Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

Ю. С. Белов

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ ЛИННЕЛЯ

§1. Введение

Пусть g – функция из пространства $L^2(\mathbb{R})$. Для произвольных $\omega, t \in \mathbb{R}$ положим

$$\pi_{\omega,t}g(x) = e^{2\pi i\omega x}g(x-t).$$

Функцию $\pi_{\omega,t}g$ называют *частотно-временным сдвигом функции* g. Свойства систем частотно-временных сдвигов фиксированной функции g (систем Габора) интенсивно изучались последние 70 лет, см., например, [3]. Полнота, фреймы, разложение по системам Габора – классические темы анализа Габора, в которых получены сотни важных и интересных результатов. Тем не менее некоторые базовые вопросы остаются открытыми. Среди них гипотеза о линейной независимости Хейля–Раманатана–Топивалы (HRT-гипотеза, см. [4]):

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \pi_{\omega_k,t_k} g \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_k = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Несмотря на многолетние усилия многих математиков, HRT-гипотеза остается открытым вопросом. Истинность HRT-гипотезы установлена лишь для некоторых специальных случаев:

- Линнель в 1999-м году доказал, что если пары $\{(w_k, t_k)\}_{k=1}^N$ лежат на одной решетке $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, то HRT-гипотеза верна, см. [5];
- Бовник и Шпигль в 2013-м году доказали HRT-гипотезу при условии суперэкспоненциального убывания функции g, см. [1];
- в 2010-м году Деметер и Захареску доказали HRT-гипотезу для $N = 4$ и специальных $(2, 2)$ конфигураций, см. [2].

Так как любые три точки $\{(w_k, t_k)\}_{k=1}^3$ лежат на одной решетке, из теоремы Линнеля мы получаем, что для $N = 3$ HRT-гипотеза верна. Но уже для $N = 4$ полное решение неизвестно.

Ключевые слова: частотно-временной сдвиг, система Габора, HRT-гипотеза.

Работа поддержана грантом Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, выполненных под руководством ведущих ученых, соглашение 075-15-2021-602.

Теорема Линнеля – это глубокий результат, который доказывается при помощи теории алгебр фон Неймана. В настоящей статье мы дадим короткое и элементарное доказательство теоремы Линнеля для случая рациональной площади ячейки решетки Γ.

Теорема 1. *Если пары* $\{(w_k, t_k)\}_{k=1}^N$ *лежат на одной решетке* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *и ячейка решетки* Γ *имеет рациональную площадь, то для любой функции* $g \in L^2(\mathbb{R})$ *система частотно-временных сдвигов* $\pi_{\omega_k, t_k} g$ *линейно независима.*

Отметим, что наше доказательство работает и при более слабом условии на функцию g:

$$\lim_{|n|\to\infty, n\in\mathbb{Z}} |g(x+n)| = 0 \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}.$$

Также мы получим аналог HRT-гипотезы для бесконечного числа точек решетки, лежащих в полосе, см. следствие 1.

§2. Доказательство теоремы 1

Положим

$$\mathcal{N}_a g(x) = e^{\pi i a x^2} g(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Оператор $\mathcal{N}_a$ унитарен и

$$\begin{aligned}\pi_{\omega,t}(\mathcal{N}_a f) &= e^{\pi i a(x-t)^2} e^{2\pi i \omega x} f(x-t) \\ &= e^{\pi i a t^2} e^{\pi i a x^2} e^{2\pi i x(\omega - at)} f(x-t) = e^{\pi i a t^2} \mathcal{N}_a(\pi_{\omega - at, t} f).\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{F} f$ преобразование Фурье функции f,

$$\mathcal{F} f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx.$$

Мы получаем, что унитарный оператор $\mathcal{N}^\diamond$, $\mathcal{N}^\diamond f := \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{N}_a \mathcal{F} f)$, удовлетворяет соотношению

$$\pi_{\omega,t}(\mathcal{N}^\diamond f) = e^{\pi i a \omega^2} \mathcal{N}^\diamond(\pi_{\omega, t + a\omega} f).$$

Так как любую 2×2 матрицу можно привести к диагональному виду умножениями на матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

мы можем считать, что Γ – прямоугольная решетка.

Используя линейную замену переменной, $f(t) \mapsto f(at)$, мы можем привести решетку Γ к виду $\frac{p}{q}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Предположим, что система $\{\pi_{\omega_k,t_k} g\}_{k=1}^N$, $(w_k, t_k) \in \Gamma$, линейно зависима. Тогда

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} a_{k,l} e^{2\pi i \alpha_{k,l} x} g(x-k), \tag{1}$$

для некоторых рациональных $\alpha_{k,l}$. Для каждого $\beta \in [0,1)$ и натурального m сформируем вектор-столбец $h_\beta(m)$,

$$h_\beta(m) = (g(m+N-1+\beta), ..., g(m+1+\beta), g(m+\beta))^T \in \mathbb{R}^N.$$

Так как $g \not\equiv 0$, мы получаем, что $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \|h_\beta(m)\|_2^2 > 0$ для $\beta \in E$, где E некоторое множество положительной меры. Запишем соотношение (1) в матричном виде

$$h_\beta(m+1) = A_{\beta,m} h_\beta(m), \tag{2}$$

где $A_{\beta,m}$ – соответствующая матрица Фробениуса.

$$A_{\beta,m} = \begin{pmatrix} \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что последовательность матриц $A_{\beta,m}$ периодична, т.е. существует такое число M, что $A_{\beta,m} = A_{\beta,m+M}$, $M \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} h_{\beta,m+kM} &= A_{\beta,m+kM-1} A_{\beta,m+kM-2} \ldots A_{\beta,m} h_{\beta,m+(k-1)M} \\ &= B_{\beta,m} h_{\beta,m+(k-1)M}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где матрица $B_{\beta,m}$ не зависит от k.

Лемма 1. *Пусть A невырожденная $N \times N$ матрица, а последовательность векторов $h(m)$ такова, что*

$$h(m+1) = Ah(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда либо $h(m) \equiv 0$, либо последовательность $\|h(m)\|_2$ не стремится к 0 при $|m| \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим рекуррентное соотношение на собственных подпространствах матрицы A. □

Нам осталось выбрать $\beta \in E$ и натуральное число m такое, что $h_\beta(m) \neq 0$, и воспользоваться леммой 1. $\square$

Следствие 1. *Предположим, что точки (w_k, t_k), $k \in \mathbb{Z}$, лежат в полосе $[0,a]\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ и в прямоугольной решетке Γ такой, что площадь ее единичной ячейки рациональна. Пусть для некоторой невырожденной последовательности $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ справедливо равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i w_k x} g(x - t_k) = 0, \quad g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Тогда $g = 0$.

Доказательство. Действуя так же, как при доказательстве теоремы 1, мы получаем уравнение вида

$$\psi(x)g(x) = \sum_{k=1}^{N} \psi_k(x) g(x-k),$$

где функции $\psi(x), \psi_k(x)$ не обращаются в ноль для п.в. x и периодичны с общим периодом $M \in \mathbb{Z}$. Напишем рекуррентное соотношение, аналогичное соотношению (2), и при помощи леммы 1 получим противоречие. $\square$

Список литературы

1. M. Bownik, D. Speegle, *Linear independence of time-frequency translates of functions with faster than exponential decay.* — Bull. Lond. Math. Soc. **45**, No. 3 (2013), 554–566.
2. C. Demeter, A. Zaharescu, *Proof of the HRT conjecture for* $(2,2)$ *configurations.* — J. Math. Anal. Appl. **388**, No. 1 (2012), 151–159.
3. K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001;
4. C. Heil, J. Ramanathan, P. Topiwala, *Linear independence of time-frequency translates.* — Proc. Amer. Math. Soc. **124**, No. 9 (1996), 2787—2795.
5. P. A. Linnell, *von Neumann algebras and linear independence of translates.* — Proc. Amer. Math. Soc., **127**, No. 11 (1999), 3269–3277.

Belov Yu. S. A remark to the Linnell theorems.

A short proof of Linnell's theorem is given for the case where the cell of the lattice has rational area.

Ст.-Петербургский
Государственный Университет,
факультет Математики и Компьютерных Наук,
14-ая линия Васильевского острова, дом 29,
Санкт-Петербург 199178, Россия
E-mail: j_b_juri_belov@mail.ru

Поступило 14 июля 2022 г.