Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

В. В. Капустин

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА, ПРОСТРАНСТВА ДЕ БРАНЖА И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Преобразование Меллина определяется для функций на положительной полуоси по формуле

$$(\mathcal{M}f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{s-1}\, dt.$$

Классический факт состоит в том, что оно изометрично отображает $L^2(0,+\infty)$ на $L^2(\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\})$. Обозначим через Ω преобразование Меллина, рассматриваемое как оператор из пространства Харди H^2, здесь и далее задаваемого в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, в весовое пространство L^2_W на прямой $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$, где вес относительно меры Лебега на этой прямой имеет вид

$$W(s) = \exp(\pi \operatorname{Im} s) + \exp(-\pi \operatorname{Im} s),$$

а норма функции u в L^2_W задаётся формулой $\|u\|^2 = \int |u(s)|^2 W(s)\, \frac{ds}{i}$, где интеграл берётся по прямой $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$ в направлении снизу вверх. Для взятия преобразования Меллина функций из H^2, аналитических в правой полуплоскости, берутся их следы на положительной полуоси. Известно, что Ω действует изометрично и имеет образом всё пространство L^2_W, см. ниже.

Замена переменной $s = \frac{1-ix}{2}$ переносит функции, заданные на прямой $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$, на вещественную прямую. При этом пространство L^2_W изометрично отображается на весовое пространство L^2_w с весом

$$w(x) = \frac{1}{2}\bigl(e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}\bigr)$$

Ключевые слова: пространства де Бранжа, модифицированные функции Бесселя, преобразование Меллина.

на вещественной прямой. Определим оператор V как изометрию из H^2 на L^2_w, представляющую собой суперпозицию преобразования Меллина и пересадки на вещественную прямую:

$$(Vf)(x) = \Omega\left(\frac{1-ix}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, t^{-\frac{1+ix}{2}}\, dt.$$

Основным результатом этой заметки является описание образов подпространств вида $\exp\big(-a\big(z+\frac{1}{z}\big)\big)\cdot H^2$ при этом отображении. Определение пространств де Бранжа будет дано ниже. Обозначение K_s используется для модифицированной функции Бесселя, определенной стандартным образом.

Теорема. *Оператор V изометрически отображает подпространства вида $\exp\big(-a\big(z+\frac{1}{z}\big)\big)\cdot H^2(\{\operatorname{Re} z>0\})$, где $a>0$, на пространства де Бранжа со структурными функциями $\mathcal{E}(z) = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\, K_s(2a)$ при $s = s(z) = \frac{1-iz}{2}$.*

В частности, здесь содержится утверждение о том, что упоминаемые пространства де Бранжа изометрически вложены в пространство L^2_w.

Интерес к подпространствам указанного вида связан с тем, что при $a=\pi$ пространство де Бранжа со структурной функцией $K_s(2\pi)$ содержит функции вида $\frac{\xi(\frac{1}{2}-iz)}{p(z)}$, где ξ – кси-функция, представляющая собой симметризацию дзета-функции Римана ζ:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\, s(s-1)\, \pi^{-s/2}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\, \zeta(s),$$

а p – многочлен степени 3 или выше, нули которого являются нулями функции из числителя; см. [1].

Результат из теоремы тесно связан с работой [2], где рассматриваются подпространства пространства H^2, состоящие из функций, инвариантных относительно замены $z \leftrightarrow \frac{1}{z}$. Рассмотрение вместо них подпространств из функций, инвариантных относительно изометрической инволюции $f \mapsto \frac{1}{z} f\big(\frac{1}{z}\big)$ на H^2 (см. доказательство теоремы) позволяет получить прямое доказательство изометричности оператора из теоремы статьи [2] с помощью изометричности оператора V и результатов статей [1, 2].

§1. Оператор Ω

Как известно, обратное преобразование Меллина действует по формуле

$$u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int z^{-s} u(s)\, \frac{ds}{i}.$$

Применяя его, т.е. оператор Ω^{-1}, к функции из пространства L^2_W, получим аналитическую функцию в области $\{\operatorname{Re} z > 0\} = \{|\arg z| < \frac{\pi}{2}\}$, поскольку для $s = \frac{1}{2} + it$ имеем оценку

$$|z^{-s}| = \exp\big(-\operatorname{Re}(s \log z)\big) = \exp\left(-\frac{1}{2}\log|z| - t\arg z\right) = \frac{1}{\sqrt{|z|}} \cdot e^{-t\arg z},$$

обеспечивающую сходимость интеграла.

По-видимому утверждение о том, что оператор Ω изометрично отображает H^2 на пространство L^2_W, известно, однако автору настоящей заметки не удалось найти ссылку на оригинальный источник. Ниже это утверждение будет доказано.

Доказательство. Для $f(z) = \frac{1}{z+\lambda}$, где $\operatorname{Re}\lambda > 0$, имеем $f \in H^2$ и

$$\begin{aligned}(\Omega f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}\,dt}{t+\lambda} &= \frac{\lambda^{s-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{y^{s-1}\,dy}{y+1} \\ &= \frac{\lambda^{s-1}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\lambda^{s-1}}{W(s)},\end{aligned}$$

поскольку при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ имеем

$$\sin(\pi s) = \frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{2i} = \frac{ie^{-\pi \operatorname{Im} s} + ie^{\pi \operatorname{Im} s}}{2i} = \frac{1}{2}\, W(s).$$

Замкнутая линейная оболочка функций $\frac{1}{z+\lambda}$, где $\operatorname{Re}\lambda > 0$, плотна в H^2: значение функции из H^2 в точке $\bar{\lambda}$ вычисляется через скалярное произведение с функцией $\frac{1}{z+\lambda}$, так что функция из H^2, ортогональная всем таким функциям, получается тождественно равной нулю. С другой стороны, замкнутая линейная оболочка функций вида $\frac{\lambda^{s-1}}{W(s)}$ плотна в L^2_W. Действительно, это утверждение равносильно тому, что замкнутая линейная оболочка функций λ^{s-1} плотна в $L^2_{1/W}$, а это доказывается стандартными средствами, связанными с обычным преобразованием Меллина, если брать такие функции только при $\lambda > 0$.

Таким образом, для оператора Ω плотному множеству из H^2 соответствует плотное множество в L^2_W, и тем самым достаточно установить изометричность оператора Ω^{-1} для этих плотных множеств.

Для функций u из плотного можества в L^2_W их обратные преобразования Меллина принадлежат H^2, что позволяет работать с граничными значениями последних на мнимой оси. Возьмём $z = ix$ при $x > 0$. Тогда $z^{-s} = x^{-s} \cdot \exp(-\frac{i\pi s}{2})$, и получаем обычное обратное преобразование Меллина функции $\exp(-\frac{i\pi s}{2}) \cdot u(s)$. Пользуясь его изометричностью, имеем

$$\int\limits_0^\infty |(\Omega^{-1}u)(ix)|^2\,dx = \int \left|\exp\left(-\frac{i\pi s}{2}\right) \cdot u(s)\right|^2 \frac{ds}{i} = \int |u(s)|^2\, e^{\pi \operatorname{Im} s}\, \frac{ds}{i},$$

где интегрирование по прямой $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$ производится снизу вверх. Аналогично, для $z = -ix$ при $x > 0$ получаем $z^{-s} = x^{-s} \cdot \exp(\frac{i\pi s}{2})$ и

$$\int\limits_0^\infty |(\Omega^{-1}u)(-ix)|^2\,dx = \int \left|\exp\left(\frac{i\pi s}{2}\right) \cdot u(s)\right|^2 \frac{ds}{i} = \int |u(s)|^2\, e^{-\pi \operatorname{Im} s}\, \frac{ds}{i}.$$

Сумма двух полученных соотношений отражает факт, что Ω^{-1} является изометрией. $\square$

§2. Доказательство теоремы

Пусть $\mathcal{E}$ – целая функция в комплексной плоскости из класса Эрмита–Билера, т.е. $|\mathcal{E}(\bar{z})| < |\mathcal{E}(z)|$ для всех z из верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Тогда $\mathcal{E}$ является структурной функцией пространства де Бранжа $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, определяемого как пространство целых функций F в комплексной плоскости, для которых функции $\frac{F(z)}{\mathcal{E}(z)}$ и $\frac{\overline{F(\bar{z})}}{\mathcal{E}(z)}$ принадлежат классу Харди H^2 в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$; нормы этих функций в пространстве Харди равны и они определяют норму функции F в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Зафиксируем $a > 0$ и положим $\mathcal{E}(z) = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\, K_s(2a)$, где $s = \frac{1-iz}{2}$. Функция $\mathcal{E}$ принадлежит классу Эрмита–Билера, доказательство можно найти, например, в статье [1], см. также [2]; рассмотрим соответствующее ей пространство де Бранжа $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся тем, что операторы

$$
\begin{aligned}
&u \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{2a}^{\infty}\Big(K_s(t)+K_{s-1}(t)\Big)\,u(t)\,dt,\\
&u \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{2a}^{\infty}\Big(K_s(t)-K_{s-1}(t)\Big)\,u(t)\,dt,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $s = s(z) = \frac{1-iz}{2}$, изометрично отображают пространство $L^2(2a,\infty)$ на чётное и нечётное подпространства пространства де Бранжа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ соответственно. Этот факт доказан в статье [1], где он получается в результате рассмотрения канонической системы, соответствующей изучаемому пространству де Бранжа; см. также [2]. Чётное и нечётное подпространства взаимно ортогональны и их прямая сумма даёт всё пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Далее, вычисления в статье [2] показывают, что получающиеся при отображениях (1) функции являются преобразованиями Меллина функций

$$
\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot v\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right),\quad \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot v\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)
$$

соответственно, где v – образ функции u при преобразовании Лапласа:

$$
v(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2a}^{+\infty} u(t)\,e^{-tz}\,dt.
$$

Тем самым изометрические отображения (1) представляют собой суперпозиции преобразования Лапласа, одного из преобразований

$$
v \mapsto \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot v\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right),\quad v \mapsto \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)\cdot v\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right),
\tag{2}
$$

и преобразования Меллина. Преобразование Лапласа изометрично отображает пространство $L^2(2a,\infty)$ на $e^{-2az}\cdot H^2(\{\operatorname{Re} z>0\})$; преобразование Меллина изометрично отображает $H^2(\{\operatorname{Re} z>0\})$ на пространство L^2_W, изометрически эквивалентное пространству L^2_w. Поэтому остаётся доказать следующее утверждение: отображения (2), действующие в $H^2(\{\operatorname{Re} z>0\})$, являются изометрическими операторами, а образы подпространства $e^{-2az} \cdot H^2$ при этих отображениях взаимно ортогональны и их прямая сумма совпадает с подпространством $\exp\big(-a\big(z+\frac{1}{z}\big)\big) \cdot H^2$ из формулировки теоремы.

Рассмотрим ортонормированный базис в H^2 из функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(z-1)^n}{(z+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(Заметим, что умножение на функцию $\frac{z-1}{z+1}$, модуль которой на мнимой оси равен 1, действует как сдвиг по этому базису). Для базисной функции $v(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(z-1)^n}{(z+1)^{n+1}}$ с номером n имеем

$$v\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1\right)^{n+1}} = \frac{2z}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(z-1)^{2n}}{(z+1)^{2n+2}}.$$

Следовательно, при отображениях (2) получаются элементы базиса с номерами $2n$ и $2n+1$ соответственно. Таким образом, при первом отображении из элементов базиса получаются элементы того же самого базиса с чётными номерами, порождающие подпространство функций из H^2, инвариантных относительно инволюции $f \mapsto \frac{1}{z} f\big(\frac{1}{z}\big)$. При втором отображении получаются элементы базиса с нечётными номерами, порождающие подпространство функций, обладающих свойством $\frac{1}{z} f\big(\frac{1}{z}\big) = -f(z)$.

Домножением на рассматриваемые экспоненциальные множители результат, полученный для всего пространства H^2, переносится на требуемые подпространства. □

Для прямого доказательства изометричности операторов из теоремы статьи [2] теперь можно воспользоваться тем, что оператор умножения $f \mapsto \sqrt{2} \cdot \frac{zf(z)}{1+z}$ в H^2 изометрично отображает подпространство функций, инвариантных относительно инволюции $f \mapsto \frac{1}{z} f\big(\frac{1}{z}\big)$, на подпространство функций, инвариантных относительно подстановки $z \leftrightarrow \frac{1}{z}$. Тем самым утверждение сводится к изометричности оператора Ω.

Список литературы

1. В. В. Капустин, *Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора.* — Алгебра и Анализ **33**, No. 4 (2021), 107–124.

2. В. В. Капустин, *Пять моделей в гильбертовых пространствах, связанных с дзета-функцией Римана.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **503** (2021), 84–96.

Kapustin V. V. The Mellin transform, de Branges spaces, and Bessel functions.

An explicit description is obtained for the subspaces of the Hardy space on the right half-plane whose images under the Mellin transform yield a chain of de Branges spaces related to the Riemann zeta function.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 8 июля 2022 г.