R-1||\widehat{\omega}-\omega_*| \leqslant R\left|\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}(\Phi_l(\omega)-1)\pi_l(\omega)d\omega\right|$$
$$+ R\left|\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}(\pi_l(\omega)-1)d\omega\right| + c_{38}\frac{\beta_l^2}{\lambda_l} + c_{39}\beta_l\lambda_l. \tag{106}$$

Применяя (12), (13), (105), (34), находим, что

$$R\left|\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}(\Phi_l(\omega)-1)\pi_l(\omega)d\omega\right| \leqslant c_{40}\beta_l\lambda_l. \tag{107}$$

Используя соотношение (12), получаем равенство

$$\pi_l(\omega)-1 = \frac{-2\lambda_l\beta_l - \beta_l^2 + \epsilon_l(\omega_l-\omega-\lambda_l-\beta_l)}{\sqrt{(\omega_l-\omega)^2-\lambda_l^2}\sqrt{(\omega_l-\omega+\lambda_l+\beta_{l1})(\omega_l-\omega-\lambda_l-\beta_l)}+(\omega_l-\omega)^2-\lambda_l^2}. \tag{108}$$

Из (108) находим

$$\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}|\pi_l(\omega)-1|d\omega \leqslant I_1+I_2, \quad \text{где} \tag{109}$$

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} 3\lambda_l\beta_l\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}\frac{d\omega}{\sqrt{(\omega_l-\omega)^2-\lambda_l^2}\sqrt{(\omega_l-\omega+\lambda_l+\beta_{l1})(\omega_l-\omega-\lambda_l-\beta_l)}+(\omega_l-\omega)^2-\lambda_l^2},$$

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} |\epsilon_l|\int_{\omega_*}^{\widehat{\omega}}\frac{(\omega_l-\omega-\lambda_l-\beta_l)d\omega}{\sqrt{(\omega_l-\omega)^2-\lambda_l^2}\sqrt{(\omega_l-\omega+\lambda_l+\beta_{l1})(\omega_l-\omega-\lambda_l-\beta_l)}+(\omega_l-\omega)^2-\lambda_l^2}.$$

Положим $\Delta_* = \omega_l - \omega_*$, $\Delta = \omega_l - \widehat{\omega}$. Тогда $\Delta_* \geqslant c_{32}$, $\Delta \geqslant \lambda_l + \beta_l$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $\Delta \geqslant 2\lambda_l$. Тогда при $\omega \in [\omega_*, \widehat{\omega}]$ имеем

$$\omega_l - \omega - \lambda_l - \beta_l > \frac{1}{4}(\omega_l - \omega - \lambda_l),$$

$$\omega_l - \omega - \lambda_l - \beta_{l1} > \frac{1}{4}(\omega_l - \omega - \lambda_l),$$

поэтому, используя (84), находим,

$$I_1 \leqslant B_8' \lambda_l \beta_l \int\limits_{\Delta}^{\Delta_*} \frac{dv}{v^2 - \lambda_l^2} \leqslant B_8 \lambda_l \beta_l \frac{1}{\omega_l - \widehat{\omega}}, \tag{110}$$

$$I_2 \leqslant c_{28} \lambda_l^2 \beta_l^2 \cdot B_9' \int\limits_{\Delta}^{\Delta_*} \frac{dv}{v + \lambda_l} \leqslant c_{41} \lambda_l \beta_l. \tag{111}$$

2. $\lambda_l + 2\beta_l \leqslant \Delta \leqslant 2\lambda_l$. Тогда $I_1 \overset{def}{=} I_{11} + I_{12}$, где

$$I_{11} = 3\lambda_l \beta_l \int\limits_{\omega_*}^{\omega_l - 2\lambda_l} \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega_l - \omega)^2 - \lambda_l^2}\sqrt{(\omega_l - \omega + \lambda_l + \beta_{l1})(\omega_l - \omega - \lambda_l - \beta_l)} + (\omega_l - \omega)^2 - \lambda_l^2},$$

$$I_{12} = 3\lambda_l \beta_l \int\limits_{\omega_l - 2\lambda_l}^{\widehat{\omega}} \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega_l - \omega)^2 - \lambda_l^2}\sqrt{(\omega_l - \omega + \lambda_l + \beta_{l1})(\omega_l - \omega - \lambda_l - \beta_l)} + (\omega_l - \omega)^2 - \lambda_l^2}.$$

Применяя к оценке I_{11} соотношение (110) с $\Delta = 2\lambda_l$, найдем, что $I_{11} \leqslant \frac{1}{2} B_8 \beta_l$. Далее, имеем

$$I_{12} \leqslant B_9 \lambda_l \beta_l \cdot \frac{1}{\lambda_l} \cdot \int\limits_{\Delta}^{2\lambda_l} \frac{dv}{\sqrt{(v - \lambda_l)(v - \lambda_l - \beta_l)} + v - \lambda_l} \leqslant B_{10} \beta_l \log \frac{\lambda_l}{\Delta - \lambda_l},$$

в результате получаем $I_1 \leqslant B_{11} \beta_l \log \dfrac{\lambda_l}{\Delta - \lambda_l}$.

Затем, аналогично выражению I_1, представим I_2 суммой двух интегралов I_{21} и I_{22} по промежуткам $[\omega_*, \omega_l - 2\lambda_l]$ и $[\omega_l - 2\lambda_l, \widehat{\omega}]$.

Используя (84) для I_{21}, находим оценку $I_{21} \leqslant c_{42} \lambda_l \beta_l^2$. Для оценки величины I_{22} получаем

$$I_{22} \leqslant c_{43}' \lambda_l^2 \beta_l^2 \int\limits_{\lambda_l + 2\beta_l}^{2\lambda_l} \frac{dv}{v + \lambda_l} \leqslant c_{43} \lambda_l^2 \beta_l^2,$$

таким образом, $I_2 \leqslant c_{44} \lambda_l \beta_l^2$,

$$I_1 + I_2 \leqslant c_{45} \beta_l \log \frac{\lambda_l}{\Delta}. \tag{112}$$

Учитывая (109) и (84), получим соотношение

$$c'_{46}\beta_l \leqslant \int\limits_{\omega_l-\lambda_l-2\beta_l}^{\omega_l-\lambda_l-\beta_l} |\pi_l(\omega)-1|d\omega \leqslant c''_{46}\beta_l. \tag{113}$$

Используя оценки (104)–(107) и (110)–(113) и упрощая обозначения, при $\omega \in [\omega_*, \omega_l-\lambda_l-\beta_l]$ получим соотношение

$$|F(\omega)-\omega| \leqslant c_{47}\frac{\lambda_l\beta_l}{\omega_l-\omega-\lambda_l}\log\frac{\lambda_l+\omega_l-\omega}{\beta_l+\omega_l-\omega-\lambda_l}. \tag{114}$$

Проведение аналогичных рассуждений при $\omega_*-\omega_l-\lambda_l-\beta_{l1} \geqslant c_{32}$, $\omega_l+\lambda_l+\beta_{l1} \leqslant \omega \leqslant \omega_*$, дает аналогичную (114) оценку с заменой β_l на β_{l1}. Положим $\lambda_0 = \min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}\lambda_\nu$, $\beta_0 = \min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}\beta_\nu$,

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{n}[\omega_\nu-\lambda_\nu-\beta_\nu, \omega_\nu+\lambda_\nu+\beta_{\nu1}],$$

$\delta_E(\omega) = \operatorname{dist}(\omega, E)$.

Тогда оценка (114) с учётом соотношений (54), (84) при $\delta_E(\omega) \leqslant \frac{1}{2}(\omega_m-\omega_{m+1})$ будет иметь вид

$$|F(\omega)-\omega| \leqslant c_{49}\frac{\lambda_0\beta_0}{\lambda_0+\delta_E(\omega)}\log\frac{2(\lambda_0+\delta_E(\omega))}{\beta_0+\delta_E(\omega)}. \tag{115}$$

При $\omega \leqslant \omega_{m+1}-c_{32}$ или при $\omega \geqslant \omega_m+c_{32}$ имеем

$$\begin{aligned} F(\omega)-\omega &= (F(\omega)-F(\omega+i)) + (F(\omega+i)-\omega-i)+i \\ &= \int\limits_{\omega+i}^{\omega} F'(v)dv + ((F(\omega+i)-F(i))-(\omega+i-i)) - \int\limits_{\omega+i}^{\omega} dv \\ &= \int\limits_{\omega+i}^{\omega}(F'(v)-1)dv + \int\limits_{i}^{\omega+i}(F'(v)-1)dv \stackrel{def}{=} I_1+I_2. \end{aligned} \tag{116}$$

Применяя оценки (84), (100) и (102), получим неравенство $|I_1| \leqslant c_{50}\frac{\beta_0^2}{\lambda_0} + c_{51}\beta_0\lambda_0$, и для I_2 имеем соотношение

$$|I_2| \leqslant |R-1|\cdot|\omega| + R\left|\int\limits_{\omega}^{0} |\Phi(v+i)-1|dv\right| \leqslant \left(c'_{52}\frac{\beta_0^2}{\lambda_0} + c'_{53}\beta_0\lambda_0\right)|\omega| + c_{54}\beta_0^2\lambda_0^2\log(|\omega|+2) + c_{55}\beta_0\lambda_0 \leqslant \left(c''_{52}\frac{\beta_0^2}{\lambda_0} + c''_{53}\beta_0\lambda_0\right)(|\omega|+1). \tag{117}$$

Неравенства (115) и (117) можно записать в виде единого неравенства следующим образом: при $\omega \notin E$ справедливо

$$|F(\omega)-\omega| \leqslant c_{49}\frac{\lambda_0\beta_0}{\lambda_0+\delta_E(\omega)}\log\frac{2(\lambda_0+\delta_E(\omega))}{\beta_0+\delta_E(\omega)} + \left(c_{52}\frac{\beta_0^2}{\lambda_0} + c_{53}\beta_0\lambda_0\right)\delta_E(\omega). \tag{118}$$

Положим $\mathcal{G} = \bigcup\limits_{l=1}^{n}\Pi_l^{\pm}$, где $+$ или $-$ выбраны в соответствии со строением области U, при $x\notin\mathcal{G}$, $\Delta_{\mathcal{G}}(x) = \operatorname{dist}(x,\mathcal{G})$.

Используя оценки (113), (117), (53), (54) при $|x-a| = \Delta_{\mathcal{G}}(x)$, получим неравенство

$$c'_{56}(\delta_E(\phi(x))+\beta_l) \leqslant \Delta_{\mathcal{G}}(x) + b_l \leqslant c''_{56}(\delta_E(\phi(x))+\beta_l). \tag{119}$$

Поскольку $x = F(\omega) \Leftrightarrow \omega = \phi(x)$, из (118), (119) заключаем, что при $x\notin\mathcal{G}$ выполняется оценка

$$|\phi(x)-x| = |F(\omega)-\omega| \leqslant c_{56}\frac{a_0b_0}{a_0+\Delta_{\mathcal{G}}(x)}\log\frac{2(a_0+\Delta_{\mathcal{G}}(x))}{b_0+\Delta_{\mathcal{G}}(x)} + \left(c_{57}\frac{b_0^2}{a_0} + c_{58}b_0a_0\right)\Delta_{\mathcal{G}}(x), \tag{120}$$

где $a_0 = \min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n} a_\nu$, $b_0 = \min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n} b_\nu$. Мы учли условия, наложенные на α_ν и δ_ν и на связь между α_ν и a_ν, δ_ν и b_ν при отображении w.

Вернемся к подробным обозначениям. Пусть

$$z_0\in\Gamma\setminus\widetilde{G_k}, \quad z_0 = e^{i\theta_0}, \quad |\theta_0-\theta_k| \geqslant 2\delta_k.$$

Тогда области $D_{+-}(z_0)$, соответственно, области $D_{-+}(z_0)$ по построению будут одними и теми же при фиксированном k, к областям $U_{+-}(z_0)$ и $U_{-+}(z_0)$ приложимы все вышеприведенные рассуждения, оценки (120) от выбора k и знаков $+-$ или $-+$ не зависят. Обозначим через $\mathcal{G}_{+-}(z_0)$ и $\mathcal{G}_{-+}(z_0)$ множества, построенные для областей $U_{+-}(z_0)$ и $U_{-+}(z_0)$. В силу того, что для точек $e^{i\theta'_k}$, $e^{i\theta''_k}$ пересечения $\widetilde{G_k} \cap \mathbb{T}$ выполнено $|\theta'_k - \theta_k| \leqslant \frac{3}{2}\delta_k$, $|\theta''_k - \theta_k| \leqslant \frac{3}{2}\delta_k$, получим, что $x_0 \notin \mathcal{G}_{+-}(z_0)$, , $x_0 \notin \mathcal{G}_{-+}(z_0)$. Тогда для x_0 справедливо неравенство (120). Имеем соотношения

$$f_{+-,k}(z_0) - z_0 = p(F_{+-,k}(w(z_0)) - p(w(z_0)),$$

$$f_{-+,k}(z_0) - z_0 = p(F_{-+,k}(w(z_0)) - p(w(z_0)).$$

С абсолютными постоянными выполнены соотношения

$$\begin{cases} B_9^{-1}\Delta_{\mathcal{G}_{+-,k}}(w(z_0)) \leqslant d_k(z_0) \leqslant B_9\Delta_{\mathcal{G}_{+-,k}}(w(z_0)), \\ B_9^{-1}\Delta_{\mathcal{G}_{-+,k}}(w(z_0)) \leqslant d_k(z_0) \leqslant B_9\Delta_{\mathcal{G}_{-+,k}}(w(z_0)), \\ {B'_{10}}^{-1}a_0 \leqslant \alpha \leqslant B'_{10}a_0, \qquad {B''_{10}}^{-1}b_0 \leqslant \delta \leqslant B''_{10}b_0. \end{cases} \tag{121}$$

При $|\pi - \theta_0| \geqslant c_0$ имеем в силу (1)

$$|\arg f_{+-,k}(z_0) - \pi| \geqslant \frac{c_0}{2}, \quad |\arg f_{-+,k}(z_0) - \pi| \geqslant \frac{c_0}{2},$$

поэтому, применяя (120) и (121), находим,

$$\begin{aligned} &|p\,(F_{+-,k}(w(z_0)) - p(w(z_0))| \leqslant \widetilde{c_1}(c_0)|F_{+-,k}(w(z_0)) - w(z_0)| \\ &\quad\leqslant c_{56}\frac{a_0b_0}{a_0 + \Delta_{\mathcal{G}_{+-,k}}(w(z_0))}\log\frac{2(a_0 + \Delta_{\mathcal{G}_{+-,k}}(w(z_0))}{b_0 + \Delta_{\mathcal{G}_{+-,k}}(w(z_0))} \\ &\quad+ \left(c_{57}\frac{b_0^2}{a_0} + c_{58}b_0a_0\right)\Delta_{\mathcal{G}_{+-,k}}(w(z_0)) \\ &\quad\leqslant c'_{59}\frac{\alpha\delta}{\alpha + d_k(z_0)}\log\frac{2(\alpha + d_k(z_0))}{\delta + d_k(z_0)} + \left(c'_{60}\frac{\delta^2}{\alpha} + c'_{61}\alpha\delta\right)d_k(z_0) \\ &\quad\leqslant c_{59}\frac{\alpha\delta}{\alpha + d_k(z_0)}\log\frac{2(\alpha + d_k(z_0))}{\delta + d_k(z_0)}. \end{aligned} \tag{122}$$

Оценка (122) справедлива для $f_{-+,k}(z_0) - z_0$.

Пусть $\widetilde{\sigma}$ – правая часть в (122), $\sigma = \frac{\pi}{2}\widetilde{\sigma}$. Тогда построение функций $f_{+-,k}$, $f_{-+,k}$ и (122) показывают, что $f(z_0)$ лежит на меньшей дуге окружности $\mathbb{T}$ с серединой z_0 и длиной 2σ, откуда следует соотношение (I) в этом случае.

Если же $|\theta_0 - \pi| \leqslant \frac{c_0}{2}$, то главным слагаемым в (120) является второе, тогда, проводя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, получим даже лучшую, чем (I) оценку

$$|f(z_0) - z_0| \leqslant c_{60}|z_0 + 1| \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \alpha\delta \right). \tag{123}$$

Для доказательства соотношения (II) заметим, что при $z_0 = e^{i\theta_0}$, $|\theta_0 - \theta_k| \leqslant \alpha_k + 2\delta_k$ образ $f(z_0)$ лежит на дуге с серединой θ_k и длиной $2\alpha_k + 4\delta_k + 2\sigma$. При соответствующем выборе чисел c_0' и c_* имеем $4\delta_k + 2\sigma < \frac{\alpha_k}{2}$, откуда и будет следовать (II).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва, Наука, 1966.
2. Н. А. Широков, *Количественное уточнение теоремы Радо* — Зап. научн. сем. ЛОМИ, Изд-во Наука, Ленинград. отд., Л., **157** (1987), 103–112.
3. Н. А. Широков, *О средних степени – 2 производных в классе S.* — Алгебра и анализ, **28:6** (2016), 189–207.
4. И. И. Привалов, *Граничные свойств аналитических функций*, М., Ленинград, Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950.
5. Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Пер. с англ. В. В. Кривова М., Мир, 1969.
6. П. П. Белинский, *Общие свойства квазиконформных отображений*, Новосибирск, Наука, 1974.

Kuznetsova M. S., Shirokov N. A. Conformal maps of a region that is geometrically close to a disk.

Let D be a Jordan domain differing from the unit disk in a finite number of domains of small diameter, and let f be a conformal mapping of D onto the unit disk. Under some additional assumptions, the deviation of f from the identity mapping is estimated in explicit terms.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7–9,
С.-Петербург,199034, Россия
E-mail: mkuznetsova@hse.ru

Поступило 25 июля 2022 г.

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Кантемировская ул. 3,
С.-Петербург, 194100, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com