Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

А. Д. Баранов

ДОПОЛНЕНИЕ МНОЖЕСТВ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ В МОДЕЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

§1. Введение

Систему векторов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H называют *полной*, если $\overline{\mathrm{Span}}\,\{x_n\} = H$, и *минимальной*, если $x_{n_0} \notin \overline{\mathrm{Span}}\,\{x_n\}_{n\neq n_0}$ для каждого $n_0 \in \mathbb{N}$. Таким образом, полная система минимальна, если она перестает быть полной после удаления любого из ее элементов. У полной минимальной системы существует единственная *биортогональная система* $\{\widetilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условиям $(x_m, \widetilde{x}_n) = \delta_{mn}$.

Пусть теперь $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, элементы которого – функции, аналитические в некоторой области Ω. Для $\lambda \in \Omega$ обозначим через k_λ *воспроизводящее ядро* в точке λ, то есть элемент пространства $\mathcal{H}$ такой, что $f(\lambda) = (f, k_\lambda)$ при всех $f \in \mathcal{H}$. Хорошо известно, что геометрические свойства систем воспроизводящих ядер тесно связаны с функционально-теоретическими свойствами элементов пространства $\mathcal{H}$. В частности, система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ полна в $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда Λ – *множество единственности* для $\mathcal{H}$, то есть из условий $f \in \mathcal{H}$, $f|_\Lambda = 0$ вытекает, что $f \equiv 0$. Аналогично, система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ полна и минимальна в том и только в том случае, когда Λ – *минимальное множество единственности* для $\mathcal{H}$, перестающее быть множеством единственности после удаления любой из точек. В этом случае для любого $\lambda \in \Lambda$ найдется ненулевая функция $f \in \mathcal{H}$ такая, что $f|_{\Lambda\setminus\{\lambda\}} = 0$. Если $\mathcal{H}$ к тому же обладает *свойством деления*:

$$f \in \mathcal{H}, \quad f(\lambda) = 0 \implies \frac{f(z)}{z-\lambda} \in \mathcal{H},$$

Ключевые слова: пространство Харди, внутренняя функция, модельное подпространство, воспроизводящие ядра, полная минимальная система.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2021-602.

то существует так называемая порождающая функция G, имеющая простые нули в точности в множестве Λ и такая, что система $\frac{G(z)}{G'(\lambda)(z-\lambda)}$ биортогональна к системе $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Отметим также, что в любом пространстве с воспроизводящим ядром и свойством деления любая неполная система воспроизводящих ядер будет минимальной.

Возникает следующий естественный вопрос.

Вопрос. *Пусть дано гильбертово пространство $\mathcal{H}$ аналитических функций в Ω с воспроизводящим ядром и свойством деления. Верно ли, что любая неполная система воспроизводящих ядер в $\mathcal{H}$ может быть расширена до полной и минимальной системы воспроизводящих ядер, то есть если система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ неполна, то найдется множество $\widetilde{\Lambda}\subset\Omega$ такое, что система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}$ полна и минимальна в $\mathcal{H}$?*

Иными словами, верно ли, что любое множество неединственности для $\mathcal{H}$ будет частью некоторого минимального множества единственности?

Для многих классических пространств аналитических функций (пространства Харди, Бергмана, ...) ответ будет отрицательным по тривиальной причине: в них нет полных и минимальных систем воспроизводящих ядер. Например, в пространстве Харди минимальность равносильна тому, что Λ – последовательность Бляшке, откуда система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ неполна.

В отличие от пространств функций в круге, многие гильбертовы пространства целых функций имеют богатый запас полных и минимальных систем воспроизводящих ядер (иногда даже безусловных базисов из воспроизводящих ядер). Напомним, что пространство Пэли–Винера PW_a, $a>0$, состоит из целых функций экспоненциального типа не выше a, сужения которых на $\mathbb{R}$ лежат в $L^2(\mathbb{R})$. Пространство PW_a представляет собой Фурье-образ пространства $L^2(-a,a)$. Воспроизводящее ядро пространства PW_a имеет вид $\frac{\sin a(z-\bar\lambda)}{\pi(z-\bar\lambda)}$ (кардинальный синус) – Фурье-образ комплексной экспоненты из $L^2(-a,a)$.

В 2015 г. Ю. С. Белов [4] доказал следующую теорему:

Теорема A. *Любая неполная система воспроизводящих ядер пространства PW_a может быть расширена до полной и минимальной системы воспроизводящих ядер.*

Эквивалентное утверждение состоит в том, что любая неполная в $L^2(-a,a)$ система экспонент $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, где $\Lambda\subset\mathbb{C}$ и $e_\lambda(t)=e^{i\lambda t}$, может быть дополнена до полной и минимальной системы воспроизводящих ядер. Это дает положительный ответ на вопрос А. Накамуры [8]. Следует отметить, что К. Сейпом [12] были построены экспоненциальные последовательности Рисса (то есть базисы Рисса в своей замкнутой линейной оболочке), которые не могут быть дополнены до базисов Рисса из экспонент во всем пространстве $L^2(-a,a)$.

Как показано в статье [4], утверждение остается справедливым для широкого класса гильбертовых пространств целых функций, а именно, для пространств де Бранжа [6]. Более того, даже доказательство для классических пространств Пэли–Винера существенно использует теорию де Бранжа. Ключевая идея состоит в том, чтобы зафиксировать некоторое специальное каноническое произведение G с множеством нулей Λ и рассмотреть множество

$$\mathcal{H}_\Lambda=\{f \text{ – целая}: \ fG\in PW_a\}$$

с нормой $\|f\|=\|fG\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Применяя аксиоматическое описание пространств де Бранжа (принадлежащее Л. де Бранжу, [6, Theorem 23]), можно показать, что $\mathcal{H}_\Lambda$ само является пространством де Бранжа, после чего в качестве дополняющего множества можно взять минимальное множество единственности для $\mathcal{H}_\Lambda$. Эта идея оказалась полезной при исследовании других задач, например, в недавнем решении задачи спектрального синтеза для инвариантных подпространств оператора дифференцирования в $C^\infty(a,b)$ [3].

Для многих пространств целых функций вопрос остается открытым. Неизвестно, может ли любая неполная система воспроизводящих ядер в пространстве Баргманна–Фока целых функций, квадратично суммируемых на плоскости с гауссовским весом $e^{-\pi|z|^2}$, быть дополнена до полной и минимальной системы воспроизводящих ядер (в этом случае это просто экспоненты $e^{\pi\bar\lambda z}$). Следует отметить, что полные и минимальные системы воспроизводящих ядер в пространстве Баргманна–Фока могут обладать сложной структурой; как было недавно показано, верхняя плотность множества Λ (относительно меры Лебега на плоскости) для полной и минимальной системы $\{e^{\pi\bar\lambda z}\}_{\lambda\in\Lambda}$ может принимать значения от π^{-1} до e [5].

Вопрос остается открытым и для более общих пространств типа Фока, а также для недавно введенного класса пространств Коши–де

Бранжа, определяемых через преобразования Коши дискретных мер на плоскости и обобщающих пространства де Бранжа (см. статьи [1,2]).

§2. Основной результат

Цель настоящей заметки – обобщить принадлежащую Ю. С. Белову теорему A на более широкий класс пространств аналитических функций. Хотя для пространств Харди (в круге или в полуплоскости) ответ на вопрос отрицателен, он оказывается положительным для важного класса их подпространств: инвариантных подпространств оператора обратного сдвига или модельных (под)пространств. Согласно знаменитой теореме А. Берлинга, любое нетривиальное подпространство X пространства Харди H^2 в круге $\mathbb{D}$, инвариантное относительно сдвига, имеет вид θH^2 для некоторой внутренней функции θ. Соответствующее модельное (под)пространство определяют как $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Модельные пространства играют исключительно важную роль в теории операторов и теории функций и служат основой для функциональной модели Надя–Фойаша операторов сжатия. Подробное изложение их теории можно найти в монографиях [9, 10].

Воспроизводящее ядро пространства K_θ имеет вид

$$k_\lambda^\theta(z) = \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1 - \bar{\lambda} z}.$$

Теорема. *Пусть $\{k_\lambda^\theta\}_{\lambda\in\Lambda}$ – неполная система воспроизводящих ядер в пространстве K_θ. Тогда найдется множество $\widetilde{\Lambda} \subset \mathbb{D}$ такое, что система $\{k_\lambda^\theta\}_{\lambda\in\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}$ полна и минимальна в K_θ.*

Иными словами, любое множество неединственности для K_θ может быть дополнено до минимального множества единственности.

Доказательство теоремы основано на описании почти инвариантных подпространств пространства H^2, принадлежащем Д. Хитту и Д. Сарасону. Этот результат играет ту же роль, что и применение аксиоматического описания пространств де Бранжа в [4].

Утверждение справедливо (с тем же доказательством) и для модельных пространств $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ в верхней полуплоскости. Заметим, что любое пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ (где E – целая функция класса Эрмита–Билера, см. [6]) канонически изоморфно подпространству K_Θ с внутренней функцией $\Theta(z) = \overline{E(\bar{z})}/E(z)$, мероморфной в

$\mathbb{C}$. Более того, этот изоморфизм отображает воспроизводящие ядра в воспроизводящие ядра. В частности, пространству PW_a отвечает модельное пространство с $\Theta(z) = e^{2iaz}$. Таким образом, утверждение для пространств де Бранжа содержится в теореме, сформулированной выше.

§3. Инвариантные и почти инвариантные подпространства

В этом разделе мы напомним некоторые свойства инвариантных подпространств оператора обратного сдвига и почти инвариантных подпространств. Обозначим через

$$(Sf)(z) = zf(z), \qquad (S^*f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

операторы сдвига и обратного сдвига в H^2. Подпространства, инвариантные относительно сдвига и обратного сдвига, представимы, соответственно, как θH^2 и $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$, где θ – некоторая внутренняя функция.

В дальнейшем нам понадобятся два простых и хорошо известных свойства модельных пространств K_θ. Для полноты изложения приведем их доказательства.

Свойство 1. *K_θ инвариантно относительно деления на внутренние сомножители: если $vf \in K_\theta$ для $f \in H^2$ и внутренней функции v, то $f \in K_\theta$. Также K_θ обладает свойством деления: если $f \in K_\theta$ и $f(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{D}$, то $\frac{f(z)}{z-\lambda} \in K_\theta$.*

Доказательство. Для любой функции $g \in H^2$ имеем

$$(f, \theta g) = (vf, v\theta g) = 0$$

и

$$\Big(\frac{f}{z-\lambda}, \theta g\Big) = \Big(f, \frac{z}{1-\bar\lambda z}\theta g\Big) = 0. \qquad \square$$

Свойство 2. *В любом пространстве K_θ существуют полные и минимальные системы воспроизводящих ядер.*

Доказательство. Утверждение тривиально, если $\theta = B$ – произведение Бляшке с простыми нулями в множестве Λ. В этом случае Λ – множество единственности для K_B и $\frac{B(z)}{z-\lambda} \in K_B$, $\lambda \in \Lambda$. В общем случае рассмотрим семейство сдвигов по Фростману $\theta_\alpha = \frac{\theta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\theta}$, $|\alpha|<1$. Классическая теорема Фростмана утверждает, что для всякой внутренней функции θ ее сдвиги θ_α будут произведениями Бляшке для всех $\alpha \in \mathbb{D}$ за исключением множества нулевой логарифмической емкости. Тогда очевидно, что найдется число α такое, что θ_α – произведение Бляшке с простыми нулями, и, значит, множество Λ нулей функции θ_α будет минимальным множеством единственности для K_{θ_α}. Покажем, что Λ – минимальное множество единственности и для K_θ. Хорошо известное преобразование

$$J : f \mapsto (1-|\alpha|^2)^{1/2}\frac{f}{1-\overline{\alpha}\theta}$$

унитарно отображает K_θ на модельное пространство K_{θ_α}. Таким образом, если $f \in K_\theta$ и $f|_\Lambda = 0$, то $Jf \equiv 0$. В то же время для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется ненулевая функция $g \in K_{\theta_\alpha}$, обращающаяся в нуль на $\Lambda \setminus \{\lambda\}$. То же самое справедливо и для $f = J^{-1}g$, и, значит, Λ – минимальное множество единственности для K_θ. $\square$

В конце 1980-х годов Д. Хитт и Д. Сарасон построили теорию почти инвариантных подпространств. Замкнутое подпространство $X \subset H^2$ называют *почти инвариантным*, если для каждой функции $f \in X$ такой, что $f(0)=0$, выполнено включение $S^*f = \frac{f(z)}{z} \in X$. Структура почти инвариантных подпространств была описана Д. Хиттом [7] и Д. Сарасоном [11].

Теорема B (Хитт, Сарасон, [7,11])**.** *Любое почти инвариантное подпространство X имеет вид $X = GK_\theta$, где θ – внутренняя функция, $G \in H^2$, $\|G\| = 1$ и отображение $M_G : f \mapsto Gf$ – изометрия K_θ на X.*

Отметим, что, в отличие от описания Берлинга, параметры G и θ в теореме B не свободны, и их явное описание представляется недостижимым.

§4. Доказательство основной теоремы

Предположим, что Λ – множество неединственности для K_θ. Пусть B – произведение Бляшке с нулями в Λ. Рассмотрим множество

$$X = \{f \in H^2 : fB \in K_\theta\}.$$

Поскольку само K_θ почти инвариантно, X, очевидно, будет почти инвариантным подпространством в H^2. По теореме В имеем $X = GK_u$ для некоторой внутренней функции u и некоторой функции $G \in H^2$.

Покажем, что функция G внешняя. В самом деле, предположим, что G имеет внутренний множитель v, и, значит, любая функция $f \in X$ имеет вид $v\widetilde{f}$, $\widetilde{f} \in H^2$. Мы заключаем, что $v\widetilde{f}B \in K_\theta$. Поскольку, по свойству 1, мы можем делить в K_θ на внутренние функции, имеем $\widetilde{f}B \in K_\theta$, откуда $\widetilde{f} \in X$. Таким образом, функции в X не имеют общего внутреннего множителя.

Пусть теперь $\widetilde{\Lambda}$ – минимальное множество единственности для модельного пространства K_u (оно существует по свойству 2). Не умаляя общности, мы можем считать, что $\Lambda \cap \widetilde{\Lambda} = \emptyset$. Покажем, что $\Lambda \cup \widetilde{\Lambda}$ – множество единственности для K_θ. Предположим, что функция $f \in K_\theta$ обращается в нуль на $\Lambda \cup \widetilde{\Lambda}$. Тогда $f = Bg$ и $g \in X$. Следовательно, $g = Gh$, где $h \in K_u$. Поскольку g обращается в нуль на $\widetilde{\Lambda}$ и $G \neq 0$ в $\mathbb{D}$, мы видим, что $h|_{\widetilde{\Lambda}} = 0$, откуда $h \equiv 0$.

Зафиксируем некоторое $\mu \in \widetilde{\Lambda}$. Тогда найдется ненулевая функция $h \in K_u$, которая обращается в нуль на $\widetilde{\Lambda} \setminus \{\mu\}$. Следовательно, $f = BGh$ – ненулевая функция из K_θ, которая обращается в нуль на $(\Lambda \cup \widetilde{\Lambda}) \setminus \{\mu\}$. Тогда $\frac{z-\mu}{z-\lambda} f$ принадлежит K_θ и обращается в нуль на $(\Lambda \cup \widetilde{\Lambda}) \setminus \{\lambda\}$ для всякого $\lambda \in \Lambda \cup \widetilde{\Lambda}$. Мы заключаем, что $\Lambda \cup \widetilde{\Lambda}$ – минимальное множество единственности для K_θ. Теорема доказана.

Список литературы

1. E. Abakumov, A. Baranov, Yu. Belov, *Krein-type theorems and ordered structure for Cauchy–de Branges spaces.* — J. Funct. Anal. **277**, No. 1 (2019), 200–226.
2. A. D. Baranov, *Spectral theory of rank one perturbations of normal compact operators.* — Алгебра и анализ **30**, No. 5 (2018), 1–56; St. Petersburg Math. J. **30**, No. 5 (2019), 761–802.
3. A. Baranov, Yu. Belov, *Synthesizable differentiation-invariant subspaces.* — Geom. Funct. Anal. **29**, No. 1 (2019), 44–71.
4. Yu. Belov, *Complementability of exponential systems*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **353** (2015), 215–218.
5. Yu. Belov, A. Borichev, A. Kuznetsov, *Upper and lower densities of Gabor Gaussian systems.* — Appl. Comput. Harm. Anal. **49**, No. 2 (2020), 438–450.
6. L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions,* Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1968.
7. D. Hitt, *Invariant subspaces of H^2 of an annulus.* — Pacific J. Math. **134** (1988), 101–120.

8. A. Nakamura, *Basis properties and complements of complex exponential systems.* — Hokkaido Math. J. **36**, No. 1 (2007), 193–206.
9. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, М., Наука, 1980.
10. N. K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems: an Easy Reading*, Math. Surveys Monogr., Vols. 92, 93, AMS, Providence, RI, 2002.
11. D. Sarason, *Nearly invariant subspaces of the backward shift.* — Oper. Theory: Adv. Appl. **35** (1988), 481–493.
12. K. Seip, *On the connection between exponential bases and certain related sequence in* $L^2[-\pi,\pi]$. — J. Funct. Anal. **130** (1995), 131–160.

Baranov A. D. Complementing nonuniqueness sets in model spaces.

It is shown that any incomplete system of reproducing kernels in a model subspace $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$ of the Hardy space H^2 can be complemented to a complete and minimal system of reproducing kernels.

Thus, any nonuniqueness set for K_θ can be complemented to a minimal uniqueness set.

С.-Петербургский
Государственный Университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: anton.d.baranov@gmail.com

Поступило 29 августа 2022 г.