

С. В. Кисляков, А. А. Скворцов

## ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ И КЛАССЫ ХАРДИ

Эта статья – небольшой обзор (с несколькими новыми элементами) примеров применения теорем о неподвижной точке к некоторым аспектам теории пространств Харди. За последние четверть века такие применения были многочисленны, что, может быть, несколько удивительно. Очень эффективны теоремы о неподвижной точке оказались в теории интерполяции и в задачах, связанных с теоремой о короне.

Изложение построено следующим образом. В §1 мы формулируем удобный вариант теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений, а в §2 мы перечисляем основные ее приложения в обозначенных выше вопросах. В §3 приведено простое доказательство теоремы о неподвижной точке, вероятно, не встречавшееся ранее в литературе. Наконец, в §4 в качестве иллюстрации рассмотрены подробно два приложения этой теоремы. Материал §4 тоже в какой-то мере нов.

### §1. ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Нас будут интересовать неподвижные точки у многозначных отображений.

**Определение.** Пусть  $K$  и  $L$  – непустые множества,  $\Phi : K \rightarrow 2^L$  – отображение. Графиком отображения  $\Phi$  называется множество  $\{(x, y) \in K \times L : y \in \Phi(x)\}$ . При  $K = L$  точка  $x \in K$  называется неподвижной для  $\Phi$ , если  $x \in \Phi(x)$ .

Если  $K$  и  $L$  – топологические пространства, мы часто будем требовать, чтобы график отображения  $\Phi$  был замкнут. Если  $\Phi$  – однозначное непрерывное отображение из  $K$  в  $L$ , то, разумеется, его график замкнут.

Если  $K$  и  $L$  – выпуклые компакты в каких-нибудь хаусдорфовых локально выпуклых пространствах, а  $\Phi : K \rightarrow 2^L$  – отображение с

---

*Ключевые слова:* пространства Харди, интерполяция, теорема о короне.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 18-11-00053, <https://rscf.ru/project/18-11-00053>.

замкнутым графиком такое, что все множества  $\Phi(x)$ ,  $x \in K$ , выпуклы и непусты, мы будем говорить, что  $\Phi$  есть FGK-отображение (название в честь Ки Фана, И. Гликсберга и С. Какутани; причина такого наименования скоро станет ясна).

Композиция двух многозначных отображений  $\Phi_1 : K \rightarrow 2^L$  и  $\Phi_2 : L \rightarrow 2^M$  определяется естественным образом:

$$\Phi_2 \circ \Phi_1(x) = \cup\{\Phi_2(y) : y \in \Phi_1(x)\}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $K_j$ ,  $1 \leq j \leq n+1$ , – выпуклые компакты в хаусдорфовых ЛВП, а  $\Phi_j : K_j \rightarrow 2^{K_{j+1}}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , – FGK-отображения. Если  $K_1 = K_{n+1}$ , то композиция  $\Phi = \Phi_n \circ \dots \circ \Phi_1$  имеет неподвижную точку.

Если  $n = 1$  (имеется только одно многозначное отображение), мы получаем знаменитую теорему Ки Фана–Гликсберга–Какутани. Какутани принадлежит конечномерный случай, см. [1]. Бесконечномерное обобщение независимо опубликовали в 1952 г. Ки Фан [2] и Гликсберг [3].

Если  $n = 1$  и отображение  $\Phi_1$  однозначно, получается, кстати, классический принцип Шаудера (или Шаудера–Тихонова, или Лере–Шаудера).

У композиции отображений – таких, как в теореме 1, – значения могут уже не быть выпуклыми множествами, поэтому непосредственно случай  $n > 1$  к случаю  $n = 1$  не сводится. В действительности, теорема 1 – далеко не самый сильный из результатов такого рода: см., например, статью Пауэрса [4] с дополнениями и уточнениями в работах Парка [5, 6]. Не приводя точных и самых общих формулировок, отметим лишь, что выпуклость образов  $\Phi_j(x)$  не обязательна, ее можно заменить (при некоторых естественных ограничениях) требованием тривиальности всех редуцированных групп когомологий Чеха с рациональными коэффициентами. Однако во всех приложениях, которые мы собираемся обсуждать, приведенной прозрачной формулировки с выпуклыми образами достаточно. Кроме того, мы увидим (см. §3), что доказать теорему 1 для произвольного  $n$  можно на том же уровне сложности (скорее, впрочем, простоты), как это было сделано в 1952 г. для  $n = 1$ .

## §2. РЕТРОСПЕКТИВА

Мы обсудим два сорта приложений теоремы о неподвижной точке – в теории интерполяции пространств Харди и в задаче о короне, а точнее, в родственной и более общей задаче об идеалах.

**2.1. Интерполяция.** Мы стремимся следовать основному сюжету, поэтому сведения собственно об интерполяции будут поневоле фрагментарны и даны несколько непоследовательно. Более систематические недавние обзоры предмета содержатся, например, в [7, 8]. Там же есть исторические сведения и ссылки на более ранние обзорные статьи.

2.1.1. *Пространства Кётэ. ВМО-регулярность.* Пусть  $(S, \Sigma, \mu)$  – пространство с мерой. Пространство Кётэ – это квазибанахово пространство  $X$  измеримых функций на  $S$ , удовлетворяющее условию

$$|f| \leq |g|, \quad g \in X \Rightarrow f \in X \quad \text{и} \quad \|f\|_X \leq C \|g\|_X,$$

если только функция  $f$  измерима.

Следующее понятие оказалось очень важным в теории интерполяции пространств Харди на окружности  $\mathbb{T}$ . Чтобы иметь возможность рассматривать пространства последовательностей аналитических функций, в качестве основного пространства с мерой  $S$  мы возьмем  $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ , где окружность  $\mathbb{T}$  наделена мерой Лебега, а множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  – считающей мерой. Пространство Кётэ  $X$  на  $S$  называется ВМО-регулярным, если для всякой функции  $0 \neq f \in X$  найдется такая функция  $g \in X$ , что  $|f| \leq g$ ,  $\|g\|_X \leq C \|f\|_X$  и  $\sup_n \|\log g(\cdot, n)\|_{\text{ВМО}} \leq C$  (константа  $C$  зависит только от  $X$ ).

<sup>n</sup> Напомним, что пространство Кётэ удовлетворяет условию Фату, если его единичный шар замкнут относительно сходимости по мере на всех множествах конечной меры.

Следующая теорема была доказана в [9] с помощью теоремы 1 при  $n = 1$ .

**Теорема 2.** Пусть  $X$  – банахово пространство Кётэ на  $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ , удовлетворяющее условию Фату. Пусть еще  $0 < \beta < 1$ .

Следующие утверждения эквивалентны.

1°. Пространство  $X$  ВМО-регулярно.

2°. Порядковое сопряженное  $X'$  ВМО-регулярно.

3°. Для всех достаточно малых  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  (эквивалентно: для какого-то одного), оператор гармонического сопряжения, применяемый по первой переменной, ограничен в пространстве  $[X^\alpha(L^1)^{1-\alpha}]^\beta$ .

Поясним использованные обозначения. Под пространством  $L^1$  понимается  $L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{N}) = L^1(\mathbb{T}, l^1)$ . Порядковое сопряженное  $X'$  по определению состоит из тех функционалов из  $X^*$ , которые представимы интегралом с измеримой функцией. Определение степени пространства Кётэ  $X$  ясно из формулы  $\|f\|_{X^\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \| |f|^{1/\alpha} \|_X^\alpha$ . Определение произведения пространств Кётэ  $E$  и  $F$  снова ясно из формулы для соответствующей квазинормы:

$$\|u\|_{EF} = \inf \{ \|v\|_E \|w\|_F; u = vw \}.$$

2.1.2. ВМО-регулярность для пар. Пусть  $X$  и  $Y$  – два пространства Кётэ на  $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ . Пара  $(X, Y)$  называется ВМО-регулярной, если для всяких ненулевых функций  $x \in X$ ,  $y \in Y$  найдутся функции  $u \in X$  и  $v \in Y$  такие, что  $|x| \leq u$ ,  $|y| \leq v$ ,  $\|u\|_X \leq C\|x\|_X$ ,  $\|v\|_Y \leq C\|y\|_Y$  и  $\sup_n \left\| \log \frac{u(\cdot, n)}{v(\cdot, n)} \right\|_{\text{ВМО}} \leq C$ .

Ясно, что если  $X$  и  $Y$  ВМО-регулярны порознь, то ВМО-регулярна и пара  $(X, Y)$ . Обратное неверно.

В [10] по техническим причинам было введено еще одно условие для пар: пара  $(X, Y)$  называлась слабо ВМО-регулярной, если ВМО-регулярна пара  $(XL^1, YL^1)$ . С этим условием было несколько проще работать, а с другой стороны в вопросах интерполяции оно вполне заменяло обычную ВМО-регулярность. Однако позже Д. В. Руцкий доказал, что слабая ВМО-регулярность эквивалентна обычной, причем для этого он снова использовал теорему 1 при  $n = 1$ .

Сейчас этот пример носит, скорее, иллюстративный характер (см. п. 2.1.5 ниже). Мы привели его, в частности, потому, что идею доказательства нетривиальной импликации (слабая ВМО-регулярность влечет обычную) здесь легко объяснить.

Пусть  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Для каждой пары п.в. положительных функций  $u_1, u_2 \in L^1$ ,  $\|u_1\|_{L^1} = \|u_2\|_{L^1} = 1$ , можно образовать пару  $(xu_1, yu_2)$  функций из пространств  $XL^1$  и  $YL^1$ . По условию, для нее можно найти пару функций  $(w_1, w_2)$  как в определении ВМО-регулярности:

$$\begin{aligned} |xu_1| \leq w_1, \quad |yu_2| \leq w_2, \quad \left\| \log \frac{w_1}{w_2} \right\|_{\text{ВМО}} \leq C, \\ \|w_1\|_{XL^1} \leq C\|x\|_X \|u_1\|_{L^1} = C\|x\|_X, \quad \|w_2\|_{YL^1} \leq C\|y\|_Y. \end{aligned}$$

Тогда найдутся положительные функции  $v_1$  и  $v_2$  из  $L^1$  с единичными нормами и такие, что

$$\|w_1 v_1^{-1}\|_X \leq C \|x\|_X, \quad \|w_2 v_2^{-1}\|_Y \leq C \|y\|_Y$$

и  $\log v_1 v_2^{-1} \in \text{ВМО}$  (последнее – потому, что пространство  $L^1$  ВМО-регулярно). Эти функции  $v_1$  и  $v_2$  можно выбрать многими способами. Но если удастся для некоторой пары  $(u_1, u_2)$  устроить так, чтобы  $v_1 = u_1$  и  $v_2 = u_2$ , наша задача будет решена.

Разумеется, это лишь идея; конкретный способ применения теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани в этой ситуации требует серьезной дополнительной работы. См. п. 4.1 по поводу другой подобной постановки (тоже простая идея и не очень простая реализация).

2.1.3. *Зачем все это?* Фрагменты теории, изложенные выше, возникли из очень старого вопроса о том, как интерполировать вещественным методом между классами Харди  $H^p$  на единичной окружности,  $p \in (0, +\infty]$ . Разумеется, здесь прежде всего приходит в голову попытаться воспользоваться готовой формулой

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{\theta, q} = L^{p, q}, \quad p^{-1} = (1 - \theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}.$$

Однако окончательно понято, что верна аналогичная формула

$$(H^{p_0}, H^{p_1})_{\theta, q} = H^{p, q}, \quad (*)$$

было только в 1980-е годы.

Один из общих подходов к такого рода задачам состоит в следующем. Пусть  $(X, Y)$  – совместимая пара квазибанаховых пространств, а  $X_0$  и  $Y_0$  – замкнутые подпространства, соответственно, в  $X$  и  $Y$ . Говорят, что пара  $(X_0, Y_0)$   $K$ -замкнута в  $(X, Y)$ , если для всякого вектора  $f \in X_0 + Y_0$  и всякого его разложения  $f = x + y$  с  $x \in X_0$ ,  $y \in Y_0$  существует другое разложение  $f = g + h$ , где  $g \in X_0$ ,  $h \in Y_0$  и  $\|g\|_X \leq C \|x\|_X$ ,  $\|h\|_Y \leq C \|y\|_Y$ . Здесь  $C$  не зависит от участвующих векторов.

Определение интерполяционных пространств вещественного метода в терминах  $K$ -функционала сразу показывает, что из  $K$ -замкнутости следует формула

$$(X_0, Y_0)_{\theta, q} = (X, Y)_{\theta, q} \cap (X_0 + Y_0).$$

В шкалах  $H^p(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$   $K$ -замкнутость имеет место для любых пар показателей (те же 1980-е годы), именно поэтому справедлива формула (\*). Для пространств последовательностей функций (когда основное пространство с мерой есть  $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ ) ситуация аналогична: при

переходе от измеримых функций из  $L^p(\mathbb{T} \times \mathbb{N})$  к функциям из классов Харди по первой переменной тоже возникает  $K$ -замкнутость. Естественно спросить теперь, что происходит за пределами шкалы  $L^p$ ?

Пусть  $X$  – пространство Кётэ на  $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$ , на которое обычно накладывают некоторые необременительные условия. (Мы не будем обсуждать их; отметим только, что часто накладывается условие Фату.) Тогда возникает пространство типа Харди

$$X_A = \{f \in X : f(\cdot, k) \in N^+ \text{ при } k \in \mathbb{N}\},$$

где  $N^+$  – граничный класс В. И. Смирнова. Ясно, что  $L_A^p = H^p$ . Естественно интересоваться тем, когда пара  $(X_A, Y_A)$   $K$ -замкнута в  $(X, Y)$  ( $Y$  – еще одно пространство Кётэ).

Оказалось, что это верно всякий раз, когда пара  $(X, Y)$  ВМО-регулярна (доказательство довольно просто, но мы на нем не останавливаемся). Далее, уже отмечалось, что пара  $(X, Y)$  ВМО-регулярна, если пространства  $X$  и  $Y$  ВМО-регулярны по отдельности. Последнее: ВМО-регулярные пространства встречаются очень часто – тем самым, и интерполировать между пространствами вида  $X_A$  очень часто можно так же, как и между породившими их пространствами Кётэ.

Одна из причин появления результатов о ВМО-регулярности, цитированных выше, состояла в желании расширить число доступных примеров. Так, в частности, ВМО-регулярность пространства  $L^\infty(\mathbb{T}, l^p)$  при  $p < +\infty$  вряд ли видна непосредственно из определения – однако она легко следует из эквивалентности  $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$  в теореме 2. Другой причиной было выяснение того, насколько ВМО-регулярность в той или иной форме необходима для упомянутой  $K$ -замкнутости или даже просто для “хорошей” интерполяции пространств типа Харди. Бытовала, среди прочего, гипотеза об эквивалентности ВМО-регулярности пары  $(X, Y)$  и  $K$ -замкнутости пары  $(X_A, Y_A)$  в  $(X, Y)$ . Эта гипотеза оказалась неверной, пример см. в [8].

2.1.4. *Теорема Д. В. Руцкого.* Удовлетворительное описание “хорошей” интерполяции в терминах ВМО-регулярности было получено Д. В. Руцким в той же работе [8]. В доказательстве основных результатов там снова очень существенно используется теорема 1 – несколько раз на разных этапах рассуждения, причем с  $n > 1$  (т.е. классической теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани здесь недостаточно). Приведем формулировку, несколько разгрузив ее в сравнение

с [8] и ограничившись для простоты банаховыми пространствами Кётэ  $X$  и  $Y$ , на которые наложено условие Фату.

**Теорема 3** (см. [8, теорема 2.7]). Пусть  $\theta \in (0, 1)$ . Следующие условия эквивалентны.

(i)  $[(X, Y)_{\theta, s}]_A = (X_A, Y_A)_{\theta, s}$  для некоторого (эквивалентным образом, для всех)  $s \in [1, \infty)$ .

(ii) Пара  $(X_A, Y_A)$   $K$ -замкнута в паре  $(X, Y)$ .

(iii) При некоторых  $0 < \alpha < \theta < \beta < 1$  (эквивалентно, при всех  $0 < \alpha < \beta < 1$ ) и  $1 \leq p, q \leq \infty$  пара  $((X, Y)_{\alpha, p}, (X, Y)_{\beta, q})$  ВМО-регулярна.

(iv) Пространство  $(L^1, X'Y)_{\eta, s}$  ВМО-регулярно при некоторых  $0 < \eta < 1$  и  $1 \leq s \leq +\infty$ .

(v) Имеет место вложение  $(X^{1-\theta}Y^\theta)_A \subset (X_A, Y_A)_{\theta, \infty}$ .

Стоит отметить, что условие (iv) связывает “хорошую” интерполяцию с ВМО-регулярностью одного пространства (а не пары).

### 2.1.5. ВМО-регулярность и операторы гармонического анализа.

Связь между этими вещами можно усмотреть уже из эквивалентности  $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$  в теореме 2.

Заметим, что определения ВМО-регулярности (что для отдельных пространств, что для пар) можно буквально перенести на пространства Кётэ на  $\mathbb{R}^d$  с мерой Лебега. Эти новые понятия уже не связаны с комплексным анализом, во всяком случае при  $d > 1$ . Тем не менее, хочется иметь что-то вроде теоремы 2 и в этом случае.

Комплексный анализ был очень глубоко вплетен в доказательство теоремы 2, которое представлено в работе [9], так что перенести те рассуждения на  $\mathbb{R}^n$  не представляется возможным. Тем не менее, нечто похожее на теорему 2 в этой ситуации было доказано в [12]. Это снова было сделано с помощью теоремы 1 при  $n = 1$ .

Именно, пусть  $T$  – какой-нибудь невырожденный оператор типа Кальдерона–Зигмунда или максимальный оператор Харди–Литлвуда. (“Невырожденный” более или менее означает, что сингулярное ядро действительно имеет характерную для таких операторов особенность; в общем, надо обязательно исключить 0, а с ним и все похожее.) Если  $X$  – банахово пространство Кётэ на  $\mathbb{R}^n$ , то ВМО-регулярность пространства  $X$  эквивалентна тому, что оператор  $T$  ограничен в пространстве  $(X^\alpha(L^1)^{1-\alpha})^\beta$  при некотором  $\beta > 0$  и всех достаточно малых  $\alpha \in (0, 1)$  (эквивалентно, при одном  $\alpha$ ).

В той же работе имеется похожий результат про ВМО-регулярность пар (теорема 8 в [12]). Он покрывает уже упоминавшийся в п. 2.1.2 результат работы [11]. В доказательстве опять была применена теорема 1 с  $n = 1$ .

Другое применение теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани можно найти в [13]. Там речь шла об ограниченности сингулярных интегральных операторов и максимальной функции в пространствах вида  $X(Y)$ , где  $X$  – пространство Кётэ на  $\mathbb{R}^n$ , а  $Y$  – пространство Кётэ на другом пространстве с мерой. Мы не приводим формулировок, чтобы не перегружать изложение.

**2.2. Теорема о короне и задача об идеалах.** Как и в случае интерполяции, мы опускаем исторические сведения и мотивировки: о них можно прочитать в цитированных далее источниках. Начнем с задачи об идеалах.

Пусть  $E$  – какое-нибудь пространство Кётэ на множестве  $\mathbb{N}$  (“идеальное пространство последовательностей”). Будем предполагать, что норма в нем порядково абсолютно непрерывна (в нашей ситуации это просто означает, что стандартные координатные орты образуют базис в  $E$ ).

Будем говорить, что для решетки  $E$  разрешима задача об идеалах с показателем  $\alpha$  и константой  $C$ , если для всякой функции  $h$  из  $H^\infty(\mathbb{D})$  и всякой вектор-функции  $f$  из  $H^\infty(\mathbb{D}; E)$ , удовлетворяющих условию

$$|h(z)| \leq \|f(z)\|_E^\alpha \leq 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

существует функция  $g$  из  $H^\infty(E')$ , для которой

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f(z, j)g(z, j) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(z), g(z) \rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

при этом  $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D}, E')} \leq C$ .

И. К. Злотников в [14], снова с помощью теоремы 1 при  $n = 1$ , доказал, что если  $E$  –  $q$ -вогнутая решетка, то задача об идеалах для  $E$  разрешима с показателем  $(1 + \varepsilon)q$  и с константой  $C$ , зависящей только от  $q$  и  $\varepsilon$ .

В действительности Злотников вывел этот результат из очень давно известного случая, когда  $E = l^2$ . Схема его рассуждений была аналогична методу из статьи Руцкого [15], в которой нечто похожее (переход от одной решетки  $E$  к любой другой) было сделано в задаче о короне.



Задача о короне – это более известный вариант задачи об идеалах, относящийся к случаю, когда  $h$  – ненулевая константа. Иными словами, условие задачи о короне состоит в том, что

$$0 < \delta \leq \|f(z)\|_E \leq 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

а найти требуется функцию  $g$  из  $H^\infty(E')$  такую, что  $1 \equiv \langle f(z), g(z) \rangle$ , с оценкой  $\|g\|_{H^\infty(E')} \leq C(E, \delta)$ .

И снова в [15] использовалась теорема 1 с  $n = 1$ .

Полезно придать рассматриваемым постановкам более общий вид. Для простоты ограничимся случаем, который в контексте предыдущего обсуждения потребовал бы конечномерности пространства  $E$ .

Пусть  $E_1$  и  $E_2$  – два конечномерных банаховых пространства (не обязательно Кётэ). Читатель легко поймет, что в примерах выше нужно брать  $E_2 = \mathbb{C}$ . Далее, пусть  $F$  – ограниченная аналитическая функция в круге со значениями в пространстве линейных непрерывных операторов из  $E_1$  в  $E_2$ .

*Общая задача о короне* состоит в отыскании условий на  $F$ , при которых

$$H^\infty(E_2) = \{F(z)g(z) : g \in H^\infty(E_1)\} \quad (**)$$

В этой формуле  $F(z)g(z)$  означает действие оператора  $F(z)$  на вектор  $g(z)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ .

*Общая задача об идеалах* (тут, скорее, надо было бы говорить о “задаче о модулях”, но мы не будем так делать) состоит в описании множества  $F \cdot H^\infty(E_1)$  для заданной и фиксированной функции  $F$ .

Разумеется (и, пожалуй, даже прежде всего) интересны и оценки решений  $g$  уравнения  $F(z)g(z) = h(z)$ , и по разным причинам (как уже говорилось, объяснения и ссылки имеются в цитированных в этом пункте источниках) полезно не ограничиваться  $L^\infty$ -метрикой в формулах типа (\*\*). В связи со сказанным, введем еще одно понятие.

**Определение.** Пусть задана операторнозначная функция  $F$  как выше. Говорят, что  $L^p$ -задача о короне ( $1 \leq p \leq \infty$ ) разрешима с константой  $C$ , если для всякой функции  $u \in H^p(E_2)$  найдется такая функция  $v \in H^p(E_1)$ , что

$$F(z)v(z) = u(z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad \text{и} \quad \|v\|_{H^p(E_1)} \leq C\|u\|_{H^p(E_2)}.$$

Следующий результат был доказан в [16] с помощью теоремы 1 при  $n = 1$ .

**Теорема 4.** *Если для заданной функции  $F$   $L^p$ -задача о короне разрешима с константой  $C$  при одном  $p \in [1, +\infty]$ , то она разрешима с той же константой при любом другом значении  $p \in [1, +\infty]$ .*

Разумеется, труден здесь переход от конечного  $p$  к  $p = +\infty$ . В действительности в [16] было доказано более сильное утверждение, мы на нем не останавливаемся.

Аналог теоремы 4 для общей задачи об идеалах придумать не так легко – по той причине, что там мы зачастую не знаем, из чего в точности состоит образ  $F \cdot H^p(E_1)$  (обычно доступны лишь достаточные условия принадлежности этому образу). В §4 мы все же приведем одно (новое) утверждение такого характера в порядке иллюстрации.

### §3. ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В приведенных примерах только в одном случае – в [8] – теорема 1 использовалась в полной общности. Во всех остальных хватило классического результата Ки Фана–Гликсберга–Какутани. Более того (см. подробнее п. 4.2), иногда даже предпринимались специальные усилия, чтобы не выйти за рамки той классической теоремы. Причина в том, что результаты Пауэрса [4] и более поздние, упомянутые в §1, – вещи более высокого уровня сложности, чем теорема Ки Фана–Гликсберга–Какутани, и казалось, что путь к теореме 1 с  $n > 1$  имеется только через эти результаты.

Однако мы сейчас покажем, что теорема 1 в полной общности (то есть случай, когда все отображения переводят точки в *выпуклые* множества) на самом деле не сложнее теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани и может быть получена той же техникой, которая использовалась в 1952 г.

Заметим сначала, что если  $S_1, S_2$  и  $S_3$  – произвольные хаусдорфовы компакты, а отображения  $a : S_1 \rightarrow 2^{S_2}$  и  $b : S_2 \rightarrow 2^{S_3}$  имеют замкнутый график, то замкнут и график отображения  $b \circ a$ . (В частности, все множества  $(b \circ a)(s)$ ,  $s \in S_1$ , замкнуты.)

Действительно, возьмем два сходящиеся направления  $s_\alpha \rightarrow s$  в  $S_1$  и  $t_\alpha \rightarrow t$  в  $S_3$  так, чтобы  $t_\alpha \in (b \circ a)(s_\alpha)$ . Найдутся такие точки  $u_\alpha \in S_2$ , что  $u_\alpha \in a(s_\alpha)$  и  $t_\alpha \in b(u_\alpha)$ . Перейдя к поднаправлениям, можно считать, что  $u_\alpha \rightarrow u$ . Тогда  $u \in a(s)$  и  $t \in b(u)$  в силу замкнутости графиков отображений  $a$  и  $b$ . Поэтому  $t \in (b \circ a)(s)$ , что и требовалось.

По индукции это утверждение распространяется на композицию конечного числа отображений.

**Доказательство теоремы 1.** Рассуждаем по индукции. База ( $n = 1$ ) – это теорема Ки Фана–Гликсберга–Какутани, однако мы передокажем и ее – для полноты и поскольку так удобней. Итак, у нас имеются выпуклые компакты  $K_1, \dots, K_{n+1}$  в хаусдорфовых ЛВП  $X_1, \dots, X_{n+1}$ , а также FGK-отображения  $\Phi_j : K_j \rightarrow 2^{K_{j+1}}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Кроме того, предполагается, что  $K_{n+1} = \bar{K}_1$ . Тогда можно считать, что и  $X_1 = X_{n+1}$  по составу элементов (просто заменим эти пространства линейной оболочкой множества  $K_1$ ).

Надо доказать, что отображение  $\Psi = \Phi_n \circ \dots \circ \Phi_1$  имеет неподвижную точку. Подчеркнем, что при  $n = 1$  предыдущая формула для  $\Psi$  неправильная, а именно,  $\Psi = \Phi_1$  (а не  $\Psi = \Phi_1 \circ \Phi_1$ ). Эту небрежность, впрочем, допускают всегда; мы сделали оговорку, поскольку собираемся проверять базу и индукционный переход параллельно.

Сначала модифицируем отображение  $\Phi_n$ . Пусть  $\mathcal{V}$  – база абсолютно выпуклых открытых окрестностей нуля в  $X_{n+1}$ . Для  $V \in \mathcal{V}$  определим отображение  $G_V : K_n \rightarrow 2^{K_{n+1}} = 2^{K_1}$ :

$$G_V(x) = (\Phi_n(x) + \bar{V}) \cap K_1.$$

Проверим, что отображение  $G_V$  имеет замкнутый график. Пусть  $x_\alpha$  и  $y_\alpha$  – сходящиеся обобщенные последовательности точек из  $K_n$  и из  $K_1$  соответственно, причем  $x_\alpha \rightarrow x$ ,  $y_\alpha \rightarrow y$  и  $y_\alpha \in G_V(x_\alpha)$ . Запишем  $y_\alpha = u_\alpha + v_\alpha$ , где  $u_\alpha \in \Phi_n(x_\alpha)$ ,  $v_\alpha \in \bar{V}$ . Поскольку точки  $u_\alpha$  лежат в компактном множестве  $K_1$ , можно считать, что  $u_\alpha \rightarrow u$ . Тогда и  $v_\alpha \rightarrow v \stackrel{\text{def}}{=} y - u$ , причем  $v \in \bar{V}$ . Так как  $u \in \Phi_n(x)$  в силу замкнутости графика отображения  $\Phi_n$ , получаем отсюда, что  $y = u + v \in G_V(x)$ .

Пусть теперь  $T_V$  – множество неподвижных точек отображения  $\Delta = G_V \circ \dots \circ \Phi_1$  (соответственно,  $\Delta = G_V$  при  $n = 1$ ). Это множество замкнуто в силу замкнутости графика отображения  $\Delta$ . Если все множества  $T_V$  непусты, то в силу компактности их пересечение тоже непусто, а любая его точка неподвижна для  $\Psi$ .

Таким образом, надо проверить наличие неподвижных точек у отображения  $\Delta$  при любом  $V$ . С этого момента считаем окрестность  $V$  фиксированной.

Множества  $\{x + V\}_{x \in K_1}$  покрывают компакт  $K_1$  и открыты. Выберем конечное подпокрытие  $z_1 + V, \dots, z_p + V$  из этого покрытия. Пусть  $C = \text{conv}\{z_1, \dots, z_p\}$  (это – компактное подмножество множества  $K_1$ ). Определим отображение

$$\tilde{\Phi}_n : K_n \rightarrow 2^C, \quad \tilde{\Phi}_n(x) = G_V(x) \cap C, \quad x \in K_n.$$

Все значения отображения  $\tilde{\Phi}_n$  – компактные выпуклые множества. Проверим, что они непусты. Действительно, при любом  $x$  из  $K_n$  имеем

$$\emptyset \neq \Phi_n(x) \subset K_1 \subset C + V \subset C + \bar{V},$$

откуда  $(\Phi_n(x) - \bar{V}) \cap C \neq \emptyset$ . Но  $\bar{V} = -\bar{V}$ , поэтому множество  $G_V(x)$  пересекает  $C$ . Далее, замкнутость графика отображения  $\tilde{\Phi}_n$  очевидна.

Для удобства дальнейших обозначений, мы переименуем отображения  $\Phi_j$  с  $j < n$  (если таковые есть) в  $\tilde{\Phi}_j$  и будем писать  $\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}_n \circ \dots \circ \tilde{\Phi}_1$ , при  $n > 1$  (или  $\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}_1$  при  $n = 1$ ).

Натянем на множество  $C$  аффинное подпространство (оно конечномерно), в котором найдем замкнутый симплекс  $B$ , содержащий  $C$ . Беря в  $C$  внутреннюю точку относительно указанного аффинного подпространства, устроим стандартную ретракцию  $r : B \rightarrow C$  вдоль лучей, исходящих из этой внутренней точки как из центра. Мы найдем неподвижную точку  $u$  отображения  $\tilde{\Psi} \circ r : B \rightarrow 2^B$  (оно действует даже в  $2^C$ ). Разумеется, этого будет достаточно.

На следующем шаге мы в каком-то смысле заменим отображение  $\tilde{\Phi}_1$  серией однозначных отображений.

Рассмотрим  $k$ -е симплициальное разбиение симплекса  $B$ . Сопоставим ему отображение  $\varphi_k : B \rightarrow K_2$  (при  $n > 1$ ; если  $n = 1$ ,  $\varphi_k$  действует в множество  $C \subset B$ ) следующим образом. Если  $x$  – одна из вершин выбранного симплициального разбиения, то в качестве  $\varphi_k(x)$  назначаем любую точку множества  $\tilde{\Phi}_1(rx)$ . После этого продолжаем  $\varphi_k$  на все симплексы разбиения с вершин линейно. Ясно, что все отображения  $\varphi_k$  непрерывны.

Далее рассуждения очень ненадолго теряют единообразность.

База ( $n = 1$ ). Каждое отображение  $\varphi_k : B \rightarrow B$  имеет неподвижную точку  $w_k$  по теореме Брауэра.

Индукционный переход ( $n > 1$ , для композиции из  $n - 1$  отображения теорема уже доказана).

В этом случае  $\tilde{\Phi}_2 \circ \varphi_k$  есть FGK-отображение, а его композиция с оставшимися (которых может и не быть: при  $n = 2$ ) удовлетворяет индукционному предположению. Для единообразия будем записывать эту композицию в виде  $A \circ \tilde{\Phi}_2 \circ \varphi_k$ , где  $A$  – тождественное отображение при  $n = 2$ . Таким образом, найдется точка  $w_k \in B$ , для которой  $w_k \in A \circ \tilde{\Phi}_2 \circ \varphi_k(w_k)$ .

Дальше мы некоторое время снова можем рассуждать единообразно для случаев  $n = 1$  и  $n > 1$ . Перейдя к подпоследовательности,

можем считать, что  $w_k \rightarrow w \in B$ . Пусть  $x_1^{(k)}, \dots, x_s^{(k)}$  – вершины того симплекса  $k$ -го разбиения для  $B$ , который содержит  $w_k$ , тогда  $w_k = \sum_{j=1}^s \lambda_j^{(k)} x_j^{(k)}$ ,  $\lambda_j^{(k)} \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^s \lambda_j^{(k)} = 1$ . Отметим, что  $s \leq \dim B + 1$ , поэтому, повторив какие-то вершины с нулевыми коэффициентами, можно считать, что число  $s$  одинаково во всех таких представлениях.

Ясно, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = w$ , и мы можем считать, что пределы  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_j^{(k)}$  тоже существуют и равны  $\lambda_j$ . Тогда  $\lambda_j \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^s \lambda_j = 1$ . Пусть  $y_j^{(k)} = \varphi_k(x_j^{(k)})$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Можно считать (на этот раз перейдя к поднаправлениям, а не к обычным подпоследовательностям), что и векторы  $y_j^{(k)}$  сходятся к некоторым векторам  $y_j$ . Поскольку  $y_j^{(k)} \in \tilde{\Phi}_1(rx_j^{(k)})$ , из замкнутости графика отображения  $\tilde{\Phi}_1$  вытекает, что  $y_j \in \tilde{\Phi}_1(rw)$ , откуда получается, что

$$\varphi_k(w_k) \rightarrow \sum_{j=1}^s \lambda_j y_j \in \tilde{\Phi}_1(rw). \quad (+)$$

База индукции ( $n = 1$ ). Тогда  $w_k = \varphi_k(w_k)$ , поэтому из соотношения (+) получается, что  $w \in \tilde{\Phi}_1(rw)$ . Это и есть то, что нам надо.

Индукционный переход ( $n > 1$ ). Мы видели, что тогда  $w_k \in A \circ \tilde{\Phi}_2 \circ \varphi_k(w_k)$ . Из соотношения (+) и замкнутости графика отображения  $A \circ \tilde{\Phi}_2$  тогда получается, что

$$w \in A \circ \tilde{\Phi}_2 \circ \tilde{\Phi}_1(rw).$$

Это – снова то, что нам нужно.  $\square$

**Замечание.** Если интересоваться только случаем  $n = 1$ , рассуждение незначительно, но все же сокращается. Уже отмечалось, что если применить эту конструкцию к одному однозначному отображению, получается знаменитый принцип Шаудера, и похоже, что это – самое быстрое его доказательство. Стоит заметить, что привлечение многозначности по существу: даже если отображение  $\Phi_1$  однозначно и нет других, вспомогательные отображения  $G_V$  все равно многозначны.

#### §4. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ПРИМЕРЫ

В этом разделе мы в качестве иллюстрации опишем две конструкции в задаче об идеалах, которая обсуждалась в п. 2.2.

**4.1.  $L^p$ -оценки решений.** В теореме 4 (см. п. 2.2) мы уже видели, что в общей задаче о короне все равно, в какой метрике оценивать соответствующее решение –  $L^\infty$  или  $L^p$  с  $p < +\infty$ . Подобное (правда, не столь удовлетворительное) утверждение можно доказать и в случае задачи об идеалах. Причины, по которым трудно здесь надеяться на полный аналог теоремы 4, уже объяснялись.

Пусть  $E_1$  и  $E_2$  – конечномерные банаховы пространства, и пусть  $F \in H^\infty(\mathcal{L}(E_1, E_2))$  – ограниченная в круге  $\mathbb{D}$  аналитическая функция. Пусть еще  $h$  – скалярная функция из  $H^\infty(E_2)$ . Рассмотрим следующие требования (параметр  $p \in [1, \infty]$  в каждом из них фиксирован):

( $S_p$ ) найдется такая константа  $C$ , что для любой скалярной функции  $f \in H^p$  найдется такая функция  $g \in H^p(E_1)$ , что  $f(z)h(z) = F(z)g(z)$ ,  $z \in \mathbb{D}$  и  $\|g\|_{H^p(E_1)} \leq C\|f\|_{H^p}$ .

В соответствии со сказанным ранее, мы пытаемся описать не все пространство  $F \cdot H^p(E_1)$ , а только “главный модуль”, порожденный функцией  $h$ . Разумеется, при  $p < \infty$  не следует понимать слово “модуль” буквально.

**Теорема 5.** *Условия  $S_p$  при разных  $p$  эквивалентны. Константа  $C$  не меняется при изменении  $p$ .*

Понятно, что если нам удалось разрешить уравнение

$$F(z)g(z) = h(z) \quad \text{с} \quad \|g\|_{H^\infty(E_1)} \leq C, \quad (++)$$

то все условия  $S_p$  выполнены с той же константой  $C$ . Трудности возникают при движении от  $p < +\infty$  к  $p = +\infty$ . Условие  $S_p$  с  $p < \infty$  дает, конечно, разрешимость уравнения  $F(z)g(z) = h(z)$ , однако лишь с  $g \in H^p(E_1)$  вместо  $g \in H^\infty(E_1)$ .

Идея того, что необходимо проделать, довольно проста. Обозначим через  $B$  единичный шар пространства  $H^p(E_1)$  и построим многозначное отображение этого шара в себя следующим образом. Взяв  $f \in B$ , построим “масштабированную” внешнюю функцию по функции  $f_*$ :  $\zeta \mapsto \|f(\zeta)\|_{E_1}$ ,  $\zeta \in \mathbb{T}$  (вопросов о граничных значениях не возникает, поскольку пространство  $E_1$  конечномерно):

$$g_f = \frac{1}{C} \exp(\log f_* + i \widetilde{\log f_*})$$

(волна обозначает комплексное сопряжение). В качестве  $\Phi(f)$  возьмем множество всех решений  $v$  уравнения  $F(z)v(z) = g_f(z)h(z)$ , принадлежащих шару  $B$ . Все значения отображения  $\Phi$  – непустые выпуклые множества. Если удастся гарантировать существование ненулевой

неподвижной точки  $f \in \Phi(f)$ , то окажется, что  $F(z) \left[ \frac{f(z)}{g_f(z)} \right] = h(z)$  и останется заметить, что  $f(g_f)^{-1} \in H^\infty(E_1)$  и  $\|f(g_f)^{-1}\|_{L^\infty(E_1)} \leq C$ .

Однако реализация этого плана более замысловата. Нам нужно обеспечить замкнутость графика отображения  $\Phi$ , а для этого хочется сначала ввести в шаре  $B$  топологию, в которой он будет компактным. Напрашивается слабая топология пространства  $H^p(E_1)$  при  $1 < p < +\infty$  или  $w^*$  топология пространства  $H^1(E_1)$ . Но тогда нам захочется, чтобы внешние функции  $g_f$  выдерживали слабую сходимость функций  $f$ , что довольно проблематично.

Обойти препятствие можно примерно как в [16]. Зафиксируем число  $\delta > 0$  и пусть  $0 < r < 1$ . Единичный шар  $B$  пространства  $H^p(E_1)$  наделим слабой (или  $*$ -слабой) топологией  $\tau$ , о которой говорилось выше. Хорошо известно и легко проверяется, что эта топология эквивалентна топологии равномерной сходимости на компактах внутри круга.

Пусть  $f \in B$ ; положим  $f^{(r)}(\zeta) = f(r\zeta)$ ,  $|\zeta| = 1$ . Построим внешнюю функцию по функции  $\zeta \mapsto \|f^{(r)}(\zeta)\|_{E_1} + \delta \stackrel{\text{def}}{=} u^{(r)}(\zeta)$ ,  $\zeta \in \mathbb{T}$ :

$$g_f^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{C(1+\delta)} \exp(\log u^{(r)} + i \widetilde{\log u^{(r)}}).$$

Заметим, что если последовательность функций  $f_n$  сходится к  $f$  в топологии  $\tau$ , то  $f_n^{(r)} \rightarrow f^{(r)}$  равномерно. Соответствующие функции  $u_n^{(r)}$  тоже сходятся (к  $u^{(r)}$ ) равномерно и отделены от нуля. Поэтому функции  $\log u_n^{(r)}$  сходятся к  $\log u^{(r)}$  в  $L^2$ , а тогда имеет место и сходимость в  $L^2$  для их гармонических сопряженных. Отсюда следует, что  $g_{f_n}^{(r)}$  сходятся к  $g_{f^{(r)}}$  равномерно на компактах внутри круга.

Далее, определим отображение  $\Phi : B \rightarrow 2^B$  формулой

$$\Phi(f) = \{v \in B : Fv = g_{f^{(r)}}h\}.$$

Множество  $\Phi(f)$  непусто по условию  $S_p$  и выпукло. Замкнутость графика отображения  $\Phi$  получается предельным переходом внутри круга, в соответствии со сказанным выше.

Значит, у отображения  $\Phi$  есть неподвижная точка, то есть функция  $f_r \in B$ , для которой  $Ff_r = g_{f_r^{(r)}}h$ .

Теперь “разморозим”  $r$ , взяв последовательность  $r_n \rightarrow 1$ ,  $r_n < 1$ . Можно без потери общности считать, что  $f_{r_n} \rightarrow \varphi \in B$  в топологии  $\tau$ . В соответствии с описанной выше конструкцией, образуем функции  $u^{(r_n)}(\zeta) = \|f_{r_n}^{(r_n)}(\zeta)\|_{L^\infty(E_1)} + \delta$  и  $a_n = \log u^{(r_n)}$ . Функции  $a_n$  равномерно ограничены в  $L^2(\mathbb{T})$ , поэтому можно считать, что  $a_n \rightarrow a$  слабо в

$L^2(\mathbb{T})$ , а тогда и  $\tilde{a}_n \rightarrow \tilde{a}$  слабо в  $L^2(\mathbb{T})$ . Поэтому аналитические функции  $a_k + i\tilde{a}_n$  (как обычно, имеются в виду интегралы Пуассона от этих граничных значений) сходятся к  $a + i\tilde{a}$  равномерно на компактах внутри круга  $\mathbb{D}$ .

Тем самым, внешние функции  $g_{f_{r_n}^{(r_n)}}$  сходятся равномерно на компактах внутри круга к внешней функции

$$\Delta = \frac{1}{C(1+\delta)} \exp(a + i\tilde{a}),$$

при этом, разумеется,  $F\varphi = \Delta h$ . Мы покажем, что  $\|\varphi\delta^{-1}\|_{H^\infty(E_1)} \leq C(1+\delta)$ . Это практически завершит доказательство: избавиться от множителя  $1+\delta$  можно, еще раз взяв предельные точки при  $\delta \rightarrow 0$ .

Разумеется, искомая оценка получится из неравенства

$$\|f_{r_n}^{(r_n)}(\cdot)\|_{E_1} \leq C(1+\delta)|g_{f_{r_n}^{(r_n)}}(\cdot)|$$

(оно справедливо во всем круге, поскольку справа стоит внешняя функция, построенная по левой части). Надо только проверить, что  $f_{r_n}^{(r_n)} \rightarrow \varphi$  (хотя бы вдоль подпоследовательности) равномерно на компактах в круге. Пока мы знаем, что  $f_{r_n} \rightarrow \varphi$ , а это не то же самое.

Однако снова без потери общности мы можем обеспечить сходимость функций  $f_{r_n}^{(r_n)}$  к какой-то (может быть, отличной от  $\varphi$ ) функции  $\psi$  в топологии  $\tau$ . Чтобы показать, что  $\psi = \varphi$ , для  $|\zeta| \leq 1$  напишем

$$\psi^{(r)}(\zeta) = \psi(r\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{r_n}(r_n r \zeta).$$

Последний предел равен  $\varphi^{(r)}(\zeta)$  в силу равномерной сходимости. Действительно, при всяком  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N$ , что

$$\|f_{r_n}(z) - \varphi(z)\|_{E_1} < \varepsilon \quad \text{при } n > N \quad \text{и } |z| \leq r.$$

Тогда и  $\|f_{r_n}(r_n z) - \varphi(r_n z)\| < \varepsilon$  при  $|z| \leq r$ . Поскольку  $\varphi(r_n z) \rightarrow \varphi(z)$  равномерно на компактах в круге, все сделано.

**4.2. О теореме И. К. Злотникова [14].** Формулировка была приведена в начале п. 2.2. Здесь мы не повторяем все сопутствующие и подготовительные рассуждения из статьи [14], а обсудим только утверждение, в доказательстве которого используется теорема о неподвижной точке.

Пусть  $E_0$  и  $E_1$  — банаховы пространства Кётэ на множестве  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Для простоты (и без потери общности) считаем, что  $E_1$



и  $E_2$  вложены в  $l_{(k)}^\infty$  с константой 1. Предположим, что пространство  $E_0E_1$  тоже банахово.

**Теорема 6.** Пусть задача об идеалах разрешима для пространства  $E_0$  с постоянной  $C$  и показателем  $\alpha$ . Тогда при всяком  $\varepsilon > 0$  задача об идеалах разрешима для пространства  $E_0E_1$  с тем же показателем  $\alpha$  и с постоянной  $(1 + \varepsilon)2^\alpha C$ .

В [14] это утверждение было получено с помощью классической теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани (случай  $n = 1$  в теореме 1), однако там были предприняты специальные усилия, чтобы избежать теоремы 1 с большим  $n$ . Для этого по дороге использовалась теорема Майкла о непрерывном выборе. Мотивом для такого образа действий был кажущийся скачок сложности между случаями  $n = 1$  и  $n > 1$  в теореме 1. Поскольку, как мы видели, этого скачка на самом деле нет, теорема Майкла превращается в “сущность, привлеченную без надобности”: без нее проще.

Рассуждение, которое мы сейчас приведем, восходит к первоначальному неопубликованному варианту статьи Рущкого [15] про задачу о короне. Отметим еще, что рассуждение из [14] с теоремой Майкла восходит к опубликованному варианту статьи [15].

**Доказательство теоремы 6.** Обозначим произведение  $E_0E_1$  через  $E$ .

**Лемма 1.**  $E'_0 = E'E_1$ .

Не останавливаемся на доказательстве. Объяснения имеются в [14] и [15], но известно это соотношение было гораздо раньше.

Пусть  $k \in H^\infty$ ,  $f \in H^\infty(E)$  и  $|(k(z))| \leq \|f(z)\|_E^\alpha \leq 1$ ,  $z \in \mathbb{D}$ . Надо найти такую функцию  $g \in H^\infty(E')$ , что

$$k(z) \equiv \langle f(z), g(z) \rangle \quad \text{и} \quad \|g(\cdot)\|_{E'} \leq (1 + \varepsilon)2^\alpha C.$$

Из определения нормы в произведении  $E_0E_1$  следует, что мы можем найти такие функции  $u \in L^\infty(E_0)$  и  $v \in L^\infty(E_1)$ ,  $u, v \geq 0$ , что

$$\|u\|_{L^\infty(E_0)}, \|v\|_{L^\infty(E_1)} \leq 1, \quad f = uv, \quad \|u\|_{L^\infty(E_0)}\|v\|_{L^\infty(E_1)} = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

Далее, можно считать, что все компоненты  $f_1, \dots, f_k$  вектор-функции  $f$  ненулевые (просто уменьшим носитель  $\{1, \dots, k\}$  наших пространств Кётэ в противном случае).

Тогда функции  $\log |f_j|$  суммируемы. Поскольку  $-\log |f_j| = -\log u_j - \log v_j \geq -\log v_j \geq 0$  (через  $u_j$  и  $v_j$  обозначены компоненты функций  $u$  и  $v$ ), получаем, что  $\log v_j \in L^1$ .

Введем множество

$$B = \{(\log w_1, \dots, \log w_k) : w = (w_1, \dots, w_k) \in L^\infty(E_1), \\ w_j \geq v_j \text{ при всех } j \text{ и } \|w\|_{L^\infty(E_1)} \leq 2\}.$$

Из неравенства Юнга

$$w_j^{(1)}(\zeta)^{1-\alpha} w_j^{(2)}(\zeta)^\alpha \leq (1-\alpha)w_j^{(1)}(\zeta) + \alpha w_j^{(2)}(\zeta)$$

(т.е. просто из выпуклости экспоненты) вытекает выпуклость множества  $B$ . Наделим множество  $B$  слабой топологией пространства  $L^1(E_1)$ , тогда  $B$  компактно.

1°. Пусть  $U$  – замкнутый шар радиуса  $2^\alpha C$  пространства  $H^\infty(E'_0)$ , наделенный  $w^*$ -топологией. Сейчас мы построим отображение  $\Phi_1$  из  $B$  в  $2^U$ . Определение дается в несколько шагов. Для функции  $\rho \in B$  построим внешнюю функцию  $\psi = e^{\rho + i\bar{\rho}}$  (имеется в виду покомпонентное равенство:  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ ,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ ;  $\psi_j = e^{\rho_j + i\bar{\rho}_j}$ ). По ней построим функции  $\varphi = f/\psi$  (опять имеем в виду равенства  $\varphi_j = f_j/\psi_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ ).

Тогда функция  $\varphi$  представляет собой данные задачи об идеалах, разрешимость которой гарантирована условиями теоремы. Действительно,  $|\Psi| \geq v$  по определению множества  $B$ , откуда  $|\varphi| \leq \frac{|f|}{v} \leq u$ , так что  $\|\varphi\|_{L^\infty(E_0)} \leq 1$ . С другой стороны,

$$\|k(z)\| \leq \|f(z)\|_E^\alpha \leq \|\varphi\|_{L^\infty(E_0)}^\alpha \|\psi\|_{L^\infty(E_1)}^\alpha \leq \|\varphi\|_{L^\infty(E_0)}^\alpha \cdot 2^\alpha.$$

Таким образом, по условию теоремы найдется такая функция  $h \in H^\infty(E'_0)$ , что

$$k(z) \equiv \langle \varphi(z), h(z) \rangle \quad \text{и} \quad \|h(z)\|_{E'_0} \leq 2^\alpha C.$$

Множество  $\Phi_1(\rho)$  – это, по определению, совокупность всех таких функций  $h$ . Ясно, что это множество выпукло и замкнуто. Замкнутость графика отображения  $\Phi_1$  мы проверим позже.

2°. Обозначим шар радиуса  $2^\alpha$  в пространстве  $H^\infty(E'_0)$  через  $V$  (так что  $\Phi_1$  действует из  $B$  в  $2^V$ ). Сейчас мы определим еще одно отображение  $\Phi_2 : V \rightarrow 2^B$ . Именно, если  $\sigma \in V$ , то

$$\Phi_2(\sigma) = \left\{ \log w \in B : \left\| \frac{\sigma}{w} \right\|_{L^\infty(E')} \leq (1 + \varepsilon) 2^\alpha C \right\}.$$

То, что функции  $w \geq 0$ , удовлетворяющие неравенствам  $\|w\|_{L^\infty(E_1)} \leq 1$  и  $\|\frac{\sigma}{w}\|_{L^\infty(E')} \leq (1 + \varepsilon)2^\alpha C$ , существуют, следует из леммы 1. Добиться неравенства  $w \geq v$  можно, например, заменив функцию  $w$ , упомянутую выше, на  $w + v$ : тогда  $\|w + v\|_{L^\infty(E_1)} \leq 2$ , и мы находимся в  $B$ . Каждое множество  $\Phi_2(\sigma)$  выпукло, поскольку множество  $B$  выпукло, а условие  $\|\sigma/w\|_{L^\infty(E')} \leq A$  тоже выпукло относительно  $\log w$  (см. соответствующее место в доказательстве выпуклости множества  $B$ ). Замкнутость графика отображения  $\Phi_2$  снова докажем позже.

Если все объявленное доказано, то по теореме 1 у отображения  $\Phi_2 \circ \Phi_1 : B \rightarrow 2^B$  есть неподвижная точка  $\log w$ . Построим внешнюю функцию  $W = \exp(\log w + i \log w)$ , тогда найдется такое решение  $h \in V$  уравнения  $k(z) = \langle \frac{f(z)}{W(z)}, h(z) \rangle$ , что

$$\left\| \frac{h}{W} \right\|_{H^\infty(E')} = \left\| \frac{h}{w} \right\|_{L^\infty(E')} \leq (1 + \varepsilon)2^\alpha C.$$

Тем самым,  $h/W$  – решение нужной нам задачи об идеалах.

Осталось проверить недоказанные утверждения.

**Лемма 2.** *График отображения  $\Phi_1 : B \rightarrow 2^V$  замкнут.*

**Доказательство.** Естественным образом,  $\Phi_1 = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ , где отображения  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , мы сейчас опишем. Из них только  $\alpha_3$  многозначно, а  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  однозначны и непрерывны. У  $\alpha_3$  будет замкнутый график, а про  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  это очевидно, так что тем самым мы докажем лемму 2.

При этом не все области определения указанных отображений будут выпуклы, так что по отдельности  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  не следует включать в парадигму теоремы 1.

Итак, для  $\rho \in B$  пусть  $\alpha_1(\rho) = e^{\rho + i\bar{\rho}}$ . Пусть  $D = \alpha_1(B)$ . Отображение  $\alpha_2$  определено на  $D$  формулой  $\alpha_2(\psi) = f/\psi$ . Наконец, отображение  $\alpha_3$  определено на образе отображения  $\alpha_2$  так:  $\alpha_3(\varphi)$  – это множество всех функций  $h$  из  $L^\infty(E'_0)$  таких, что

$$k(z) = \langle \varphi(z), h(z) \rangle \quad \text{и} \quad \|h(z)\|_{E'_0} \leq 2^\alpha C$$

при всех  $z$ .

(i) Отображение  $\alpha_1$  непрерывно действует из  $B$  в пространство  $L^\infty(E_1)$ , наделенное  $w^*$ -топологией.

Действительно, распространяя функции из  $L^\infty(E_1)$  до гармонических функций в круге с помощью интеграла Пуассона, мы видим, что

на любом ограниченном множестве в  $L^\infty(E_1)$  эта слабая топология эквивалентна топологии поточечной сходимости в открытом круге.

Далее, если  $\rho_n \in B$  и  $\rho_n \rightarrow \rho$  слабо в  $L^1$ , то аналитические функции  $\rho_n + i\tilde{\rho}_n$  (а с ними и внешние функции  $\alpha_1(\rho_n)$ ) сходятся поточечно в круге  $\mathbb{D}$  к  $\rho + i\tilde{\rho}$ . Действительно, для  $z \in \mathbb{D}$  значение  $\tilde{\rho}_n(z)$  есть интеграл от  $\rho_n$  с сопряженным ядром Пуассона в точке  $z$ , а это ядро при фиксированном  $z$  – ограниченная функция.

Итак, отображение  $\alpha_1$  непрерывно, а его образ  $D$  компактен.

(ii) Непрерывность отображения  $\alpha_2$  из  $D$  в единичный шар пространства  $L^\infty(E_0)$  с  $w^*$ -топологией мгновенно получается после перехода к поточечной сходимости в круге. Таким образом, и множество  $G = \alpha_2(D)$  компактно.

(iii) Замкнутость графика отображения  $\alpha_3$  тоже немедленно следует из того, что если  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  и  $h_n \rightarrow h$  поточечно в единичном круге, а  $\langle \varphi_n(z), h_n(z) \rangle = k(z)$ , то и  $\langle \varphi(z), h(z) \rangle = k(z)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ .  $\square$

**Лемма 3.** *Отображение  $\Phi_2$  имеет замкнутый график.*

**Доказательство.** Пусть  $\sigma_n \in V$ ,  $\log w_n \in \Phi_2(\sigma_n)$ . Предположим, что  $\sigma_n \rightarrow \sigma$  в пространстве  $V$ , а  $\log w_n \rightarrow \log w$  слабо в  $L^1(E')$ . Нужно доказать, что  $\log w \in \Phi_2(\sigma)$ , т.е. перейти к пределу в неравенстве

$$\|\sigma_n/w_n\|_{L^\infty(E')} \leq (1 + \varepsilon)2^\alpha C.$$

Построим внешние функции  $W_n = e^{\log w_n + i\widetilde{\log w_n}}$ . Мы находимся в компакте  $B$ , так что из части (i) доказательства леммы 2 следует, что  $W_n \rightarrow W \stackrel{\text{def}}{=} e^{\log w + i\widetilde{\log w}}$  поточечно в  $\mathbb{D}$ . Функции  $\tau_n$  тоже сходятся к  $\sigma$  поточечно в  $\mathbb{D}$ . Остается заметить, что выписанное выше неравенство эквивалентно неравенству

$$\left\| \frac{\sigma_n(z)}{W_n(z)} \right\|_{E'} \leq (1 + \varepsilon)2^\alpha C, \quad z \in \mathbb{D},$$

в котором можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*. —Duke Math. J. **8** (1941), 457–459.
2. Ку Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA **38** (1952), 121–126.
3. I. Glicksberg, *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium*. — Proc. Amer. Math. Soc. **3(1)** (1952), 170–174.

4. M. J. Powers, *Lefschetz fixed point theorems and a new class of multi-valued maps.* — Pac. J. Math. **42(I)** (1972), 211–220.
5. S. Park, *A unified fixed point theory of multimaps on topological vector spaces.* — J. Korean Math. Soc. **35**, No. 4 (1998), 803–829.
6. S. Park, *A unified fixed point theory in generalized convex spaces.* — Acta Mathematica Sinica **23**, No. 8 (2007), 1509–1526.
7. Д. В. Руцкий, *Вещественная интерполяция пространств типа Харди: анонс и некоторые замечания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **480** (2019), 70–190.
8. D. V. Rutsky, *Real interpolation of Hardy-type spaces and BMO-regularity.* — J. Fourier analysis and applications **26**, No. 4 (2020), article No. 61.
9. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и анализ **14**, No. 2 (2002), 117–135.
10. S. V. Kislyakov, *On BMO-regular couples of lattices of measurable functions.* — Stud. Math. **159**, No. 2 (2003), 277–289.
11. Д. В. Руцкий, *Замечания о BMO-регулярности и АК-устойчивости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 116–166.
12. Д. В. Руцкий, *BMO-регулярность в решетках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алгебра и анализ **23**, No. 2 (2011), 248–295.
13. Д. В. Руцкий, *Векторнозначная ограниченность операторов гармонического анализа.* — Алгебра и анализ **28**, No. 6 (2016), 91–117.
14. И. К. Злотников, *Задача об идеалах алгебры  $H^\infty$  в случае некоторых пространств последовательностей.* — Алгебра и анализ **29**, No. 5 (2017), 51–67.
15. D. V. Rutsky, *Corona problem with data in ideal spaces of sequences.* — Archiv der Mathematik **108** (2017), 609–619.
16. С. В. Кисляков, Д. В. Руцкий, *Несколько замечаний к теореме о короне.* — Алгебра и анализ **24**, No. 2 (2012), 171–191.

Kislyakov S. V., Skvortsov A. A. Fixed point theorems and Hardy classes.

A survey of several recent applications of fixed point theorems for multi-valued maps to interpolation of Hardy classes and to certain topics related to the corona theorem.

С.-Петербургское отделение Математического  
института им. В. А. Стеклова РАН  
Фонганка 27, 191023, С.-Петербург,  
Россия

*E-mail:* skis@pdmi.ras.ru

*E-mail:* st076169@student.spbu.ru

Поступило 22 августа 2022 г.