Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

П. Б. Затицкий, Д. М. Столяров

О ЛОКАЛЬНО ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЯХ НА ПРОСТЕЙШИХ НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

§1. Введение

Целью настоящей работы является обобщение теории статьи [23]. Главный результат той работы гласит, что некоторые функции Беллмана двух переменных совпадают с минимальными локально вогнутыми функциями. В работе [23] область определения оных функций – теоретико-множественная разность двух неограниченных выпуклых множеств, меньшее из которых лежит строго внутри большего. Доказательство основывалось на введении особого класса $\mathbb{R}^2$-значных мартингалов, а также на понятии монотонной перестановки. Мы обобщим результат работы [23] в двух направлениях: позволим функциям зависеть от более чем двух переменных, а также избавимся от условия неограниченности областей (стало быть, уже в размерности 2 области могут не быть односвязными). В то время как особые мартингалы по-прежнему применимы в такой общности, аппарат монотонных перестановок, по-видимому, недоступен. Мы заменим его понятием гомогенизации функции, введённом в работе [22].

Статья носит, скорее, технический характер: в той или иной степени мы будем лишь комбинировать идеи и методы двух цитированных выше работ. Основные результаты – теоремы 4.4 и 5.3. Параграфы 2, 3, 4 и 5 посвящены определениям, примерам, описанию предшествующего развития предмета, а также формулировкам результатов. Параграфы 6, 7 и 8 содержат доказательства. Два менее важных, но интересных результата помещены в параграф 9.

Мы выражаем благодарность В. И. Васюнину за внимание к нашей работе.

§2. Функциональные классы

Пусть Ω_0 – непустое собственное выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, здесь d – некоторое натуральное число. Обычно $d \geqslant 2$.

Ключевые слова: функция Беллмана, мартингал.
Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19-71-10023.

Пусть Ω_1 – такое открытое выпуклое множество, что $\operatorname{cl}\Omega_1 \subset \Omega_0$. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением

$$\Omega = \operatorname{cl}\Omega_0 \setminus \Omega_1. \tag{2.1}$$

Для удобства предположим, что множество Ω_1 не пусто (случай пустого множества Ω_1 сводится к классической выпуклой геометрии). Пусть $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ – интервал. Рассмотрим класс принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^d$ суммируемых функций φ, определённый областями Ω_0 и Ω_1 по следующему правилу:

$$\boldsymbol{A} = \Big\{\varphi\colon \mathrm{I} \to \partial\Omega_0 \;\Big|\; \text{если J – подынтервал в I, то } \langle\varphi\rangle_{\mathrm{J}} \notin \Omega_1\Big\}. \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем мы будем использовать обозначение

$$\langle\varphi\rangle_{E} = \frac{1}{|E|}\int\limits_E \varphi(x)\,dx \tag{2.3}$$

для среднего суммируемой функции φ по измеримому множеству E конечной ненулевой меры Лебега. Иногда мы будем называть точки $\langle\varphi\rangle_{\mathrm{J}}$, где J – подынтервал в I, беллмановскими точками функции φ. Покажем, как выбор конкретных областей Ω_0 и Ω_1 позволяет описать полезные и интересные классы функций.

Классы Макенхаупта. Пусть $d = 2$ и $\delta > 1$. Положим (см. рис. 1)

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, \quad xy > 1\};\\ \Omega_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, \quad xy > \delta\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Рассмотрим функциональный класс $\boldsymbol{A}$, порождённый этими областями, а также функцию $\varphi \in \boldsymbol{A}$. Обозначим символом w первую координату функции φ, то есть, $\varphi(t) = (w(t), w^{-1}(t))$ и $w\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+$ – скалярная почти всюду положительная функция. Условие $\langle\varphi\rangle_{\mathrm{J}} \notin \Omega_1$, появляющееся в определении (2.2), можно переписать в терминах функции w:

$$\langle w\rangle_{\mathrm{J}}\langle w^{-1}\rangle_{\mathrm{J}} \leqslant \delta. \tag{2.5}$$

Согласно определению и требованию $\varphi \in \boldsymbol{A}$, это условие выполнено для всякого интервала $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. Следовательно, $[w]_{A_2} \leqslant \delta$ (см. определение и основные свойства классов Макенхаупта A_p в пятой главе книги [20]). Если быть более точными, мы доказали следующую простую лемму.

Лемма 2.1. *Условия $[w]_{A_2} \leqslant \delta$ и $\varphi \in \boldsymbol{A}$ равносильны, если области Ω_0 и Ω_1 определены формулой (2.4) и $\varphi = (w, w^{-1})$.*

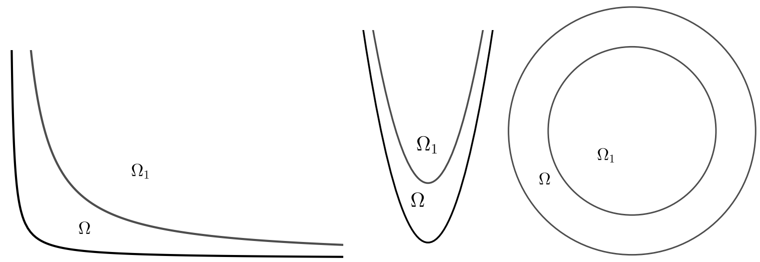

Рис. 1. Области, соответствующие классу A_2, (2.4); скалярному классу BMO_ε, (2.7); и классу $\mathrm{BMO}_\varepsilon(\mathrm{I}, S^1)$, (2.12).

Тем же методом можно доказать подобное утверждение и для классов A_p, когда $1 < p < \infty$, а также для класса A_∞, если он снабжён "нормой" Хрущёва. Единственное различие – нужно заменить выражение xy в формуле (2.4) более сложным, а именно, xy^{p-1} (а в случае $p = \infty$ – выражением xe^{-y}, см. подробности в работе [26]). Более развёрнутое описание можно найти в разделе 2 работы [11] или разделе 1.3 работы [23].

Пространства BMO **векторнозначных функций.** Пусть d – произвольное большее единицы натуральное число, и пусть $\varepsilon > 0$. Запись $|z|$ обозначает евклидову норму вектора $z \in \mathbb{R}^{d-1}$:

$$|z| = \Big(\sum_{j=1}^{d-1} z_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим случай

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \mid y > |x|^2\}; \\ \Omega_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \mid y > |x|^2 + \varepsilon^2\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Пусть $\psi(t)$ – вектор в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$, состоящий из первых $(d-1)$ координат вектора $\varphi(t)$, здесь $\varphi \in \boldsymbol{A}$. Иными словами, $\varphi = (\psi, |\psi|^2)$. В таком случае условие (2.2) превращается в неравенство

$$\langle |\psi|^2 \rangle_{\mathrm{J}} \leqslant |\langle \psi \rangle_{\mathrm{J}}|^2 + \varepsilon^2, \tag{2.8}$$

которое, в свою очередь, можно переписать в виде

$$\langle |\psi - \langle \psi \rangle_{\mathrm{J}}|^2 \rangle_{\mathrm{J}} \leqslant \varepsilon^2. \tag{2.9}$$

Согласно требованию $\varphi \in \boldsymbol{A}$, приведённое выше неравенство выполнено для всякого интервала $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, следовательно,

$$\|\psi\|_{\mathrm{BMO(I)}} \leqslant \varepsilon, \tag{2.10}$$

если мы определяем норму векторнозначной функции в пространстве BMO(I) как

$$\|\psi\|_{\mathrm{BMO(I)}} = \Big(\sup_{\mathrm{J}\subset\mathrm{I}} \frac{1}{|\,\mathrm{J}\,|} \int\limits_{\mathrm{J}} \Big|\psi(t) - \frac{1}{|\,\mathrm{J}\,|}\int\limits_{\mathrm{J}} \psi(s)\,ds\Big|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.11}$$

где супремум берётся по всем подынтервалам интервала I. Читатель может найти определение и базовые свойства скалярных функций класса BMO в шестой главе книги [20]; количественные свойства векторных функции класса BMO почти не отличаются от свойств скалярных функций. Таким образом, мы получили ещё одну простую лемму.

Лемма 2.2. *Неравенство* $\|\psi\|_{\mathrm{BMO(I)}} \leqslant \varepsilon$ *равносильно включению* $\varphi \in \boldsymbol{A}$, *если задающие класс области определены формулой* (2.7) *и* $\varphi = (\psi, |\psi|^2)$.

Отметим, что в формуле (2.11) мы работаем с квадратичной нормой на пространстве BMO. Определение BMO через норму в L_1 более общеупотребительно. Из неравенства Джона–Ниренберга следует, что эти две нормы эквивалентны. Выбор конкретной нормы важен, так как мы работаем с точными константами.

Функции ограниченной средней осцилляции со значениями в единичной сфере. Пусть $d \geqslant 2$, $\varepsilon \in (0,1)$. Рассмотрим случай

$$\begin{aligned} &\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\};\\ &\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x|^2 < 1 - \varepsilon^2\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

В этой формуле, а также в дальнейшем, мы используем евклидовы нормы на пространстве $\mathbb{R}^d$. Мы видим, что функции $\varphi \in \boldsymbol{A}$ принимают значения в единичной сфере S^{d-1}. Следующая лемма получается в результате вычислений, аналогичных проведённым выше в случае обычного пространства BMO.

Лемма 2.3. *Пусть* $\varphi\colon \mathrm{I} \to S^{d-1}$ *– измеримая функция. Неравенство* $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon$ *равносильно включению* $\varphi \in \boldsymbol{A}$, *где области заданы формулой* (2.12).

Следуя работе [6], мы будем называть класс сферически-значных функций, BMO норма которых не превосходит ε, шаром радиуса ε пространства $\mathrm{BMO}(\mathrm{I}, S^{d-1})$ и обозначать его символом $\mathrm{BMO}_\varepsilon(\mathrm{I}, S^{d-1})$. Отметим, что класс $\mathrm{BMO}(\mathrm{I}, S^{d-1})$ лишён линейной структуры.

Области, связанные с мультипликативными неравенствами. Положим $d = 3$. Выберем также некоторые числа $p \in (1, \infty)$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим области

$$\begin{aligned} &\Omega_0 = \operatorname{int}\operatorname{conv}\{(t, t^2, |t|^p) \mid t \in \mathbb{R}\};\\ &\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > x^2 + \varepsilon^2, z > 0\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Символ conv обозначает выпуклую оболочку. Отметим, что определённые таким образом области не удовлетворяют условию $\operatorname{cl}\Omega_1 \subset \Omega_0$. Тем не менее, они естественными образом появляются при изучении мультипликативных неравенств с BMO-нормой, см. работы [21] и [25]. На самом деле, рассматриваемый класс функций $\boldsymbol{A}$ тоже соответствует ε-шару пространства BMO. Введение дополнительной третьей координаты позволяет контролировать норму в пространстве L_p. Этот пример, в основном, показывает ограниченность области применения нынешних методов.

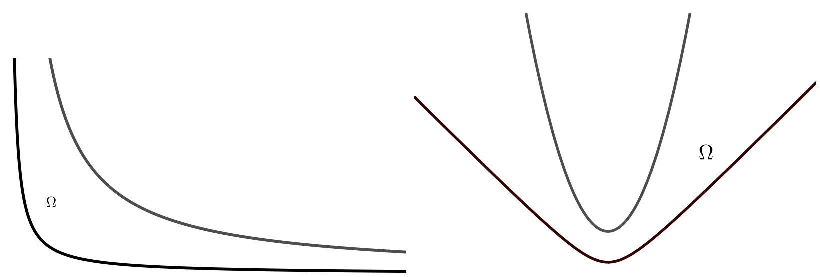

Рис. 2. Первая область удовлетворяет условию конуса, а вторая – нет.

Наложим на области Ω_0 и Ω_1 дополнительные условия. Они появляются в теории естественным образом, например, читатель может встретить их и в работе [23].

Условие строгой выпуклости: области Ω_0 и Ω_1 строго выпуклы. (2.14)

Условие конуса: любой лежащий внутри Ω_0 луч можно сдвинуть, чтобы он лежал целиком в Ω_1. (2.15)

Напомним, что выпуклое множество называется строго выпуклым, если его граница не содержит прямолинейных отрезков. Можно доказать, что множество строго выпукло тогда и только тогда, когда всякая точка его границы – экспонированная, то есть, единственная точка множества, лежащая на какой-то из его опорных плоскостей. Второе условие, в некотором смысле, говорит что области Ω_0 и Ω_1 ведут себя подобным образом на бесконечности. Это условие также допускает переформулировку: максимальные вписанные конусы областей Ω_0 и Ω_1 конгруэнтны. Второе условие становится бессмысленным в случае, если область Ω_0 ограничена. Области на рис. 1 удовлетворяют условиям (2.14) и (2.15), потому что соответствующие области Ω, определённые формулой (2.1), не содержат бесконечных лучей. Область между двумя гиперболами (см. рис. 2),

$$\Omega=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x,y>0,\ xy>1,\ \text{и } y<\frac{1}{x-1}+1,\ \text{когда } x>1\Big\} \tag{2.16}$$

содержит бесконечные лучи, например, параллельные осям координат. Она по-прежнему удовлетворяет условию (2.15). Вторая же область на рис. 2,

$$\Omega=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; \sqrt{x^2+1}\leqslant y\leqslant x^2+2\Big\}, \tag{2.17}$$

не удовлетворяет условию конуса.

Будем неформально называть *линзами* области рассматриваемого типа (то есть, теоретико множественные разности двух строго выпуклых множеств, меньшее лежит строго внутри большего, удовлетворяющих условию конуса (2.15)). Обозначим символом $[A,B]$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки A и B.

Лемма 2.4. *Пусть области Ω_0 и Ω_1 удовлетворяют условию* (2.14). *В случае $d=2$ также предположим, что выполнено условие* (2.15). *Для каждой точки $x\in\Omega$ найдётся проходящий через неё отрезок $\ell_x\subset\Omega$ с концами в множестве $\partial\Omega_0$.*

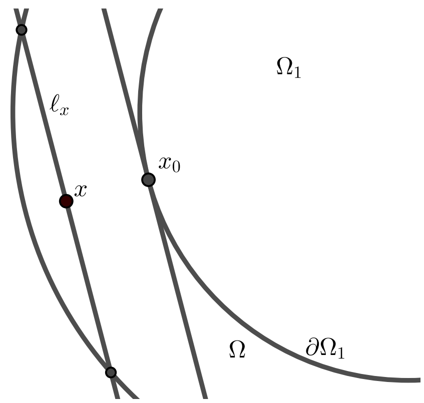

Рис. 3. Иллюстрация доказательства леммы 2.4.

Доказательство. Сперва рассмотрим случай $d = 2$. Пусть x_0 – ближайшая к x точка множества $\mathrm{cl}\,\Omega_1$. Ясно, что $x_0 \notin \Omega_1$. Обозначим символом l проходящую через точку x_0 прямую, перпендикулярную отрезку $[x, x_0]$ (в случае $x = x_0 \in \partial\Omega_1$ выберем какую-нибудь опорную к множеству $\mathrm{cl}\,\Omega_1$ прямую, проходящую через точку x_0). Отметим, что прямая l не пересекает множество Ω_1 и отделяет точку x от него. Согласно условию (2.14), пересечение любого сдвига прямой l с областью Ω_1 ограничено. Стало быть, по условию (2.15), пересечение проходящего через точку x сдвига прямой l с множеством Ω_0 – конечный отрезок, назовём его ℓ_x. Остаётся отметить, что $\ell_x \cap \Omega_1 = \varnothing$.

Обратимся теперь к случаю $d \geqslant 3$. Будем вести рассуждение индукцией по размерности пространства. Достаточно доказать, что для всякой точки $x \in \Omega$ найдётся такая проходящая через x аффинная гиперплоскость L, что пересечение $L \cap \Omega_0$ ограничено. Если такое утверждение доказано, то мы можем работать лишь внутри $(d-1)$-мерной плоскости L (напомним, что условие (2.15) автоматически выполнено для ограниченных областей). Желаемую плоскость L тоже несложно найти: выберем любую опорную гиперплоскость к множеству Ω_0 и сдвинем её в точку x (пересечение такой сдвинутой гиперплоскости и множества Ω_0 будет ограниченным благодаря условию (2.14)). $\square$

Замечание 2.5. В предположениях леммы 2.4, если $x \notin \mathrm{cl}\,\Omega_1$, то можно выбрать отрезок ℓ_x таким образом, что $\ell_x \cap \mathrm{cl}\,\Omega_1 = \varnothing$.

Следствие 2.6. *В предположениях леммы* 2.4, *для всякой точки* $x \in \Omega$ *существует такая функция* $\varphi \in \boldsymbol{A}$, *что* $\langle \varphi \rangle_{\mathrm{I}} = x$.

Доказательство. Построим отрезок ℓ_x при помощи леммы 2.4: существуют такие точки $a, b \in \partial\Omega_0$ и неотрицательные числа α и β с суммой один, что

$$x = \alpha a + \beta b \quad \text{и} \quad [a,b] \cap \Omega_1 = \varnothing. \tag{2.18}$$

В таком случае желаемую функцию φ можно построить по формуле

$$\varphi(t) = \begin{cases} a, & t \in [0,\alpha]; \\ b, & t \in (\alpha, 1], \end{cases} \tag{2.19}$$

мы положили $\mathrm{I} = [0,1]$ для удобства (все наши рассмотрения не зависят от конкретного выбора отрезка I). Согласно построению, для всякого отрезка $\mathrm{J} \subset [0,1]$, точка $\langle \varphi \rangle_{\mathrm{J}}$ лежит внутри отрезка ℓ_x. Следовательно, $\varphi \in \boldsymbol{A}$. □

§3. Функционалы

Пусть функция $f\colon \partial\Omega_0 \to \mathbb{R}$ борелевски измерима и локально ограничена. Нас интересует нахождение точных оценок выражения $\langle f(\varphi) \rangle_{\mathrm{I}}$ при условии $\varphi \in \boldsymbol{A}$. Отметим, что существование указанного интеграла априори неясно. Функция Беллмана

$$\boldsymbol{B}_{\Omega,f}(x) = \sup\Big\{ \langle f(\varphi) \rangle_{\mathrm{I}} \;\Big|\; \varphi \in \boldsymbol{A},\ \langle \varphi \rangle_{\mathrm{I}} = x \Big\}, \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

корректно определена в случае, когда функция f ограничена снизу (тем не менее, функция Беллмана может принимать значение $+\infty$). А функция Беллмана

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}_{\Omega,f}(x) = \sup\Big\{ \langle f(\varphi) \rangle_{\mathrm{I}} \;\Big|\; \varphi \in \boldsymbol{A},\ \langle \varphi \rangle_{\mathrm{I}} = x, \quad \varphi \in L_\infty \Big\}, \quad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

корректно определена для всякой локально ограниченной функции f. Отметим, что все функции Беллмана настоящей работы не зависят от выбора конкретного отрезка I. Мы будем часто опускать символы Ω и f в обозначениях для наших функций Беллмана и писать просто $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}$. Также будем использовать запись $\Omega^* = \operatorname{cl}\Omega_0 \setminus \operatorname{cl}\Omega_1$. Естественно ожидать, что функции $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}$ совпадают при разумных предположениях. Однако доказательство такого утверждения оказывается неожиданно трудным.

Замечание 3.1. Предположим, что выполнено условие (2.14). В случае $d = 2$ также предположим справедливость условия (2.15). В таком случае следствие 2.6 гласит, что

$$-\infty < \boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}(x) \leqslant \boldsymbol{B}(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.3}$$

Перейдём теперь к рассмотрению примеров и покажем, как введённые выше функции Беллмана помогают в деле нахождения точных констант в различных неравенствах. Мы не будем приводить подробности в двух первых примерах, потому что они в деталях разобраны в цитированных статьях.

Классы Макенхаупта. Пусть $p > 1$. Рассмотрим области (2.4) и функцию $f(x_1, x_1^{-1}) = x_1^p$. Вычисление соответствующей функции Беллмана $\boldsymbol{B}$ приводит к вычислению точных констант в различных формах обратного неравенства Гёльдера для весов Макенхаупта. См. подробности в работах [1] и [2]. Для получения оценок слабого типа нужно положить $f(x_1, x_1^{-1}) = \chi_{[1,\infty)}(x_1)$, см. [16].

Пространство BMO **скалярно-значных функций.** Рассмотрим области, заданные формулой (2.7) при $d = 2$. Выбор граничной функции $f(x_1, x_1^2) = e^{x_1}$ ведёт к вычислению точных констант в неравенстве Джона–Ниренберга в интегральной форме, см. статью [18]. Функция $f(x_1, x_1^2) = |x_1|^p$ использовалась для получения точных результатов об эквивалентности различных норм на пространстве BMO, см. работу [19]. Для работы с неравенствами слабого типа удобно использовать функцию $f(x_1, x_1^2) = \chi_{[0,\infty)}(x_1)$, см. статью [24]. В случае произвольных граничных данных f, функция Беллмана (3.1) была вычислена в работе [13] (см. более простую версию в статье [12], а также краткое сообщение [10]).

В случае, если число d больше двух, вычисление соответствующих функций Беллмана позволит получить точные неравенства для векторнозначных функций.

Функции ограниченной средней осцилляции со значениями в сфере. Вариант неравенства Джона–Ниренберга для функций пространства BMO, принимающих значения в сфере, приведён в приложении B работы [6]. В той работе неравенство сформулировано в интегральной форме, мы предпочтём работать с классической “оценкой хвостов", так же как в основополагающей работе [14]. Для этого рассмотрим класс $\boldsymbol{A}$, порождённый областями Ω_0 и Ω_1, заданными формулами (2.12). Выберем точку $x_0 \in S^{d-1}$ и число $\delta \in (0,1)$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \chi_{[\delta,2]}(|x-x_0|), \quad x \in S^{d-1}, \tag{3.4}$$

а также функцию Беллмана (3.1), порождённую такими граничными данными. Эта функция Беллмана позволяет получать точные оценки меры множества таких точек $t \in \mathrm{I}$, что $|\varphi(t) - x_0| \geqslant \delta$, при условии что функция φ принадлежит ε-шару класса $\mathrm{BMO}(\mathrm{I}, S^{d-1})$ и $\langle \varphi \rangle_{\mathrm{I}} = x$. Если мы выберем $x = x_0|x|$, то получим точные оценки величины

$$\frac{1}{|\mathrm{I}|}\Big|\Big\{t \in \mathrm{I} \,\Big|\, |\varphi(t) - \langle\varphi\rangle_{\mathrm{I}}| \geqslant \widetilde{\delta}\Big\}\Big|; \quad \widetilde{\delta}^2 = (1-|x|)^2 + |x|\delta^2. \tag{3.5}$$

Неравенство Джона–Ниренберга гласит, что эта величина экспоненциально убывает при стремлении параметра ε к нулю. Функция Беллмана позволяет найти точные константы в соответствующем неравенстве, см. готовящуюся работу [7].

Мультипликативные неравенства. Рассмотрим области, заданные формулами (2.13), а также соответствующий класс $\boldsymbol{A}$. Положим $f(t,t^2,|t|^p) = |t|^r$, где $r \in (p,\infty)$. Соответствующая функция Беллмана сообщает точные оценки нормы в пространстве L_r функции φ, если её среднее, норма в L_p и норма в пространстве BMO зафиксированы. В частности, она позволяет найти точные константы $c_{p,r}$ в мультипликативных неравенствах

$$\|\varphi\|_{L_r} \leqslant c_{p,r}\|\varphi\|_{L_p}^{p/r}\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}^{1-p/r}, \tag{3.6}$$

см. работы [21] и [25].

§4. Локально вогнутые функции и мартингалы

Определение 4.1. *Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$. Функцию $G\colon \omega \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ будем называть локально вогнутой, если её сужение $G|_\ell$ на любой отрезок $\ell \subset \omega$ вогнуто.*

Здесь и в дальнейшем мы будем придерживаться соглашения, что вогнутые функции могут принимать бесконечные значения, см. подробности в книге [17]. Мы, тем не менее, запрещаем им принимать значение $-\infty$ (см. патологический пример в конце раздела). Локально вогнутые функции играют важную роль в теории функции Беллмана; приложения к геометрии можно найти в работе [8]. В определении ниже символом $\partial_{\mathrm{fixed}}\omega$ обозначено множество всех таких точек $x \in \mathrm{cl}\,\omega$, что не существует такого отрезка $\ell \subset \mathrm{cl}\,\omega$, что точка x лежит в его внутренности; определённое таким образом множество называется жёсткой границей (потому что именно на этом множестве задаются граничные значения минимальных локально вогнутых функций, на нём значения функции «жёстко закреплены»). Оставшаяся часть границы называется свободной границей и обозначается символом $\partial_{\mathrm{free}}\omega$. В наших обычных примерах линз $\Omega = \mathrm{cl}\,\Omega_0 \setminus \Omega_1$ имеем $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega = \partial\Omega_0$ и $\partial_{\mathrm{free}}\Omega = \partial\Omega_1$. Будем и в дальнейшем придерживаться таких обозначений.

Определение 4.2. *Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$ и пусть $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\omega \to \mathbb{R}$ – функция. Символом $\Lambda_{\omega,f}$ обозначим класс всех локально вогнутых на множестве ω функций G, удовлетворяющих граничному неравенству*

$G(x) \geqslant f(x)$ во всех точках $x \in \partial_{\mathrm{fixed}}\omega$.

Замечание 4.3. Согласно теореме 10.1 книги [17], всякая функция $G \in \Lambda_{\omega,f}$ непрерывна на внутренности области ω как отображение в множество $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Определим поточечно минимальную локально вогнутую функцию

$$\mathfrak{B}_{\omega,f}(x) = \inf\{G(x) \mid G \in \Lambda_{\omega,f}\}, \quad x \in \omega, \tag{4.1}$$

(отметим, что $\mathfrak{B}_{\omega,f}(x) \in \Lambda_{\omega,f}$, если эта функция не принимает значения $-\infty$) и сформулируем первый основной результат. Запись $\partial_{\mathrm{free}}\Omega \in C^2$ означает, что локально множество $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ может быть представлено графиком C^2-гладкой функции. Также напомним обозначение $\Omega^* = \mathrm{cl}\,\Omega_0 \setminus \mathrm{cl}\,\Omega_1$.

Теорема 4.4. *Пусть области Ω_0 и Ω_1 удовлетворяют обычным требованиям $\mathrm{cl}\,\Omega_1 \subset \Omega_0$, (2.14), (2.15), а также условию $\partial_{\mathrm{free}}\Omega \in C^2$. Пусть функция f полунепрерывна снизу и ограничена снизу. Тогда справедливо равенство*

$$\boldsymbol{B}_{\Omega,f}(x) = \mathfrak{B}_{\Omega,f}(x), \quad x \in \Omega^*. \tag{4.2}$$

Эта теорема обобщает, с точностью до некоторых небольших подробностей, главный результат работы [23]; в той статье разбирался случай $d = 2$ и неограниченной области Ω_1 (и, следовательно, неограниченной области Ω_0). Рассуждения работы [23] основывались на понятии монотонной (не убывающей) перестановки, которое, по-видимому, неприменимо в случае, когда область Ω не односвязна. Подходящая замена монотонных перестановок была предложена в работе [22]. Недостаток этого нового метода в том, что он не позволяет работать с точками $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Основная теорема работы [23] устанавливает справедливость равенства (4.2) для всех $x \in \Omega$. Скорее всего, в большей общности теорема 4.4 тоже верна при всех $x \in \Omega$, однако, методы работы [22] не позволяют доказать её (см. объяснение в разделе 9).

Опишем понятия работы [23], которыми мы будем пользоваться. Мы будем работать с мартингалами с дискретным временем, согласованными с фильтрацией $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_n$. Читатель может познакомиться с общей теорией мартингалов в книге [3], мы же приведём упрощенную версию.

Под фильтрацией мы понимаем возрастающую последовательность алгебр множеств (мы будем работать лишь с конечными алгебрами), то есть, если справедливо включение $A \in \mathcal{F}_n$, то также справедливо и $A \in \mathcal{F}_{n+1}$. Последовательность $\{M_n\}_n$ случайных величин, принимающих значения в некотором линейном пространстве, называется согласованным с фильтрацией $\mathcal{F}$ мартингалом, если, во-первых, каждая случайная величина M_n измерима относительно алгебры $\mathcal{F}_n$, и во-вторых, для каждого индекса n справедливо равенство $M_n = \mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$. Отметим, что так как наши алгебры простые, мы можем свободно работать с бесконечномерными пространствами (при работе с мартингалами общего вида возникают определённые трудности с определением условного математического ожидания, см. раздел 1.3 книги [9]). Все мартингалы, с которыми мы будем работать, имеют предельное значение $M_\infty \in L_1$, то есть, случайную величину, порождающую мартингал согласно формуле

$$M_n = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.3}$$

Этой формулой нужно пользоваться с определённой осторожностью, случайная величина M_∞ должна принимать значения в конечномерным пространстве, так как мы не хотим использовать теорию интегрирования функций, принимающих значения в бесконечномерном пространстве.

Основное свойство величины M_∞ можно переформулировать: для всякого атома $a \in \mathcal{F}_n$ (под атомом алгебры множеств $\mathcal{F}$ мы понимаем множество $a \in \mathcal{F}$ положительной меры, минимальное по включению) можно восстановить значение величины M_n на этом атоме при помощи формулы

$$M_n(a) = \frac{1}{P(a)} \int\limits_a M_\infty. \tag{4.4}$$

Процитируем важное определение из работы [23]. См. также рис. 4.

Определение 4.5. *Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$. Мартингал $M = \{M_n\}_n$, принимающий значения в пространстве $\mathbb{R}^d$ и согласованный с фильтрацией $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}$, называется ω-мартингалом, если выполнены следующие свойства:*

1) *алгебра $\mathcal{F}_0$ тривиальна, т. е., состоит всего лишь из всего вероятностного пространства и пустого множества*;
2) *существует такая принимающая значения в множестве $\partial_{\mathrm{fixed}}\omega$ случайная величина M_∞, что последовательность $\{M_n\}_n$ сходится к ней в пространстве L_1 и почти всюду* (*в частности, функция M_∞ сама является суммируемой*);
3) *для всякого атома $a \in \mathcal{F}_n$ существует такое выпуклое множество $C_a \subset \omega$, что случайная величина $M_{n+1}|_a$ почти наверное принимает значения в множестве C_a.*

Иногда нам также потребуется пользоваться слегка более общим понятием $(\omega, \mathfrak{D})$-мартингала, введённым в работе [22].

Определение 4.6. *Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$, $\mathfrak{D} \subset \partial_{\mathrm{fixed}}\omega$, а M – ω-мартингал. Назовём его $(\omega, \mathfrak{D})$-мартингалом, если $M_\infty \in \mathfrak{D}$ почти наверное.*

Замечание 4.7. Также можно рассматривать ω и $(\omega, \mathfrak{D})$-мартингалы для бесконечномерных областей ω. Однако в этом случае мы требуем, чтобы величина M_∞ принимала значения в пересечении множества $\partial_{\mathrm{fixed}}\omega$ с некоторым конечномерным пространством. Например, можно потребовать, чтобы функция M_∞ принимала лишь конечное множество значений.

Рассмотрим ещё две функции Беллмана на области ω: первая определена для измеримых и ограниченных снизу функций $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\omega \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{B}(x) = \sup\Big\{\mathbb{E}\, f(M_\infty) \;\Big|\; M_0 = x,\ M \text{ – } \omega\text{-мартингал}\Big\}, \quad x \in \omega, \tag{4.5}$$

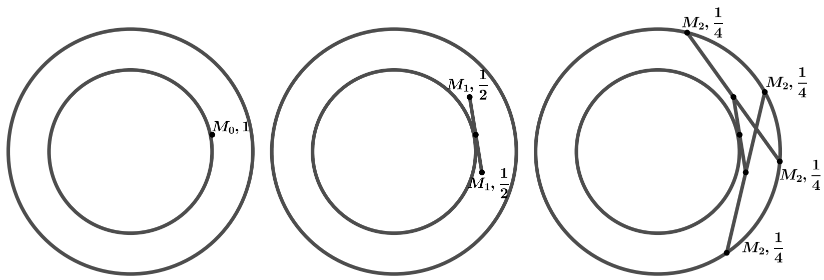

Рис. 4. Пример ω-мартингала для области ω, заданной формулой (2.12); числа около точек обозначают вероятности данных значений.

а вторая – для всех локально ограниченных снизу измеримых функций f:

$$\mathcal{B}^{\mathrm{b}}(x) = \sup\Big\{\mathbb{E}\, f(M_\infty)\ \Big|\ M_0 = x,\ M - \omega\text{-мартингал},\ M_\infty \in L_\infty\Big\},\ x \in \omega. \tag{4.6}$$

Напомним, что мартингал M называется простым, если существует такое натуральное число N, что $M_k = M_N$ для всех $k \geqslant N$. Мы будем пользоваться теоремой 2.21 из работы [23]. В ней используется понятие *сильно мартингально связной области.* Множество $\omega \subset \mathbb{R}^d$ называется сильно мартингально связным, если для всякой точки $x \in \omega$ существует простой ω-мартингал M, стартующий в точке x, то есть такой, что $M_0 = x$.

Лемма 4.8. *Предположим, что выполнено условие* (2.14)*. Области* Ω *и* Ω^* *сильно мартингально связны если либо* $d \geqslant 3$*, либо выполнено условие* (2.15).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай области Ω. Выберем точку $x \in \Omega$ и построим простой Ω-мартингал, стартующий из точки x. Если $x \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$, то желаемый мартингал тождественно равен x. Поэтому предположим, что $x \notin \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$. Согласно лемме 2.4, существует проходящий через точку x отрезок $\ell_x \subset \Omega$ с концами в точках A и B, лежащими на границе $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$. Иными словами,

$$x = \alpha A + \beta B, \quad \alpha + \beta = 1 \quad \text{и} \quad \alpha, \beta \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Построим мартингал M согласно формуле

$$M_0 = x, \quad M_1 = \begin{cases} A, & \text{с вероятностью } \alpha; \\ B, & \text{с вероятностью } \beta, \end{cases} \quad M_n = M_1, \quad n \geqslant 1. \tag{4.8}$$

Иными словами, мартингал M стартует из точки x, разбивается в точки A и B и останавливается в них. Так как $\ell_x \subset \Omega$, M – желаемый Ω-мартингал.

Случай области Ω^* рассматривается абсолютно аналогично, нужно лишь заменить лемму 2.4 замечанием 2.5. □

Теорема 4.9 (Теорема 2.21 в работе [23])**.** *Пусть область $\omega \subset \mathbb{R}^d$ сильно мартингально связна, а функция $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\omega \to \mathbb{R}$ ограничена снизу и такова, что функция $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ непрерывна в каждой точке жёсткой границы. В таком случае $\mathfrak{B}(x) = \mathcal{B}(x)$ для всех точек $x \in \omega$.*

Замечание 2.22 той же статьи гласит, что если функция f лишь локально ограничена снизу, а функция $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ непрерывна в точках жёсткой границы, то $\mathfrak{B} = \mathcal{B}^{\mathrm{b}}$. Нам понадобится чуть более сильное утверждение. Введём в рассмотрение ещё одну функцию Беллмана:

$$\mathcal{B}^{\mathrm{s}}(x) = \sup\Big\{\mathbb{E}\, f(M_\infty) \;\Big|\; M_0 = x,\ M \text{ – простой } \omega\text{-мартингал}\Big\},\ x \in \omega. \tag{4.9}$$

Очевидно, что $\mathcal{B}^{\mathrm{s}} \leqslant \mathcal{B}^{\mathrm{b}} \leqslant \mathcal{B}$. Неравенства этой цепочки часто обращаются в равенства.

Лемма 4.10. *Пусть область $\omega \subset \mathbb{R}^d$ сильно мартингально связна. Пусть $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\omega \to \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция. Тогда, $\mathfrak{B}_{\omega,f}(x) = \mathcal{B}^{\mathrm{s}}_{\omega,f}(x)$ для всякой точки $x \in \omega$.*

Доказательство. Рассуждение, по сути, является упрощением доказательства теоремы 2.22 работы [23]; мы дадим комментарий об этих упрощениях. Достаточно доказать неравенства $\mathfrak{B}(x) \leqslant \mathcal{B}^{\mathrm{s}}(x)$ и $\mathcal{B}^{\mathrm{s}}(x) \leqslant \mathfrak{B}(x)$ для всех точек $x \in \omega$.

Чтобы доказать первое неравенство, достаточно проверить включение $\mathcal{B}^{\mathrm{s}} \in \Lambda_{\omega,f}$ и воспользоваться определением функции $\mathfrak{B}$. Ясно, что функция $\mathcal{B}^{\mathrm{s}}$ удовлетворяет граничным условиям. Согласно требованию сильной мартингальной связности области ω, функция $\mathcal{B}^{\mathrm{s}}$ не может принимать значение $-\infty$. Локальную вогнутость можно проверить аналогично доказательству леммы 2.17 работы [23].

Чтобы доказать обратное неравенство $\mathcal{B}^{\mathrm{s}}(x) \leqslant \mathfrak{B}(x)$, достаточно для всякого простого ω-мартингала M, такого что $M_0 = x$, и всякой функции $G \in \Lambda_{\omega,f}$, проверить справедливость неравенства

$$G(M_0) \geqslant \mathbb{E}\, G(M_\infty) \geqslant \mathbb{E}\, f(M_\infty). \tag{4.10}$$

Это неравенство следует из леммы 2.10 работы [23], которая гласит, что величина $\mathbb{E}\, G(M_n)$ не возрастает в рассматриваемом случае; отметим, что предположение о простоте мартингала M отменяет необходимость предельного перехода (в сравнении с доказательством леммы 2.19 работы [23]). □

Простая модификация приведённого выше рассуждения позволяет доказать следующую версию теоремы 4.9.

Теорема 4.11. *Пусть область $\omega \subset \mathbb{R}^d$ сильно мартингально связна, а функция $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\omega \to \mathbb{R}$ ограничена снизу и такова, что функция $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ полунепрерывна снизу в каждой точке жёсткой границы. Тогда $\mathfrak{B}(x) = \mathcal{B}(x)$ для всякой точки $x \in \omega$.*

Нам также потребуется техническое утверждение в духе предложения 2.7 работы [23]. Доказательство очень похожее, и поэтому мы его пропустим.

Предложение 4.12. *Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$ и $x \in \partial_{\mathrm{fixed}}\omega$. Предположим, что существует такой замкнутый шар $B_r(x)$, что множество $B_r(x)\cap\omega$ замкнуто и строго выпукло. Предположим, что функция $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ не принимает значения $+\infty$. В таком случае функция $\mathfrak{B}$ полунепрерывна снизу в точке x, если в ней полунепрерывна снизу функция f.*

Удивительно, что утверждение леммы 4.10 становится неверным, если не предполагать, что область ω строго мартингально связна. Мы будем пользоваться комплексными числами для удобства обозначений. Пусть область ω задана формулой

$$\omega=\{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z|\leqslant 1\} \setminus \bigcup_{j=0,1,2} \Big\{z\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; \big|z - \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i j}{3}}\big| < \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{239}\Big\}. \tag{4.11}$$

Основное свойство конкретных чисел в примере (4.11) таково: три маленьких кружка почти касаются (см. рис. 5). Согласно определению, $\partial_{\mathrm{fixed}}\omega = \{|z| = 1\}$. Пусть $f \equiv 0$ на жёсткой границе. В таком

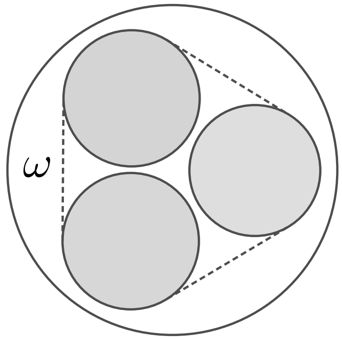

Рис. 5. Пример области, не являющейся сильно мартингально связной. Пунктирные линия обозначают границу выпуклой оболочки множества Ω_1.

случае

$$\mathcal{B}^{\mathrm{s}}_{\omega,f}(x)=\begin{cases}-\infty, & x\in\omega\cap\operatorname{conv}\Big(\bigcup\limits_{j=0,1,2}\Big\{z\in\mathbb{R}^2\;\Big|\;\big|z-\frac12 e^{\frac{2\pi ij}{3}}\big|<\frac{\sqrt3}{4}-\frac{1}{239}\Big\}\Big);\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

С другой стороны, лемма С.5 работы [23] гласит, что $\mathfrak{B}_{\omega,f}\geqslant 0$ (область ω – сырная в терминологии той работы). Следовательно, $\mathfrak{B}\equiv 0$ и эта функция не совпадает с $\mathcal{B}^{\mathrm{s}}$. Подобный эффект проявляется при определении ранг-один выпуклой оболочки или координатно-выпуклой оболочки, см. [15].

§5. Функции на окружности и прямой

Нам потребуется работать с определёнными на окружности $\mathbb{T}$ единичной длины (иными словами, радиус равен $1/(2\pi)$) функциями. Снабдим окружность $\mathbb{T}$ естественной мерой длины. Мы будем думать о функциях на окружности $\mathbb{T}$ как о периодических функциях на прямой, т.е. отождествлять функцию $\varphi\colon\mathbb{T}\to\mathbb{R}^d$ с её периодической реализацией $\varphi_{\mathrm{per}}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$, где

$$\varphi_{\mathrm{per}}(t)=\varphi\Big(\frac{1}{2\pi}e^{2\pi it}\Big),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Рассмотрим аналог класса (2.2), состоящий из суммируемых функций, отображающих окружность $\mathbb{T}$ в пространство $\mathbb{R}^d$:

$$\boldsymbol{A}^\circ = \left\{ \varphi\colon \mathbb{T} \to \partial\Omega_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{найдётся такое открытое множество } \widehat{\Omega}_1, \\ \text{что } \operatorname{cl}\Omega_1 \subset \widehat{\Omega}_1 \text{ и } \operatorname{cl}\widehat{\Omega}_1 \subset \Omega_0 \\ \text{и для всякого интервала } \mathrm{J} \subset \mathbb{R}\ \langle \varphi_{\mathrm{per}} \rangle_{\mathrm{J}} \notin \widehat{\Omega}_1 \end{array} \right\}. \qquad (5.2)$$

Отметим, что наше определение требует “ограниченности колебания” по дугам, которые могут оборачиваться вокруг окружности несколько раз. Область $\widehat{\Omega}_1$ скорее вспомогательная, однако её появление в приводимой ниже лемме 6.1, по-видимому, необходимо.

Замечание 5.1. Согласно приводимой ниже теореме 8.17, можем предполагать, что область $\widehat{\Omega}_1$ в формуле (5.2) строго выпукла. В таком случае область $\widehat{\Omega} = \operatorname{cl}\Omega_0 \setminus \widehat{\Omega}_1$ удовлетворяет условиям (2.14) и (2.15).

Напомним обозначение $\Omega^* = \operatorname{cl}\Omega_0 \setminus \operatorname{cl}\Omega_1$.

Лемма 5.2. *Предположим справедливость условия* (2.14). *В случае* $d = 2$ *также предположим справедливость условия* (2.15). *Для всякой точки* $x \in \Omega^*$ *существует такая функция* $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ$, *что* $\langle \varphi \rangle_{\mathbb{T}} = x$.

Доказательство. Построим отрезок ℓ_x при помощи замечания 2.5: существуют такие точки $a, b \in \partial\Omega_0$ и неотрицательные числа α и β с суммой единица, что $x = \alpha a + \beta b$ и $\ell_x = [a, b] \subset \Omega^*$. Рассмотрим произвольное открытое множество $\widehat{\Omega}_1$, удовлетворяющее условиям $\operatorname{cl}\Omega_1 \subset \widehat{\Omega}_1$ и $\operatorname{cl}\widehat{\Omega}_1 \subset \Omega_0 \setminus \ell_x$. Построим функцию φ согласно формуле (2.19) и продолжим её периодически на всю прямую. В таком случае точка $\langle \varphi_{\mathrm{per}} \rangle_{\mathrm{J}}$ лежит на отрезке ℓ_x для всякого интервала $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$, и, следовательно, не попадает в множество $\widehat{\Omega}_1$. $\square$

Рассмотрим функции Беллмана

$$\boldsymbol{B}^\circ_{\Omega,f}(x) = \sup\left\{ \langle f(\varphi) \rangle_{\mathbb{T}} \;\middle|\; \varphi \in \boldsymbol{A}^\circ,\ \langle \varphi \rangle_{\mathbb{T}} = x \right\}, \quad x \in \Omega^*, \qquad (5.3)$$

и

$$\boldsymbol{B}^{\circ,\mathrm{b}}_{\Omega,f}(x) = \sup\left\{ \langle f(\varphi) \rangle_{\mathbb{T}} \;\middle|\; \varphi \in \boldsymbol{A}^\circ,\ \langle \varphi \rangle_{\mathbb{T}} = x, \quad \varphi \in L_\infty \right\}, \ x \in \Omega^*. \qquad (5.4)$$

Аналогично функциям, заданными формулами (3.1) и (3.2), мы определяем функцию (5.3) в случае, когда функция f ограничена снизу, а функция $\boldsymbol{B}^{\circ,\mathrm{b}}$ может быть определена для всякой локально ограниченной снизу функции f. Так как для всякой функции $\varphi \in \boldsymbol{A}^{\circ}$ справедливо включение $\varphi_{\mathrm{per}}|_{[0,1]} \in \boldsymbol{A}$, имеют место неравенства

$$\boldsymbol{B}^{\circ}_{\Omega,f}(x) \leqslant \boldsymbol{B}_{\Omega,f}(x) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B}^{\circ,\mathrm{b}}_{\Omega,f}(x) \leqslant \boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}_{\Omega,f}(x), \quad x \in \Omega^*. \tag{5.5}$$

Приводимая ниже теорема – наш второй основной результат.

Теорема 5.3. *Пусть множества* Ω_0 *и* Ω_1 *удовлетворяют обычным требованиям* $\operatorname{cl}\Omega_1 \subset \Omega_0$, (2.14) *и* (2.15). *Пусть функция* f *полунепрерывна и ограничена снизу. Тогда*

$$\boldsymbol{B}^{\circ}_{\Omega,f}(x) = \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x), \quad x \in \Omega^*. \tag{5.6}$$

“Геометрические” функции в правых частях равенств теорем 4.4 и 5.3 тесно связаны.

Предложение 5.4. *Пусть области* Ω_0 *и* Ω_1 *удовлетворяют стандартным условиям* $\operatorname{cl}\Omega_1 \subset \Omega_0$ *и* (2.14), *а функция* f *локально ограничена. Тогда*

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) = \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x), \quad x \in \Omega^*. \tag{5.7}$$

Перед тем, как перейти к доказательствам, кратко опишем теорию работы [22].

Определение 5.5. *Будем говорить, что две принимающие значения в измеримом пространстве* Y *случайные величины* ζ_1 *и* ζ_2 *равноизмеримы, если их функции распределения совпадают, то есть, равенство*

$$P(\zeta_1 \in A) = P(\zeta_2 \in A) \tag{5.8}$$

справедливо для всякого измеримого множества $A \subset Y$.

Отметим, что если величины ζ_1 и ζ_2 равноизмеримы, то равенство $\mathbb{E}\, f(\zeta_1) = \mathbb{E}\, f(\zeta_2)$ справедливо для всякой функции f, для которой хотя бы одно из этих математических ожиданий существует. Если $\varphi \in \boldsymbol{A}^{\circ}$ и $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ – интервал, то символом $\mu_{\varphi|_{\mathrm{J}}}$ будем обозначать распределение случайной величины $\varphi_{\mathrm{per}}|_{\mathrm{J}}$. Иными словами,

$$\begin{gathered} \mu_{\varphi|_{\mathrm{J}}}(A) = \frac{1}{|\,\mathrm{J}\,|}\big|\{t \in \mathrm{J} \mid \varphi_{\mathrm{per}}(t) \in A\}\big|, \\ A \ \text{– борелевское подмножество } \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Отметим, что $\mu_{\varphi|_{\mathrm{J}}}$ – вероятностная мера на множестве $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega)$ всех вероятностных мер с конечным первым моментом на множестве $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$. Множество $\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega)$ является выпуклым подмножеством пространства всех конечных знакопеременных мер с конечным первым моментом на множестве $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$. Пусть $\mathfrak{W}$ – некоторое подмножество в $\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) множество $\mathfrak{W}$ содержит все дельта-меры, то есть, $\mathfrak{D} = \{\delta_x \mid x \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega\} \subset \mathfrak{W}$;
2) для всякого конечного набора $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ пересечение множества $\mathfrak{W}$ с линейным пространством, порождённым мерами $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_N}$, открыто в топологии этого пространства. (5.10)

Отметим, что $\mathfrak{D} \subset \partial_{\mathrm{fixed}}\mathfrak{W}$. Мы будем работать с простыми мартингалами, принимающими значения в пространстве $\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega)$; такие мартингалы легко определить, так как простой мартингал всегда принимает значения, по сути, лишь в конечномерном пространстве. Обозначим символом μ_φ распределение самой функции φ, то есть, положим $\mu_\varphi = \mu_{\varphi|_{[0,1]}}$.

Теорема 5.6 (Теорема 2.3 работы [22], приводится с небольшими изменениями)**.** *Пусть* $\mathfrak{W}$ *– удовлетворяющее условиям* (5.10) *подмножество множества* $\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega)$. *Пусть* $\mathbb{M}$ *– простой* $(\mathfrak{W}, \mathfrak{D})$*-мартингал в смысле замечания* 4.7. *Существует такая функция* $\varphi\colon \mathbb{T} \to \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$, *что* $\mu_\varphi = \mathbb{M}_0$, *и включение* $\mu_{\varphi|_{\mathrm{J}}} \in \mathfrak{W}$ *справедливо для всякого интервала* $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$.

Эта теорема послужит инструментом для построения функций $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ$ с предписанными распределениями. Дадим пояснение относительно разницы в формулировке теоремы 5.6 по сравнению с оригинальной работой [22]. Здесь мы предполагаем слегка более слабое условие открытости области $\mathfrak{W}$. В работе [22] множество $\mathfrak{W}$ было открытым в *-слабой топологии. Читатель может проследить за доказательством работы [22]: всё происходит в конечномерном линейном пространстве, натянутом на дельта-меры в точках значений случайной величины $\mathbb{M}_\infty$. Мы будем применять указанную теорему к множествам вида

$$\mathfrak{W} = \Big\{\mu \in \mathcal{M}(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega) \;\Big|\; \int\limits_{\mathbb{R}^d} x\, d\mu(x) \notin \operatorname{cl}\Omega_1\Big\}. \tag{5.11}$$

Отметим, что пересечение такого множества $\mathfrak{W}$ с любым конечномерным линейным пространством V, порождённым дельта-мерами, открыто. Согласно определению, условие $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ$ почти равносильно требованию справедливости включения $\mu_{\varphi|_J} \in \mathfrak{W}$ для всякого подынтервала $J \subset \mathbb{R}$ («почти» относится к появлению множества $\widehat{\Omega}_1$ в определении (5.2)). Позже мы покажем, что всякий простой Ω-мартингал M порождает простой мартингал $\mathbb{M}$ со значениями в множестве $\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega)$, удовлетворяющий условиям теоремы 5.6 с заданным формулой (5.11) множеством $\mathfrak{W}$. Это наблюдение позволит построить равноизмеримую со случайной величиной M_∞ функцию $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ$ (см. приведённую ниже лемму 6.2).

§6. Доказательство теоремы 5.3

Рассуждение будет основываться на двух леммах.

Лемма 6.1 (Лемма о разбиении)**.** *Предположим, что область Ω удовлетворяет условиям* (2.14) *и* (2.15)*. Пусть $\varphi \in \boldsymbol{A}$, а $\widetilde{\Omega}_1$ – такое открытое множество, что $\mathrm{cl}\,\widetilde{\Omega}_1 \subset \Omega_1$. Положим $\widetilde{\Omega} = \Omega_0 \setminus \widetilde{\Omega}_1$. Существует такой $\widetilde{\Omega}$-мартингал M, что случайная величина M_∞ равноизмерима с функцией φ.*

Область $\widetilde{\Omega}$ будет называться *расширением* области Ω.

Лемма 6.2 (Лемма о склейке)**.** *Предположим, что область Ω удовлетворяет условиям* (2.14) *и* (2.15)*. Пусть M – простой Ω^*-мартингал. Существует равноизмеримая со случайной величиной M_∞ функция $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ$.*

Доказательство теоремы 5.3. Достаточно доказать неравенства

$$\boldsymbol{B}^\circ_{\Omega,f}(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x), \quad x \in \Omega^*, \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{B}^\circ_{\Omega,f}(x) \geqslant \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x), \quad x \in \Omega^*. \tag{6.2}$$

Не умаляя общности, предположим, что функция $\mathfrak{B}_{\Omega^*,f}$ конечна. Докажем неравенство (6.1). Зафиксируем точку $x \in \Omega^*$. Согласно определению (5.3), для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\psi \in \boldsymbol{A}^\circ$, что

$$\langle \psi \rangle_{\mathbb{T}} = x \quad \text{и} \quad \langle f(\psi) \rangle_{\mathbb{T}} \geqslant \boldsymbol{B}^\circ(x) - \varepsilon. \tag{6.3}$$

Пусть $\widehat{\Omega}_1$ – множество, соответствующее функции ψ в определении (5.2). Согласно замечанию 5.1, можем считать, что множество $\widehat{\Omega}_1$ строго выпукло, а также что область $\widehat{\Omega} = \mathrm{cl}\,\Omega_0 \setminus \widehat{\Omega}_1$ удовлетворяет условиям (2.14) и (2.15). В таком случае Ω – расширение области $\widehat{\Omega}$. Применим лемму 6.1 к функции $\psi_{\mathrm{per}}|_{[0,1]} \in \boldsymbol{A}(\widehat{\Omega})$ с областью Ω в роли расширения $\widehat{\Omega}$ и получим Ω-мартингал M, предельное значение M_∞ которого равноизмеримо с функцией ψ. В таком случае

$$\boldsymbol{B}^{\circ}_{\Omega,f}(x) \leqslant \langle f(\psi)\rangle_{\mathbb{T}} + \varepsilon = \mathbb{E}\, f(M_\infty) + \varepsilon \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x) + \varepsilon, \tag{6.4}$$

последнее неравенство следует из теоремы 4.11, предложения 4.12 и леммы 4.8. Остаётся устремить параметр ε к нулю.

Обратимся теперь к доказательству неравенства (6.2). Согласно леммам 4.8 и 4.10, для всякой точки $x \in \Omega^*$ существует такой простой Ω^*-мартингал M, что

$$\mathbb{E}\, f(M_\infty) \geqslant \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x) - \varepsilon, \quad M_0 = x. \tag{6.5}$$

Применим лемму 6.2 и получим равноизмеримую с M_∞ функцию $\varphi \in \boldsymbol{A}^{\circ}$. В таком случае

$$\langle \varphi\rangle_{\mathbb{T}} = \mathbb{E}\, M_\infty = x, \quad \langle f(\varphi)\rangle_{\mathbb{T}} = \mathbb{E}\, f(M_\infty) \geqslant \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x) - \varepsilon. \tag{6.6}$$

Остаётся устремить параметр ε к нулю, чтобы получить оценку (6.2). $\square$

Доказательство леммы 6.1 следует плану доказательства теоремы 3.7 в работе [23]. Введём в рассмотрение функцию $\Delta\colon \Omega \setminus \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \to \mathbb{R}$:

$$\Delta(x) = \sup\Big\{\max\Big(1, \frac{|x-y|}{|x-z|}\Big) \;\Big|\; x \in [y,z],\ y \in \Omega,\ z \in \mathrm{cl}\,\widetilde{\Omega}_1\Big\}. \tag{6.7}$$

Мы будем часто использовать понятие *трансверсального* отрезка. См. рис. 6.

Определение 6.3. *Пусть $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$, а $\ell \subset \Omega$ – отрезок с концом в точке x. Будем говорить, что отрезок ℓ трансверсальный, если содержащая его прямая пересекает область Ω_1.*

Лемма 6.4. *Пусть области Ω_0 и Ω_1 удовлетворяют условию* (2.14). *Пусть область $\widetilde{\Omega}_1 \subset \Omega_1$ такова, что $\mathrm{cl}\,\widetilde{\Omega}_1 \subset \Omega_1$. В таком случае условие* (2.15) *равносильно равномерной ограниченности функции Δ на компактных множествах для всякого выбора области $\widetilde{\Omega}_1$.*

Доказательство. Сначала проверим необходимость условия (2.15). Предположим, что оно не выполнено и нашёлся такой луч $L \subset \Omega_0$, что его нельзя подвинуть внутрь области Ω_1. Не умаляя общности, можем

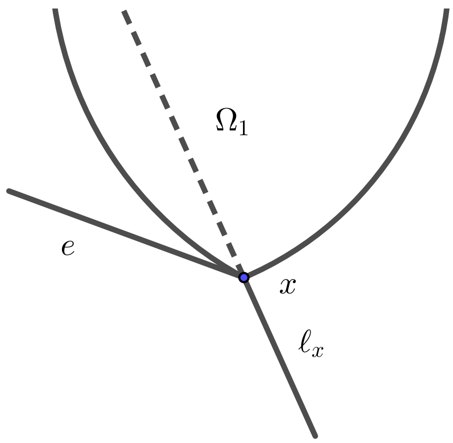

Рис. 6. На рисунке отрезок ℓ_x трансверсален, а отрезок e – нет.

считать, что луч L начинается из точки $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ и не пересекает границу области Ω_1. Согласно условию (2.14), мы также можем предположить, что отрезок L трансверсален. Выберем такую область $\widetilde{\Omega}_1$, что она пересекает продолжение луча L за точку x, пусть z – какая-то точка этого пересечения. Выбирая точку y сколь угодно далеко на луче L, мы получаем, что отношение $|x-y|/|x-z|$, а значит, и величина $\Delta(x)$, не ограничены.

Обратимся теперь к достаточности условия (2.15). Пусть $C \subset \Omega$ – компактное множество. Во-первых, отметим, что

$$|x-z| \geqslant \operatorname{dist}(C, \widetilde{\Omega}_1) > 0, \quad x \in C,\ z \in \widetilde{\Omega}_1. \tag{6.8}$$

Во-вторых, достаточно доказать, что величина $|y-x|$ равномерна ограничена, если $x \in C$, $y \in \Omega$, и существует такая точка $z \in \operatorname{cl}\widetilde{\Omega}_1$, что $x \in [y,z]$. Предположим противное: пусть существуют такие последовательности $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$ и $\{z_n\}_n$, что

$$x_n \in C,\ y_n \in \Omega,\ z_n \in \operatorname{cl}\widetilde{\Omega}_1, \quad x_n \in [y_n, z_n] \quad \text{и} \quad |y_n - x_n| \to \infty. \tag{6.9}$$

Не умаляя общности, можем считать, что $x_n \to x$ и $(y_n-x_n)/|y_n-x_n| \to e$, где $|e| = 1$. Из замкнутости множества Ω следует, что луч $L =$

$x + e \cdot \mathbb{R}_+$ целиком лежит внутри области Ω. По условию (2.14), область Ω не содержит прямых, поэтому величины $|z_n|$ равномерно ограничены. Мы можем предположить, что $z_n \to z \in \operatorname{cl}\widetilde{\Omega}_1$. Это означает, что луч $L \subset \Omega$ нельзя передвинуть внутрь области Ω_1, что противоречит условию (2.15). □

Доказательство леммы 6.1. Для всякой функции $\varphi \in \boldsymbol{A}$ существует такое разбиение $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$, что интервалы I_1 и I_2 дизъюнктны (с точностью до общей точки) и

$$\big[\langle\varphi\rangle_{\mathrm{I}_1}, \langle\varphi\rangle_{\mathrm{I}_2}\big] \cap \widetilde{\Omega}_1 = \varnothing \quad \text{и} \quad \max\Big(\frac{|\,\mathrm{I}_1\,|}{|\,\mathrm{I}_2\,|}, \frac{|\,\mathrm{I}_2\,|}{|\,\mathrm{I}_1\,|}\Big) \leqslant \Delta(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{I}}). \tag{6.10}$$

Доказательство этого утверждения полностью повторяет доказательство леммы 3.9 работы [23]. Последовательно применяя это утверждение, построим такую последовательность $\{\{\mathrm{I}_k^n\}_{k=1}^{2^n}\}_n$ разбиений отрезка I, что

1) для всякого числа n разбиение в $\{\mathrm{I}_k^{n+1}\}_k$ является подразбиением $\{\mathrm{I}_k^n\}_k$, и более того, для всяких n и k, таких что $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, справедлива формула $\mathrm{I}_{2k-1}^{n+1} \cup \mathrm{I}_{2k}^{n+1} = \mathrm{I}_k^n$;
2) для всяких чисел n и k, таких что $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, отрезок $\Big[\langle\varphi\rangle_{\mathrm{I}_{2k-1}^{n+1}}, \langle\varphi\rangle_{\mathrm{I}_{2k}^{n+1}}\Big]$ лежит в области $\widetilde{\Omega}$;
3) для всяких чисел n и k, таких что $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, справедливо неравенство $\max\Big(\frac{|\,\mathrm{I}_{2k-1}^{n+1}\,|}{|\,\mathrm{I}_{2k}^{n+1}\,|}, \frac{|\,\mathrm{I}_{2k}^{n+1}\,|}{|\,\mathrm{I}_{2k-1}^{n+1}\,|}\Big) \leqslant \Delta(\langle\varphi\rangle_{\mathrm{I}_k^n})$.

Пусть алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена интервалами $\{\mathrm{I}_k^n\}_{k=1}^{2^n}$, и пусть $M_n = \mathbb{E}(\varphi \mid \mathcal{F}_n)$. Мартингал $M = \{M_n\}_n$ и есть нужный нам $\widetilde{\Omega}$-мартингал (доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство теоремы 3.7 в работе [23]). □

Замечание 6.5. Утверждение леммы 6.1 сохраняет силу и если область Ω не удовлетворяет условию (2.15), однако, в этом случае мы требуем $\varphi \in L_\infty$. Нужно изменить доказательство следующим образом. Выберем такое компактное выпуклое множество $C \subset \mathbb{R}^d$, что $\varphi \in C$ почти наверное. Рассмотрим функцию

$$\Delta_C(x) = \sup\Big\{\max\Big(1, \frac{|x-y|}{|x-z|}\Big) \;\Big|\; x \in [y,z],\ y \in \Omega \cap C,\ z \in \operatorname{cl}\widetilde{\Omega}_1 \cap C\Big\}, \qquad x \in C \cap \Omega. \tag{6.11}$$

Эта функция ограничена, так как величина $|x-z|$ отделена от нуля, а величина $|x-y|$ ограничена. Остаётся повторить доказательство леммы 6.1, заменив функцию Δ на Δ_C.

Доказательство леммы 6.2. Пусть M – простой Ω^*-мартингал. Отметим, что множества C_a в определении 4.5 можно считать замкнутыми симплексами. Пусть C – объединение всевозможных таких симплексов, порождённых всеми атомами алгебр $\mathcal{F}_n$. По сути, C – объединение конечного числа симплексов. Таким образом, C – компактное подмножество области Ω^*. Следовательно, множество C отделено от области Ω_1 и не пересекается с множествами Ω_ε при достаточно близких к единице числах ε, здесь

$$\Omega_\varepsilon = (1-\varepsilon)\Omega_0 + \varepsilon\Omega_1; \tag{6.12}$$

в формуле использовано стандартное сложение Минковского. Зафиксируем настолько близкое к единице число ε, что $C \cap \Omega_\varepsilon = \varnothing$, и положим $\widehat{\Omega}_1 = \Omega_\varepsilon$. Отметим, что соответствующая линза $\widehat{\Omega} = \mathrm{cl}\,\Omega_0 \setminus \widehat{\Omega}_1$ удовлетворяет условиям (2.14) и (2.15)[1]. Более того, $\mathrm{cl}\,\Omega_1 \subset \widehat{\Omega}_1$. Стало быть, множество $\widehat{\Omega}_1$ удовлетворяет требованиям формулы (5.2), и M – $\widehat{\Omega}$-мартингал. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{W} = \Big\{\mu \in \mathcal{M}(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega) \,\Big|\, \int\limits_{\mathbb{R}^d} x\, d\mu(x) \notin \mathrm{cl}\,\widehat{\Omega}_1\Big\}. \tag{6.13}$$

Это множество удовлетворяет двум требованиям к множеству $\mathfrak{W}$ из списка (5.10). Пришло время определить мартингал $\mathbb{M}$. Напомним, что мартингал M простой. Определим искомый мартингал формулой

$$\mathbb{M}_n(w) = \mu_{M_\infty|_w}, \quad w \text{ – атом алгебры } \mathcal{F}_n, \tag{6.14}$$

символом μ_ζ обозначено распределение случайной величины ζ; мы интерпретируем $M_\infty|_w$ как случайную величину на вероятностном пространстве w, снабжённом мерой $(P(w))^{-1}P|_w$. Докажем, что $\mathbb{M}$ – $(\mathfrak{W},\mathfrak{D})$-мартингал, где множество $\mathfrak{W}$ задано формулой (6.13). Мы вскоре покажем, что $\mathbb{M}$ – действительно мартингал. Выберем произвольное число n и некоторый атом $w \in \mathcal{F}_n$. Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_j \in \mathcal{F}_{n+1}$ – потомки атома w. Свойство мартингальности процесса $\mathbb{M}$ выражается

[1] По-другому множество $\widehat{\Omega}_1$ можно построить, опираясь на приведённую ниже теорему 8.17.

формулой

$$P(w)\mu_{M_\infty|w} = \sum_j P(w_j)\mu_{M_\infty|_{w_j}}. \tag{6.15}$$

Чтобы доказать это тождество мер, вычислим их значения на некотором борелевском множестве $A \subset \mathbb{R}^d$:

$$P(w)P(M_\infty|_w \in A) = \sum_j P(w_j)P(M_\infty|_{w_j} \in A), \tag{6.16}$$

что справедливо. Остаётся лишь проверить третье свойство из определения 4.5, что любая выпуклая комбинация вида $\sum_j \alpha_j \mu_{M_\infty|_{w_j}}$ лежит в области $\mathfrak{W}$. Это означает

$$\sum_j \int\limits_{\partial\Omega_0} \alpha_j x\, d\mu_{M_\infty|_{w_j}}(x) \notin \mathrm{cl}\,\widehat{\Omega}_1, \tag{6.17}$$

что сводится к тому, что M – $\widehat{\Omega}$-мартингал, так как

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} x\, d\mu_{M_\infty|_{w_j}}(x) = M_{n+1}(w_j). \tag{6.18}$$

Применяя теорему 5.6 к мартингалу $\mathbb{M}$ и области $\mathfrak{W}$, получим такую функцию $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ$, что $\mu_\varphi = \mathbb{M}_0$. Остаётся заметить, что мера $\mathbb{M}_0$ есть не что иное, как распределение величины M_∞. □

§7. Доказательство предложения 5.4

Во-первых, неравенство

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) \geqslant \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x), \quad x \in \Omega^*, \tag{7.1}$$

следует из формулы (4.1), так как сужение $G|_{\Omega^*}$ любой функции $G \in \Lambda_{\Omega,f}$ на область Ω^* принадлежит классу $\Lambda_{\Omega^*,f}$. Во-вторых, для доказательства обратного к оценке (7.1) неравенства достаточно построить такую функцию $G \in \Lambda_{\Omega,f}$, что

$$G(x) = \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x), \quad x \in \Omega^*. \tag{7.2}$$

Конструкция функции G довольно прямолинейна, однако проверка её локальной вогнутости потребует некоторых усилий. Мы будем пользоваться специальными отрезками $\ell \subset \Omega$ для построения функции G. Для всякой точки $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$, выберем какой-нибудь трансверсальный отрезок (см. опр. 6.3) ℓ_x с концом в точке x. Определим функцию G согласно формуле

$$G(x) = \begin{cases} \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x), & x \in \Omega^*; \\ \lim\limits_{\substack{y\to x\\ y\in \ell_x}} \mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(y), & x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega, \end{cases} \tag{7.3}$$

точка y стремится к точке x вдоль отрезка ℓ_x. Отметим, что указанный в формуле предел всегда существует (хотя и может быть равен $-\infty$), так как функция $\mathfrak{B}_{\Omega^*,f}|_{\ell_x}$ вогнута.

Лемма 7.1. *Пусть область Ω удовлетворяет условию* (2.14)*, $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$, ℓ – трансверсальный отрезок с концом в точке x, а $s \subset \Omega$ – другой отрезок с концом в точке x. В таком случае выпуклая оболочка отрезков ℓ и s тоже целиком лежит в области Ω.*

Доказательство. Достаточно проверить, что указанная выпуклая оболочка не пересекается с областью Ω_1. Предположим противное, пусть точка $y \in \Omega_1$ лежит в выпуклой оболочке отрезков ℓ и s. Пусть z – точка на продолжении отрезка ℓ за точку x, лежащая достаточно близко к x. Так как отрезок ℓ трансверсальный, верно включение $z \in \Omega_1$. В таком случае отрезок $[z, y]$ лежит внутри области Ω_1, так как последнее множество выпукло. С другой стороны, отрезки $[z, y]$ и s, очевидно, пересекаются, что противоречит включению $s \subset \Omega$. □

Замечание 7.2. На самом деле, указанная выпуклая оболочка, за исключением самой точки x, лежит внутри области Ω^*.

Доказательство предложения 5.4. Как было сказано, достаточно показать, что заданная формулой (7.3) функция G локально вогнута на области Ω (в частности, требуется проверить, что функция G не принимает значения $-\infty$). Доказательство локальной вогнутости состоит в проверке истинности неравенств

$$\begin{gathered} G(x) \geqslant \alpha G(a) + \beta G(b), \\ x = \alpha a + \beta b,\ \alpha+\beta = 1,\ \alpha,\beta > 0,\ [a,b] \subset \Omega. \end{gathered} \tag{7.4}$$

Интерес представляют лишь случаи, когда одна из точек x, a или b лежит на границе $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Пусть точки a, b, x различны.

Случай $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Отметим, что в этом случае точки a и b не лежат на границе $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ согласно условию (2.14). Стало быть, мы можем предположить, что это внутренние точки области Ω. Рассмотрим отрезок ℓ_x, некоторую точку $y \in \ell_x$ (положим $y \neq x$), а также точки a_γ, b_γ и x_γ, заданные по правилу

$$z_\gamma = \gamma y + (1-\gamma)z, \quad \gamma \in (0,1], \tag{7.5}$$

где символом z обозначена любая из точек a, b или x. Отметим, что $[a_\gamma, b_\gamma] \subset \Omega^*$ согласно лемме 7.1 (а также замечанию 7.2). Таким образом,

$$\mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(x_\gamma) \geqslant \alpha\mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(a_\gamma) + \beta\mathfrak{B}_{\Omega^*,f}(b_\gamma). \tag{7.6}$$

Справедливо предельное соотношение $z_\gamma \to z$ при $\gamma \to 0$. Стало быть, неравенство (7.4) доказано, так как функция $\mathfrak{B}_{\Omega^*,f}$ непрерывна в точках a и b.

Приведённое рассуждение также показывает, что $G(x) > -\infty$. В самом деле, выберем такие точки $a, b \in \Omega^*$, что $x \in [a,b]$, и воспользуемся неравенством (7.4).

Случай $a \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Рассмотрим отрезок ℓ_a. Пусть $y \in \ell_a$. Рассмотрим точки a_γ, b_γ и x_γ, определённые той же формулой (7.5). Согласно лемме 7.1 (и замечанию 7.2), эти точки лежат внутри области Ω^* вместе с отрезком $[a_\gamma, b_\gamma]$. Следовательно, неравенство (7.6) справедливо, а оценка (7.4) следует из него при помощи предельного перехода. $\square$

Замечание 7.3. Можно показать, что определение функции G формулой (7.3) не зависит от конкретного выбора трансверсальных отрезков ℓ_x, $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$.

§8. Доказательство теоремы 4.4

Теорема 4.4 немедленно последует из неравенства (5.5), теоремы 5.3 и предложения 5.4, как только мы докажем приведённую ниже «теорему о продолжении».

Теорема 8.1. *Пусть Ω – линза, удовлетворяющая условиям* (2.14) *и* (2.15). *Предположим, что граница $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ принадлежит классу C^2, а f – произвольная функция на жёсткой границе. Тогда*

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) = \inf\Big\{\mathfrak{B}_{\widetilde{\Omega},f}(x) \;\Big|\; \widetilde{\Omega} \text{ – расширение области } \Omega\Big\}, \ x \in \Omega. \tag{8.1}$$

При доказательстве теоремы 8.1 мы, не умаляя общности, можем предполагать, что функция $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ принимает лишь конечные значения.

В таком случае тождество (8.1) допускает переформулировку: для всякой точки $x \in \Omega$ и всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое расширение $\widetilde{\Omega}$, что

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\widetilde{\Omega},f}(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) + \varepsilon. \tag{8.2}$$

Отметим, что выбор расширения $\widetilde{\Omega}$ может зависеть от параметра ε и точки x. В случае гладких границ и достаточно регулярной функции f, у нас получится доказать более сильное утверждение, которое является основным шагом в доказательстве теоремы 8.1.

Теорема 8.2. *Пусть Ω – линза, удовлетворяющая условиям* (2.14) *и* (2.15). *Предположим, что границы $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ и $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ принадлежат классу C^2 и функция f также C^2-гладкая. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое расширение $\widetilde{\Omega}$ области Ω, что*

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\widetilde{\Omega},f}(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) + \varepsilon \tag{8.3}$$

для всех $x \in \Omega$.

Доказательство этой теоремы с некоторыми изменениями следует схеме доказательства теоремы 4.1 в работе [23]. Эти изменения не потребуют привлечения новых идей, нужны лишь более удачные формулировки, чтобы перейти от случая $d = 2$ к случаю произвольной размерности. Условие $f \in C^2$ может быть мгновенно заменено просто непрерывностью функции f посредством приближения в равномерной норме на основании неравенств

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f} \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega,g} \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega,f+\varepsilon} = \mathfrak{B}_{\Omega,f} + \varepsilon,$$

справедливых в случае $f \leqslant g \leqslant f + \varepsilon$.

Следствие 8.3. *Утверждение теоремы* 8.2 *сохраняет справедливость и в случае $f \in C(\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega)$.*

Рассуждение работы [23] таково: нужно слегка возмутить функцию $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ так, чтобы она стала сильно вогнутой, после чего продолжить её через свободную границу. Рассуждение естественным образом разбивается на два шага: сперва нужно изучить граничное поведение локально вогнутых функций, после чего использовать исследованную структуру для построения продолжения.

8.1. Граничное поведение минимальных локально вогнутых функций.

Определение 8.4. *Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$. Будем говорить, что две точки $x, y \in \omega$ видят друг друга, если $[x, y] \subset \omega$. Множество*

$$\mathrm{Vis}_x^\omega = \{y \in \omega \mid x \text{ и } y \text{ видят друг друга в области } \omega\} \tag{8.4}$$

назовём множеством видимых из точки x точек.

Мы будем просто писать Vis_x вместо Vis_x^ω, если объемлющее множество ω ясно из контекста.

Предложение 8.5. *Пусть Ω – линза, удовлетворяющая условиям (2.14) и (2.15). Множество Vis_x компактно, если $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Диаметр множества Vis_x равномерно ограничен при выборе точки x из компактного подмножества границы $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$.*

Доказательство. Нетрудно проверить замкнутость множества Vis_x (пользуясь замкнутостью линзы Ω). Таким образом, достаточно доказать лишь второе утверждение. Предположим противное, пусть нашлись последовательность $\{x_n\}_n$ со значениями в компактном подмножестве множества $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ и последовательность $\{y_n\}_n$, такие что $|y_n| \to \infty$ и $[x_n, y_n] \subset \Omega$. Не умаляя общности, $x_n \to x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ и $y_n/|y_n| \to y \in S^{d-1}$. Из замкнутости множества Ω следует, что луч $x + \mathbb{R}_+ y$ лежит внутри области Ω. По условию (2.15), существует такая точка $z \in \Omega_1$, что $z + \mathbb{R}_+ y \subset \Omega_1$. Это противоречит строгой выпуклости области Ω_1, ведь $x \in \mathrm{cl}\,\Omega_1$. □

Замечание 8.6. Отметим, что множество Vis_x может быть неограниченным, если $x \notin \partial_{\mathrm{free}}\Omega$, например, см. рис. 2.

Мы будем зачастую пользоваться приведённым ниже простым принципом (ср. с фактом $B.3$ в работе [23]).

Факт 8.7. Пусть ω – строго выпуклая подобласть пространства $\mathbb{R}^d$. Пусть L – гиперплоскость. Предположим, что нашлись такие положительные числа r и R и точка $p \in \omega \cap L$, что $B_r(p) \subset \omega$, $B_R(p) \supset \omega \cap L$. В таком случае если $C = \frac{r+R}{r}$ и $y \in \partial\omega$, то существует такая точка $z \in \partial\omega \cap L$, что $|y - z| \leqslant C \operatorname{dist}(y, L)$.

Рис. 8.1 даёт намёк на доказательство этого утверждения.

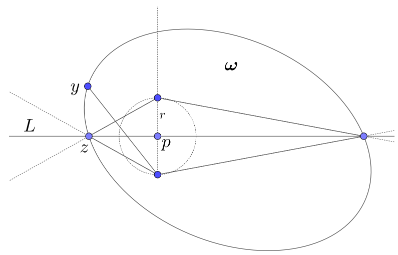

Рис. 7. Намёк на доказательство факта 8.7.

Определение 8.8. *Пусть* $x \in \omega \subset \mathbb{R}^d$ *и* $G\colon \omega \to \mathbb{R}$ *– некоторая функция. Множество таких линейных функций* L*, что* $G(y) \leqslant G(x) + L(y-x)$ *для всех точек* $y \in \mathrm{Vis}_x^\omega$ *назовём* супердифференциалом *функции* G *в точке* x*. Такое множество линейных функций будем обозначать символом* $\mathfrak{d}G|_x$*.*

Факт 8.9. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$ и $G\colon \omega \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Предположим, что для всякой точки $x \in \omega$ супердифференциал $\mathfrak{d}G|_x$ функции G в точке x не пуст. Тогда функция G локально вогнута на области ω.

Супердифференциал всякой локально вогнутой функции не пуст во внутренних точках её области определения (см., например, главу 23 в книге [17]). Можно задать вопрос о справедливости обратного заключения: «для всякой ли точки x области ω супердифференциал не пуст, если функция G локально вогнута?» Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный (рассмотрим область ω в пространстве $\mathbb{R}^2$, состоящую из трёх прямых, проходящих через начало координат). Однако для некоторых «хороших» областей (в том числе линз) ответ положительный.

Предложение 8.10. *Пусть* Ω *– линза, удовлетворяющая условиям* (2.14) *и* (2.15)*. Предположим* C^1*-гладкость границ области* Ω*. Пусть* $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \to \mathbb{R}$ *– такая локально липшицева функция, что функция* $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ *конечна. Для всякой точки* $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ *существует такая линейная функция* $L[\mathfrak{B}, x]$*, что неравенство*

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) + L[\mathfrak{B}, x](y-x) \geqslant \mathfrak{B}_{\Omega,f}(y) \tag{8.5}$$

справедливо для всех точек $y \in \mathrm{Vis}_x^\Omega$*. Иными словами, множество* $\mathfrak{d}\mathfrak{B}|_x$ *не пусто.*

Замечание 8.11. В предыдущем предложении минимальную локально вогнутую функцию $\mathfrak{B}$ можно заменить на произвольную локально липшицеву локально вогнутую функцию G.

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что $x = 0$ и

$$T_0\Omega_1 = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y_d = 0\}. \tag{8.6}$$

Символ $T_z\Omega_1$ обозначает касательную плоскость к множеству Ω_1 в точке z. Также предположим, что $y_d > 0$ на множестве Ω_1. Из вогнутости функции $\mathfrak{B}|_{y_d=0}$ следует существование такой линейной функции $\ell\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$, что оценка

$$\mathfrak{B}(z_1, z_2, \ldots, z_{d-1}, 0) \leqslant \mathfrak{B}(0) + \ell(z) \tag{8.7}$$

справедлива для всякой точки $z \in \mathbb{R}^{d-1}$, удовлетворяющей условию $(z, 0) \in \Omega$. Символом π обозначим ортогональную проекцию на пространство $\{y \in \mathbb{R}^d \mid y_d = 0\}$. Пусть

$$a = \sup\Big\{\frac{\mathfrak{B}(y) - \mathfrak{B}(0) - \ell(\pi[y])}{-y_d}\;\Big|\; y \in \mathrm{Vis}_0, y_d < 0\Big\}. \tag{8.8}$$

Докажем соотношение

$$\begin{aligned} a &= \sup\Big\{\frac{\mathfrak{B}(y) - \mathfrak{B}(0) - \ell(\pi[y])}{-y_d}\;\Big|\; y \in \mathrm{Vis}_0 \cap \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega, y_d < 0\Big\}\\ &= \sup\Big\{\frac{f(y) - \mathfrak{B}(0) - \ell(\pi[y])}{-y_d}\;\Big|\; y \in \mathrm{Vis}_0 \cap \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega, y_d < 0\Big\}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Отметим, что величина (8.9) точно не превосходит величину (8.8). С другой стороны, если

$$\mathfrak{B}(y) \leqslant -by_d + \mathfrak{B}(0) + \ell(\pi[y]) \tag{8.10}$$

для всех точек $y \in \mathrm{Vis}_0 \cap \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ и некоторого числа $b \in \mathbb{R}$, то такое же неравенство справедливо и для всех точек $y \in \mathrm{Vis}_0$ в силу минимальности функции $\mathfrak{B}$. В самом деле, если бы последнее неравенство нарушалось в какой-то внутренней точке множества Vis_0, то функция

$$y \mapsto \begin{cases} \mathfrak{B}(y), & y \in \Omega \setminus \mathrm{Vis}_0,\\ \min(\mathfrak{B}(y), -by_d + \mathfrak{B}(0) + \ell(\pi[y])), & y \in \Omega \cap \mathrm{Vis}_0 \end{cases} \tag{8.11}$$

лежала бы в классе $\Lambda_{\Omega,f}$ и при этом была бы меньше функции $\mathfrak{B}$, что невозможно. Таким образом, два супремума в правых частях формул (8.8) и (8.9) совпадают.

Докажем теперь, что локальная липшицевость функции f влечёт конечность величины a. Пусть $\{y^n\}_n$ – последовательность точек в области $\mathrm{Vis}_0\cap\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$, на которой реализуется супремум в формуле (8.9). Не умаляя общности, будем считать, что $y^n \to y^*$. Если $y_d^* \ne 0$, то величина a точно конечна.

Рассмотрим теперь случай $y_d^* = 0$. Согласно факту 8.7, найдутся такие точки $\widetilde{y}^n \in \partial\Omega_0$, что $\widetilde{y}^n_d = 0$ и

$$|y^n - \widetilde{y}^n| \lesssim y_d^n. \tag{8.12}$$

Тогда

$$f(y^n) - \mathfrak{B}(0) - \ell(\pi[y^n]) = f(\widetilde{y}^n) - \mathfrak{B}(0) - \ell(\pi[\widetilde{y}^n]) + O(|y_d^n|) \leqslant O(|y_d^n|), \tag{8.13}$$

и постоянная, скрывающаяся под символом O, зависит лишь от константы Липшица функции f и константы C в факте 8.7. Последнее соотношение показывает конечность величины a. Остаётся положить

$$L[\mathfrak{B},0](y) = \ell(\pi[y]) - ay_d. \tag{8.14}$$

□

Замечание 8.12. Из конструкции видно, что коэффициенты линейных функций $L[\mathfrak{B},x]$ равномерно ограничены, когда точка x пробегает компактное подмножество границы $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$.

Предложение 8.13. *Пусть Ω – удовлетворяющая условиям* (2.14) *и* (2.15) *линза. Предположим, что область Ω имеет C^2-гладкие границы. Пусть $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \to \mathbb{R}$ – такая C^2-гладкая функция, что функция $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ конечна. Предположим, что линейные функции $L[\mathfrak{B},x]$ построены по формулам* (8.9) *и* (8.14), *здесь $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$. В таком случае найдётся такая точка $e_x \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \cap \mathrm{Vis}_x$, что*

$$|\mathfrak{B}(x)+L[\mathfrak{B},x](z-x)-f(z)|=O(|e_x-z|^2),\quad z\in\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega\cap\mathrm{Vis}_x\,. \tag{8.15}$$

Константа в этом неравенстве равномерна, если точка x пробегает компактное подмножество границы $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$.

Доказательство. Предположим, так же как и в доказательстве предложения 8.10, что $x = 0$,

$$T_0\Omega_1 = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y_d = 0\}, \tag{8.16}$$

и неравенство $y_d > 0$ справедливо на области Ω_1.

Пусть e – предельная точка реализующей супремум в формуле (8.9) последовательности $\{y^n\}_n$. Покажем, что выбор $e_x := e$ при $x = 0$

удовлетворит неравенству (8.15). Сначала докажем тождество $\mathfrak{B}(0) + L[\mathfrak{B}, 0](e) = f(e)$. Если $e_d \ne 0$, оно следует из определения функции $L[\mathfrak{B}, 0]$. В случае $e_d = 0$ справедливо равенство $\mathfrak{B}(e) = \mathfrak{B}(0) + \ell(e_1, e_2, \dots, e_{d-1})$; если оно не выполняется, то супремум a равен $-\infty$, что абсурдно. Следовательно, $\mathfrak{B}(0) + L[\mathfrak{B}, 0](e) = f(e)$.

Рассмотрим C^2-гладкую функцию

$$A(z) = f(z) - \mathfrak{B}(0) - L[\mathfrak{B}, 0](z), \quad z \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega. \tag{8.17}$$

Справедливо соотношение $A(e) = 0$. Если $e_d < 0$, то функция A принимает неотрицательные значения в окрестности точки e. Следовательно, e – точка локального минимума функции A, что влечёт формулу (8.15).

В случае $e_d = 0$ мы знаем, что $A(z) \leqslant 0$ для тех точек $z \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$, для которых $z_d \leqslant 0$. Из формулы (8.9) следует, что для всякого числа $\delta > 0$ справедлива оценка $A(y^n) > \delta y_d^n$, коль скоро число n достаточно велико. Рассмотрим гиперплоскость, содержащую пересечение плоскостей $T_{e,\Omega_0} \cap T_{0,\Omega_1}$ и параллельную оси y_d. Не умаляя общности, будем предполагать, что это гиперплоскость $\{y_{d-1} = 0\}$. Пусть $\widetilde{A}$ – проекция функции A на рассмотренную гиперплоскость, то есть, функция, заданная в окрестности точки e следующим образом: если $\pi\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \to \{y_{d-1} = 0\}$ – ортогональная проекция, то

$$\widetilde{A}(\widetilde{z}) = A(\pi^{-1}[\widetilde{z}]), \quad \widetilde{z}_{d-1} = 0, \quad \widetilde{z} \text{ достаточно близка } e. \tag{8.18}$$

Функция $\widetilde{A}$ является C^2-гладкой в окрестности точки e, $\widetilde{A}(e) = 0$ и $\widetilde{A}(z) \leqslant 0$, если $\widetilde{z}_d \leqslant 0$. Более того, найдётся такая последовательность $\widetilde{y}^n = (\widetilde{y}_1^n, \dots, \widetilde{y}_{d-2}^n, 0, \widetilde{y}_d^n)$, что $\widetilde{y}^n \to e$, $\widetilde{y}_d^n < 0$ и

$$0 \geqslant \widetilde{A}(\widetilde{y}^n) > \delta \widetilde{y}_d^n \tag{8.19}$$

для всякого фиксированного числа $\delta > 0$ и достаточно больших чисел n.

Докажем справедливость равенства $\nabla\widetilde{A}(e) = 0$. Сужение функции $\widetilde{A}$ на сечение $y_d = 0$ достигает максимального значения в точке e. Следовательно, нам достаточно доказать равенство

$$\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial y_d}(e) = 0. \tag{8.20}$$

Отметим, что производная в левой части этого равенства не может принимать отрицательные значения, так как $\widetilde{A}(z) \leqslant 0$ при $\widetilde{z}_d \leqslant 0$.

Докажем её неположительность. Если оная неположительность отсутствует, то $\frac{\partial}{\partial y_d}\widetilde{A}(e) > 2\delta$ для некоторого числа $\delta > 0$, и, ввиду C^1-гладкости, имеем $\frac{\partial}{\partial y_d}\widetilde{A} > \delta$ в окрестности точки e. Стало быть,

$$\widetilde{A}(\widetilde{y}^n) \leqslant \widetilde{A}(\widetilde{y}_1^n, \ldots, \widetilde{y}_{d-2}^n, 0, 0) + \delta\widetilde{y}_d^n \leqslant \delta\widetilde{y}_d^n, \qquad (8.21)$$

что противоречит неравенству (8.19). Следовательно, $\nabla\widetilde{A}(e) = 0$. В таком случае для всякой достаточно близкой к e точке $z \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ справедливо предельное соотношение

$$A(z) = \widetilde{A}(\widetilde{z}) = O(|\widetilde{z} - e|^2) = O(|z - e|^2), \quad \widetilde{z} = \pi[z], \qquad (8.22)$$

которое и доказывает формулу (8.15). $\square$

Замечание 8.14. Условие $f \in C^2$ избыточно. Как видно из доказательства, его можно заменить слегка более слабым условием $C^{1,1}$-гладкости.

Предложение 8.15. *Пусть Ω – удовлетворяющая условиям* (2.14) *и* (2.15) *линза. Предположим, что у множества Ω границы C^2-гладкие. Пусть $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \to \mathbb{R}$ – такая C^2-гладкая функция, что функция $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ конечна. Предположим, что линейные функции $L[\mathfrak{B}, x]$ построены по формулам* (8.9) *и* (8.14), *где $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Тогда справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{B}(y) \leqslant \mathfrak{B}(x) + L[\mathfrak{B}, x](y-x) + O(|x-y|^3), \ \ y \to x, \ \ x, y \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega. \qquad (8.23)$$

Неявные константы, скрывающиеся за символом O, равномерны, когда точки x и y пробегают компактное подмножество множества $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$.

Доказательство. Используя соображения компактности, можно свести рассмотрения к случаю, когда точка y лежит в окрестности точки x. Аналогично доказательству предложения 8.10, предположим, что $x = 0$,

$$T_0\Omega_1 = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y_d = 0\}, \qquad (8.24)$$

а также неравенство $y_d > 0$ справедливо на области Ω_1. Будем считать, что граница $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$ задана графиком функции $h\colon U \to \mathbb{R}$, где $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ – окрестность начала координат. Рассмотрим конус

$$\begin{gathered} C_y = \Big\{ z \in \mathbb{R}^d \ \Big|\ z_d - y_d \leqslant -C|y_{\bar{d}}||z_{\bar{d}} - y_{\bar{d}}| \Big\}, \\ y = (y_{\bar{d}}, y_d), z = (z_{\bar{d}}, z_d), \quad y_{\bar{d}}, z_{\bar{d}} \in \mathbb{R}^{d-1}, \end{gathered} \qquad (8.25)$$

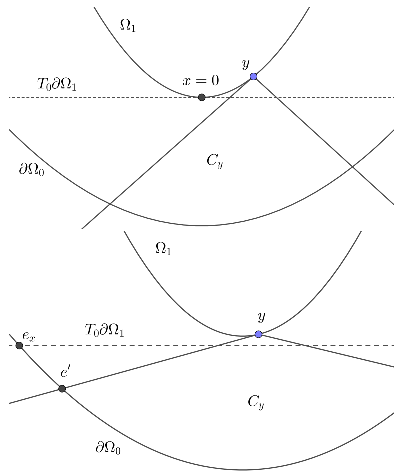

Рис. 8. Иллюстрация к доказательству предложения 8.15. На первой картинке изображён конус C_y в случае $d = 2$. Вторая показывает двумерное сечение, появляющееся при построении точки e'.

где $y \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ – точка в окрестности точки x, а постоянная C достаточно велика. См. рис. 8.

Конус C_y не пересекает множество Ω_1. Докажем это утверждение. Так как касательная плоскость к множеству Ω_1 в точке $(y_{\bar d}, h(y_{\bar d}))$ описывается уравнением $z_d - y_d = \langle \nabla h(y_{\bar d}), z_{\bar d} - y_{\bar d}\rangle$, достаточно доказать неравенство

$$z_d - y_d \leqslant \langle \nabla h(y_{\bar d}), z_{\bar d} - y_{\bar d}\rangle, \quad z \in C_y. \tag{8.26}$$

Оценим:

$$z_d - y_d \overset{z\in C_y}{\leqslant} -C|y_{\bar d}||z_{\bar d} - y_{\bar d}| \leqslant -|\nabla h(y_{\bar d})||z_{\bar d} - y_{\bar d}| \leqslant \langle \nabla h(y_{\bar d}), z_{\bar d} - y_{\bar d}\rangle. \tag{8.27}$$

Неравенство $|\nabla h(y_{\bar d})| \leqslant C|y_{\bar d}|$ для всех x из некоторого компактного множества и всех точек y в окрестности x следует из предположения о C^2-гладкости поверхности $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Следовательно, конус C_y действительно не пересекает множество Ω_1.

Подобное рассуждение показывает, что

$$|z - y| \lesssim |y_{\bar d}|, \quad \text{если} \quad z \in C_y \text{ и } z_d \geqslant 0. \tag{8.28}$$

В частности, в таком случае точка z не лежит на границе $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$.

Пусть e_x – построенная в предложении 8.13 точка. Рассмотрим два случая: $e_x \in C_y$ и $e_x \notin C_y$.

Случай $e_x \in C_y$. В этом случае $e_x \in \mathrm{Vis}_y$, и отрезок $[e_x, y]$ пересекает гиперплоскость $\{z \mid z_d = 0\}$ (так как точка e_x лежит ниже плоскости $z_d = 0$ согласно неравенству (8.28)). Обозначим точку пересечения символом P. В таком случае функция G, определённая формулой

$$G(z) = \mathfrak{B}(z) - \mathfrak{B}(0) - L[\mathfrak{B}, 0](z), \quad z \in \Omega, \tag{8.29}$$

вогнута на рассматриваемом отрезке, принимает значение 0 в точке e_x и не положительна в точке P. Следовательно, эта функция также не положительна в точке y, и мы доказали неравенство $\mathfrak{B}(y) \leqslant \mathfrak{B}(x) + L[\mathfrak{B}, x](y - x)$, даже более сильное, чем желаемая оценка (8.23).

Рассмотрим теперь случай $e_x \notin C_y$. Существует такая точка $e' \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \cap C_y$, что $|e_x - e'| \lesssim |y_{\bar{d}}|$. Например, такая точка найдётся в двумерной плоскости, проходящей через точки y и e_x и перпендикулярной гиперплоскости $z_d = 0$ (здесь мы воспользовались предложением 8.5; см. также вторую картинку на рис. 8). Пусть отрезок $[e', y]$ пересекает плоскость $\{z \mid z_d = 0\}$ в некоторой точке P. Согласно неравенству (8.28),

$$|y - P| \lesssim |y_{\bar{d}}| \quad \text{и} \quad |y - e'| \gtrsim 1. \tag{8.30}$$

По вогнутости функции G (см. определение функции G в формуле (8.29)),

$$G(P) \geqslant \frac{|P - e'|}{|e' - y|} G(y) + \frac{|P - y|}{|e' - y|} G(e'). \tag{8.31}$$

Так как $G(P) \leqslant 0$, то

$$G(y) \leqslant -\frac{|P - y|}{|P - e'|} G(e') \overset{(8.15)}{\lesssim} \frac{|P - y|}{|P - e'|} |e' - e_x|^2 \overset{(8.30)}{\lesssim} |y_{\bar{d}}| \cdot |y_{\bar{d}}|^2 = |y_{\bar{d}}|^3. \tag{8.32}$$

$\square$

Следствие 8.16. *Пусть Ω – удовлетворяющая условиям* (2.14) *и* (2.15) *линза. Предположим C^2-гладкость границ области Ω. Пусть $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \to \mathbb{R}$ – такая C^2-гладкая функция, что функция $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ конечна. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует локально вогнутая на области Ω функция $G\colon \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенствам*

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) \leqslant G(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) + \varepsilon, \quad x \in \Omega; \tag{8.33}$$

более того, для всякой точки $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ существует такая линейная функция $L[G,x]$, что для всякого компактного множества $K \subset \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ неравенство

$$G(y) \leqslant G(x) + L[G,x](y-x) - c_K|x-y|^2, \quad x, y \in K, \ |x-y| < \varepsilon_K, \tag{8.34}$$

справедливо, причем выбор положительных констант c_K и ε_K зависит лишь от компакта K. Коэффициенты линейных функций $L[G,x]$ равномерно ограничены, когда точка x пробегает компактное подмножество границы $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$.

Доказательство. Пусть $g\colon \Omega \to [0,1]$ – сильно вогнутая функция (т. е., C^2-гладкая функция, матрица вторых производных которой строго положительно определена в каждой точке); такую функцию нетрудно построить, пользуясь условиями (2.14) и (2.15) (см. лемму 4.5 в работе [23]). Положим

$$G(x) = \mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) + \varepsilon g(x), \tag{8.35}$$

что влечёт определение линейных функций $L[G,x]$:

$$L[G,x] = L[\mathfrak{B},x] + \varepsilon\langle \nabla g(x), \cdot\rangle, \quad x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega. \tag{8.36}$$

Неравенство (8.34), в свою очередь, следует из предложения 8.15. $\square$

8.2. Построение продолжения. Перед тем, как переходить к деталям, опишем метод построения продолжений в общих чертах. Предположим, что G – локально вогнутая функция на некотором множестве ω и её супердифференциал не пуст в каждой точке $y \in \omega$. Пусть $\widetilde{\omega}$ – некоторое множество, $\omega \subset \widetilde{\omega}$. В таком случае мы можем попытаться продолжить функцию G на область $\widetilde{\omega}$ при помощи формулы

$$\widetilde{G}(x) = \inf\Big\{G(y) + L(x-y) \ \Big|\ y \in \omega, \ L \in \eth G|_y \text{ и } y \in \mathrm{Vis}_x^{\widetilde{\omega}}\Big\}, \ x \in \widetilde{\omega}. \tag{8.37}$$

Такое определение не совсем строгое, потому что иногда более удобно в этой формуле рассматривать все линейные функции из супердифференциала функции G в точке y, а иногда – лишь одну. В связи с формулой (8.37) возникает два вопроса: когда она определяет конечную функцию, и когда полученная функция локально вогнута на области $\widetilde{\omega}$? Дадим два простых достаточных условия.

Функция $\widetilde{G}$ конечна, если все функции $L \in \eth G|_y$ равномерно ограничены, когда точка y пробегает компакт, и множество $\mathrm{Vis}_x^{\widetilde{\omega}}$ компактно для всякой точки $x \in \widetilde{\omega}$.

Функция $\widetilde{G}$ будет локально вогнутой, если для всякой точки $x \in \widetilde{\omega}$ найдутся такие окрестность U_x (в относительной топологии множества $\widetilde{\omega}$) и точка $y \in \omega$, что $y \in \mathrm{Vis}_z^{\widetilde{\omega}}$ для всякой точки $z \in U_x$, а также для некоторой функции $L \in \eth G|_y$ справедливо равенство $\widetilde{G}(x) = G(y) + L(y-x)$. В таком случае $\eth G|_x \neq \varnothing$, и локальная вогнутость следует из факта 8.9.

Нам также потребуются две теоремы о приближении из работы [5] (основанной на более ранней статье [4]).

Теорема 8.17. *Пусть Ω – непустое строго выпуклое собственное подмножество пространства $\mathbb{R}^d$. Предположим, что открытое множество U содержит $\mathrm{cl}\,\Omega$. Найдётся такое открытое множество Ω', что $\mathrm{cl}\,\Omega \subset \Omega'$, $\mathrm{cl}\,\Omega' \subset U$, и множество Ω' строго выпуклое с вещественно-аналитической границей.*

Теорема 8.18. *Пусть Ω – непустое строго выпуклое собственное подмножество пространства $\mathbb{R}^d$. Предположим, что замкнутое множество V лежит внутри множества Ω. Найдётся такое открытое множество Ω', что $V \subset \Omega' \subset \mathrm{cl}\,\Omega' \subset \Omega$ и множество Ω' строго выпуклое с вещественно-аналитической границей.*

Предложение 8.19. *Пусть Ω – непустое строго выпуклое собственное подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, а $\rho\colon \partial\Omega \to (0,1]$ – непрерывная функция. Найдётся такое открытое строго выпуклое множество Ω' с вещественно-аналитической границей, что $\mathrm{cl}\,\Omega' \subset \Omega$, и если точки $x, y \in \partial\Omega$ видят друг друга в области $\mathrm{cl}\,\Omega \setminus \Omega'$, то $|x-y| < \rho(x)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$V = \Bigl\{ z \in \mathrm{cl}\,\Omega \Bigm| z = \frac{x+y}{2}, \quad x, y \in \partial\Omega,\ |x-y| \geqslant \rho(x) \Bigr\}. \tag{8.38}$$

Оно замкнуто и лежит внутри множества Ω. Если две точки $x, y \in \partial\Omega$ видят друг друга в множестве $\mathrm{cl}\,\Omega \setminus V$, то $|x-y| < \rho(x)$. Остаётся применить теорему 8.18, чтобы заменить множество V большим множеством Ω'. $\square$

Приводимое ниже следствие получается совмещением следствия 8.16 с предложением 8.19.

Следствие 8.20. *Пусть Ω – удовлетворяющая условиям* (2.14) *и* (2.15) *линза. Предположим C^2-гладкость границ множества Ω.*

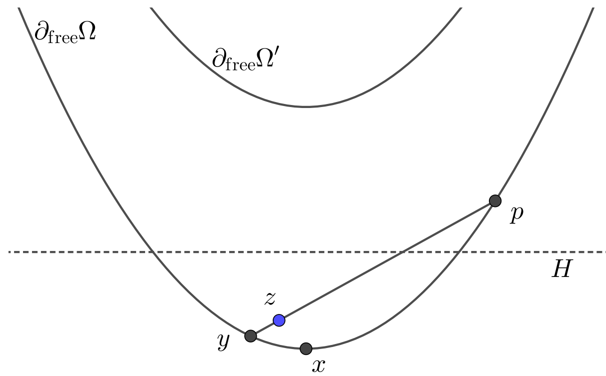

Рис. 9. Иллюстрация к доказательству леммы 8.21.

Пусть $f\colon \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \to \mathbb{R}$ *– такая* C^2*-гладкая функция, что функция* $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ *конечна. Для всякого числа* $\varepsilon > 0$ *существует расширение* Ω' *с* C^2*-гладкими границами и локально вогнутая на области* Ω *функция* $G\colon \Omega \to \mathbb{R}$*, удовлетворяющая неравенствам*

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) \leqslant G(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) + \varepsilon, \quad x \in \Omega. \tag{8.39}$$

Более того, для всякой точки $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ *существует такая линейная функция* $L[G,x]$*, что для всякого компактного множества* $K \subset \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ *найдется такая константа* $c_K > 0$*, что оценка* (8.34) *справедлива, если точки* $x, y \in K$ *видят друг друга в области* Ω'*. Коэффициенты линейных функций* $L[G,x]$ *равномерно ограничены при пробегании точкой* x *компактного подмножества свободной границы* $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$*.*

Настало время определить продолжение $\widetilde{G}$ в духе формулы (8.37):

$$\widetilde{G}(z) = \begin{cases} G(z), & z \in \Omega;\\ \inf\{G(y) + L[G,y](z-y) \mid y \in \mathrm{Vis}_z^{\Omega'} \cap \partial_{\mathrm{free}}\Omega\}, & z \in \Omega' \setminus \Omega. \end{cases} \tag{8.40}$$

Лемма 8.21. *Для всякой точки* $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ *существует такое относительно открытое множество* $U_x \subset \Omega' \setminus \mathrm{int}\,\Omega$*, содержащее точку* x*, что для всякой точки* $z \in U_x$ *значение* $\widetilde{G}(z)$ *конечно, а супердифференциал функции* $\widetilde{G}$ *в точке* z *не пуст.*

Доказательство. Пусть H – гиперпространство, отделяющее точку x от множества $\partial_{\mathrm{free}}\Omega'$ (предположим, что гиперпространство H

ближе к точке x, чем к указанному множеству). Достаточно проверить, что если точка $z \in \Omega' \setminus \operatorname{int}\Omega$ достаточно близка к точке x, то инфимум в формуле (8.40) достигается в некоторой точке y, лежащей с точкой x по одну сторону от H. См. рис. 9. В таком случае точка y видит окрестность точки z, и линейная функция $L[G, y]$ принадлежит супердифференциалу функции $\widetilde{G}$ в точке z.

Пусть $p \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ – некоторая точка, лежащая с другой стороны от гиперплоскости H, чем точка x, и видящая точку z в области Ω'. Мы хотим доказать, что найдётся точка y с той же стороны от H, что и точка x, и такая, что

$$G(y) + L[G, y](z - y) \leqslant G(p) + L[G, p](z - p), \tag{8.41}$$

если точка z достаточно близка к точке x. Пусть y – точка пересечения прямой, проходящей через точки z и p, с множеством $\partial_{\mathrm{free}}\Omega$, лежащая с той же стороны от гиперплоскости H, что и точка x. Пусть, кроме того, $K \subset \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ – компактное множество, содержащее точку x вместе со всеми видимыми из неё в области Ω' точками, а также видимыми из этих точек точками. Пусть M – супремум констант Липшица функций $L[G, q]$, где $q \in K$. В таком случае

$$\begin{aligned} G(y) + L[G, y](z - y) &\leqslant G(y) + M|z - y| \\ &\overset{(8.34)}{\leqslant} G(p) + L[G, p](y - p) - c_K|p - y|^2 + M|z - y| \\ &\leqslant G(p) + L[G, p](z - p) - c_K|p - y|^2 + 2M|z - y|. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Мы видим, что неравенство (8.41) справедливо, если точка z достаточно близка к точке x, потому что точка y в таком случае тоже достаточно близка к x, в то время как величина $|p - y|$ отделена от нуля. $\square$

Доказательство теоремы 8.2. Построим множество $V \subset \Omega_1$ как дополнение объединения всех множеств U_x, $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$, построенных в лемме 8.21. Применим теорему 8.18 и получим такое строго выпуклое множество $\widetilde{\Omega}_1$, что $V \subset \widetilde{\Omega}_1 \subset \operatorname{cl}\widetilde{\Omega}_1 \subset \Omega_1$. Положим $\widetilde{\Omega} = \operatorname{cl}\Omega_0 \setminus \widetilde{\Omega}_1$. В таком случае построенная по формуле (8.40) функция $\widetilde{G}$ локально вогнута на области $\widetilde{\Omega}$ (это доказывается при помощи факта 8.9). Следовательно, $\mathfrak{B}_{\widetilde{\Omega}, f}(z) \leqslant \widetilde{G}(z)$ для всех $z \in \widetilde{\Omega}$ и

$$\mathfrak{B}_{\Omega, f}(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\widetilde{\Omega}, f}(x) \leqslant G(x) \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega, f}(x) + \varepsilon, \quad x \in \Omega. \tag{8.43}$$

$\square$

8.3. Доказательство теоремы 8.1. Чтобы доказать теорему 8.1, нам потребуется продолжить локально вогнутую функцию через жёсткую границу при помощи формулы (8.37).

Лемма 8.22. *Пусть линза* Ω *удовлетворяет условиям* (2.14) *и* (2.15), *а* $\omega \supset \Omega$ *– множество, внутренность которого содержит множество* $\Omega \setminus \partial_{\mathrm{free}}\Omega$. *Предположим, что функция* $G\colon \omega \to \mathbb{R}$ *локально липшицева и локально вогнута на области* Ω, *а также обладает непустым дифференциалом в каждой точке. Пусть* Ω' *– такое содержащее* Ω *открытое выпуклое множество, что каждая точка* $x \in \Omega'\setminus\Omega_0$ *видит лишь компактное подмножество границы* $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ *внутри множества* $\mathrm{cl}\,\Omega' \setminus \Omega_0$. *В таком случае функция*

$$\widetilde{G}(x) = \begin{cases} G(x), & x \in \Omega;\\ \inf\Big\{G(y) + L(x-y)\;\Big|\; y \in \Omega \cap \mathrm{Vis}_x^{\Omega'\setminus\Omega_1},\, L \in \eth G|_y\Big\}, & x \in \Omega' \setminus \Omega_0, \end{cases} \tag{8.44}$$

конечна и локально вогнута на области $\Omega' \setminus \Omega_1$.

Доказательство. Благодаря локальной вогнутости функции G, при вычислении инфимума в формуле (8.44) достаточно ограничиться лишь точками $y \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \cap \mathrm{Vis}_x^{\Omega'\setminus\Omega_0}$. Так как множества $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \cap \mathrm{Vis}_x^{\Omega'\setminus\Omega_0}$ компактны и функция G локально липшицева на области ω, величина $\widetilde{G}$ не принимает значения $-\infty$. Следовательно, остаётся лишь проверить локальную вогнутость функции $\widetilde{G}$. Для этого докажем, что супердифференциал функции $\widetilde{G}$ в любой точке $x \in \Omega' \setminus \Omega_0$ не пуст.

Пусть $x \in \Omega' \setminus \Omega_0$. Предположим, что $\widetilde{G}(x) = G(y) + L(x-y)$, $y \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega \cap \mathrm{Vis}_x^{\Omega'\setminus\Omega_0}$ и $L \in \eth G|_y$. Достаточно доказать неравенство $\widetilde{G}(z) \leqslant G(y) + L(z-y)$, где точка z лежит в достаточно малой окрестности точки x. Оно справедливо, так как точки z и y видят друг друга в области $\Omega' \setminus \Omega_1$ (теперь мы пользуемся исходным определением – формулой (8.44)). В случае, когда инфимум в определении величины $\widetilde{G}(x)$ достигается на последовательности точек y_n, рассуждение ничем не отличается. $\square$

Факт 8.23. Пусть Ω_0 – строго выпуклое множество, а x – точка на его границе. Существует такая окрестность U_x точки x в множестве $\mathbb{R}^d \setminus \Omega_0$, что всякая точка $y \in U_x$ может видеть в области $\mathbb{R}^d \setminus \Omega_0$ лишь компактное подмножество границы $\partial\Omega_0$.

Доказательство теоремы 8.1. Зафиксируем точку $p \in \Omega \setminus \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ и число $\varepsilon > 0$.

Во-первых, построим такое открытое строго выпуклое множество Ω_{-1} с вещественно-аналитической границей, что оно содержит замыкание области Ω_0 и всякая точка $x \in \operatorname{cl}\Omega_{-1} \setminus \Omega_0$ видит в множестве $\Omega_{-1} \setminus \Omega_0$ лишь компактное подмножество границы $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$; такое построение осуществляется совмещением теоремы 8.17 и факта 8.23.

Во-вторых, построим такое строго выпуклое множество Ω', что $\operatorname{cl}\Omega' \subset \Omega_0$, $\operatorname{cl}\Omega_1 \subset \Omega'$, $p \in \Omega'$ и если точки y и z множества $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ видят друг друга в множестве $\operatorname{cl}\Omega_0 \setminus \Omega'$, то $|y - z| \leqslant 1$; это осуществляется применением предложения 8.19 с $\rho \equiv \delta$, где постоянная δ достаточно мала.

Любая точка $x \in \operatorname{cl}\Omega_{-1} \setminus \Omega'$ может видеть в множестве $\operatorname{cl}\Omega_{-1} \setminus \Omega'$ только компактное подмножество границы $\partial\Omega'$. Отметим, что сужение функции $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ на множество $\Omega' \cap \Omega$ локально липшицево и его супердифференциал не пуст в каждой точке; множество

$$\{\nabla L \mid L \in \eth\mathfrak{B}_{\Omega,f}|_x, x \in K\}$$

равномерно ограничено для всякого компактного множества $K \subset \Omega'$. Следовательно, мы можем построить функцию $G\colon \operatorname{cl}\Omega_{-1} \setminus \Omega_1 \to \mathbb{R}$ согласно формуле

$$G(x) = \begin{cases} \mathfrak{B}_{\Omega,f}(x), \\ \quad x \in \operatorname{cl}\Omega' \setminus \Omega_1; \\ \inf\Big\{\mathfrak{B}_{\Omega,f}(y) + L(x-y) \;\Big|\; y \in \Omega' \cap \mathrm{Vis}_x^{\operatorname{cl}\Omega_{-1}\setminus\Omega_1}, L \in \eth\mathfrak{B}_{\Omega,f}|_y\Big\}, \\ \quad x \in \operatorname{cl}\Omega_{-1} \setminus \Omega'. \end{cases} \tag{8.45}$$

Согласно лемме 8.22, функция G локально вогнута. Более того, эта функция непрерывна на множестве $\partial\Omega_{-1}$. Следовательно, функция $\mathfrak{B}_{\operatorname{cl}\Omega_{-1}\setminus\Omega_1, G|_{\partial\Omega_{-1}}}$ может быть продолжена через свободную границу при помощи теоремы 8.2. Пусть $\widetilde{\Omega}$ – расширение области $\operatorname{cl}\Omega_{-1} \setminus \Omega_1$, а $\widetilde{G}$ – продолженная функция. Тогда

$$\widetilde{G}(p) \leqslant \mathfrak{B}_{\operatorname{cl}\Omega_{-1}\setminus\Omega_1, G|_{\partial\Omega_{-1}}}(p) + \varepsilon \leqslant G(p) + \varepsilon = \mathfrak{B}_{\Omega,f}(p) + \varepsilon. \tag{8.46}$$

□

§9. О пределах возможностей наших методов

Лемма, приводимая ниже, оправдывает появление вспомогательной области $\widehat{\Omega}_1$ в определении (5.2). Она также показывает, почему в теореме 4.4 нашими методами не получается доказать формулу (4.2) для точек $x \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Напомним определение сырной области из работы [23].

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ называется *сырной областью*, если оно допускает представление в виде

$$\Omega = \operatorname{cl}\Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j, \tag{9.1}$$

здесь области Ω_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, строго выпуклые, открытые и ограниченные; "дыры" Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, попарно отделены друг от друга и лежат со своими замыканиями во внутренности области Ω_0.

Лемма 9.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – такая сырная область, что границы множеств Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, в представлении* (9.1) *C^1-гладкие. Пусть функция $\varphi\colon \mathbb{T} \to \partial\Omega_0$ такова, что для всякой дуги $J \subset \mathbb{T}$ точка $\langle\varphi\rangle_J$ лежит в области Ω. Если $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}} \in \partial\Omega_j$ для некоторого индекса j, то функция φ принимает лишь два значения.*

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}} \in \partial\Omega_1$. Пусть ℓ – касательная к кривой $\partial\Omega_1$ в точке $x = \langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}}$. Будем говорить, что точка лежит ниже прямой ℓ, если она строго отделена прямой ℓ от области Ω_1, и говорить, что она лежит выше ℓ в случае, если точка и область Ω_1 лежат в одной и той же открытой полуплоскости относительно прямой ℓ.

Сначала докажем, что функция φ не принимает значения на части границы $\partial\Omega_0$, лежащей ниже прямой ℓ. Предположим противное. Пусть t – такая точка Лебега функции φ, что $\varphi(t)$ лежит ниже ℓ. Рассмотрим точку

$$\langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}\setminus[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} = \frac{1}{1-2\varepsilon}\Big(x - 2\varepsilon\langle\varphi\rangle_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]}\Big). \tag{9.2}$$

Если число ε достаточно близко к нулю, то точка $\langle\varphi\rangle_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]}$ лежит рядом с точкой $\varphi(t)$. Стало быть, точка (9.2) лежит в малой окрестности точки x и выше прямой ℓ. В частности, она не лежит в области Ω, если число ε достаточно мало. Мы пришли к противоречию.

Теперь докажем, что функция φ не принимает значений на части границы $\partial\Omega_0$, лежащей выше прямой ℓ. Рассмотрим аффинную функцию L, равную нулю на прямой ℓ и отрицательную ниже ℓ. Тогда $L(x) = 0$. С другой стороны,

$$L(x) = \int_{\mathbb{T}} L\big(\varphi(t)\big)\,dt > 0,$$

если $L(\varphi) > 0$ на множестве ненулевой меры (так как мы уже доказали, что величина $L(\varphi)$ всегда неотрицательная). $\square$

В завершении докажем, что выпуклость области Ω_1 необходима для справедливости равенства (4.2) (отметим, что наши определения минимальной локально вогнутой функции $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ и функции Беллмана $\boldsymbol{B}_{\Omega,f}$ не требуют выпуклости области Ω_1).

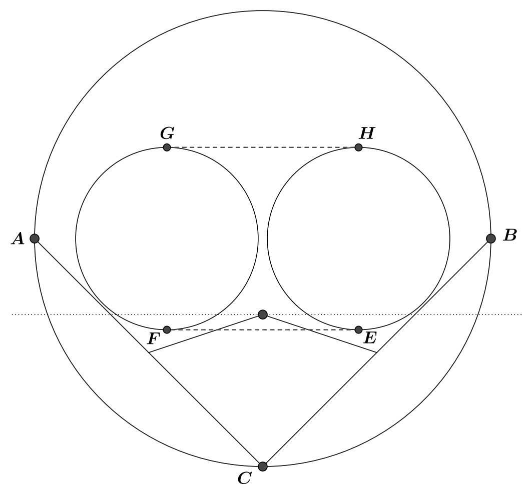

Рис. 10. Область Ω и множество беллмановских точек функции φ.

Мы вскоре построим такой пример области Ω и функции f, что справедливо строгое неравенство $\boldsymbol{B}_{\Omega,f} > \mathfrak{B}_{\Omega,f}$. В качестве множества Ω_0 выберем круг единичного радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим три точки

$$A = (-1, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (0, -1).$$

Определим функцию $\varphi\colon [0,1] \to \partial\Omega_0$ согласно правилу:

$$\varphi(t) = \begin{cases} A, & [t] \in [0, \frac{1}{3}); \\ C, & [t] \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}); \\ B, & [t] \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Факт 9.2. Множество беллмановских точек функции φ, т.е. точек $\langle\varphi\rangle_{J}$, равно

$$AC\cup BC\cup\{x=\alpha A+\beta B+\gamma C \mid \alpha+\beta+\gamma=1, \gamma\geqslant\alpha\geqslant 0, \gamma\geqslant\beta\geqslant 0\}. \quad (9.3)$$

Построим теперь область Ω_1 и функцию f. Определим область Ω_1 по правилу

$$\Omega_1=\Big\{x\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; \Big\|x-\Big(-\frac{1}{2},0\Big)\Big\|\leqslant\frac{1}{2.9}\Big\}\cup\Big\{x\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; \Big\|x-\Big(\frac{1}{2},0\Big)\Big\|\leqslant\frac{1}{2.9}\Big\}.$$

См. рис. 10 (численные параметры картинки слегка отличаются от приведённых выше, важен лишь следующий геометрический факт: хотя два “вырезанных” круга не пересекают множество (9.3), среднее функции φ лежит выше их общей нижней касательной).

Согласно факту 9.2, $\varphi\in\boldsymbol{A}(\Omega)$. Определим функцию $f\colon\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega\to\mathbb{R}$ формулой

$$f(y)=\begin{cases}0, & y_2\leqslant 0;\\ -y_2, & y_2>0.\end{cases} \quad (9.4)$$

Ясно, что $\langle f(\varphi)\rangle_{[0,1]}=0$, и поэтому $\boldsymbol{B}_f(0,-\frac{1}{3})\geqslant 0$.

Лемма 9.3. *Пусть функция f задана формулой* (9.4). *Тогда*

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(0,-\frac{1}{3})<0.$$

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{B}_{\Omega,f}(y)\leqslant f(y)$, если мы продолжим функцию f на область Ω той же формулой (9.4). Пусть E и F – точки на вырезанных кругах с наименьшими вторыми координатами. Иными словами, это точки касания кругов с их нижней общей касательной. Пусть, аналогично, G и H – точки кругов с наибольшими вторыми координатами.

Пусть L – аффинная функция, совпадающая с функцией f на отрезках EF и GH. Назовём часть области Ω, лежащую между отрезками EF и GH, каналом. Определим новую функцию Φ равной L в канале и равной f во всех остальных точках. Нетрудно видеть, что функция Φ локально вогнута. С другой стороны, справедливо неравенство $L<f$ в точках канала, и поэтому $\Phi(0,-\frac{1}{3})<0$. $\square$

Список литературы

1. В. И. Васюнин, *Точная константа в обратном неравенстве Гельдера для макенхауптовских весов.* — Алгебра и анализ **15** (2003), No. 1, 73—117.

2. В. И. Васюнин, *Взаимные оценки l^p-норм и функция Беллмана.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **355** (2008), 81–138.
3. А. Н. Ширяев, *Вероятность* 2, МЦНМО, 2021.
4. D. Azagra, *Global and fine approximation of convex functions.* — Proc. Lond. Math. Soc. (3), **107**, No. 4 (2013), 799–824.
5. D. Azagra, D. Stolyarov, *Inner and outer smooth approximation of convex hypersurfaces. When is it possible?*, `https://arxiv.org/abs/2204.07498`
6. H. Brezis, L. Nirenberg, *Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries.* — Selecta Math., **1** No. 2 (1995), 197–263.
7. E. Dobronravov, *On a minimal locally concave function on a ring*, in preparation.
8. B. Guan, *The Dirichlet problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature.* — Trans. Amer. Math. Soc., **350**, No. 12 (1998), 4955–4971.
9. T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis, *Analysis in Banach spaces.* Vol. I: *Martingales and Littlewood–Paley theory*, Springer, 2016.
10. P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Sharp estimates of integral functionals on classes of functions with small mean oscillation.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **350**, No. 11 (2012), 561–564.
11. P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *On Bellman function for extremal problems in* BMO. — C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **353**, No. 12, (2015), 1081–1085.
12. P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in* BMO. — Trans. Amer. Math. Soc., **368** (2016), 3415–3468.
13. P. Ivanishvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems on* BMO II: *evolution.* — Mem. Amer. Math. Soc., **255**, No. 1220 (2018).
14. F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation.* — Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 415–426.
15. B. Kirchheim, S. Müller, V. Šverák, *Studying nonlinear pde by geometry in matrix space.* — In: Geometric analysis and nonlinear partial differential equations, Springer, Berlin (2003), pp. 347–395.
16. A. Reznikov, *Sharp weak type estimates for weights in the class A_{p_1,p_2}.* — Rev. Mat. Iberoam., **29**, No. 2 (2013), 433–478.
17. R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
18. L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp results in the integral form John–Nirenberg inequality.* — Trans. Amer. Math. Soc., **363**, No. 8 (2011), 4135–4169.
19. L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp L^p estimates on* BMO. — Indiana Univ. Math. J., **61**, No. 3 (2012), 1051–1110.
20. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, 1993.
21. D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *Sharp multiplicative inequalities with BMO I.* — J. Math. Anal. Appl., **492**, No. 2 (2020), 124479, 17.
22. D. Stolyarov, P. Zatitskiy, *Sharp transference principle for BMO and A_p.* — J. Funct. Anal., **281**, No. 6, 109085.

23. D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy, *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals.* — Adv. Math., **291** (2016), 228–273.
24. V. Vasyunin, A. Volberg, *Sharp constants in the classical weak form of the John–Nirenberg inequality.* — Proc. Lond. Math. Soc., **108**, No. 6 (2014), 1417–1434.
25. V. Vasyunin, P. Zatitskiy, I. Zlotnikov, *Sharp multiplicative inequalities with BMO II.* — J. Math. Anal. Appl., **515**, No. 2, 126430, https://arxiv.org/abs/2111.05565
26. V. I. Vasyunin, *The sharp constant in the John–Nirenberg inequality*, PDMI preprints 20/2003, http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2003/03-20.html

Zatitskiy P. B., Stolyarov D. M. On locally concave functions on simplest nonconvex domain.

It is shown that certain Bellman functions of several variables are minimal locally concave functions. This generalizes earlier results about Bellman functions of two variables.

Ст.-Петербургский
Государственный Университет,
факультет Математики и Компьютерных Наук
E-mail: pavelz@pdmi.ras.ru
E-mail: d.m.stolyarov@spbu.ru

Поступило 24 июня 2022 г.