Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

А. Р. Алиев, Э. Х. Эйвазов

ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

§1. Введение

Пусть A и B – пара самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H такая, что их разность $V = B - A$ ядерна. Функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ М. Г. Крейна для ядерного возмущения V (класс ядерных операторов стандартно обозначаем символом σ_1) определяется формулой (см. [4, 7, 8])

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{0<\varepsilon\to 0} \arg\det\left(E + V\left(A - (\lambda + i\varepsilon) E\right)^{-1}\right),$$

при п.в. $\lambda \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$, где E – единичный оператор, а ветвь аргумента определителя возмущения фиксируется условием

$$\arg\det\left(E + V(A - zE)^{-1}\right) \to 0, \quad \operatorname{Im} z \to +\infty.$$

Функция спектрального сдвига возникает в теории ядерных возмущений в связи с интегральным представлением для следа разности функций от операторов A и B (см. [1, 3, 14, 15]).

Функция спектрального сдвига и матрица рассеяния – объекты спектральной теории возмущений. Они возникли в квантовой теории твердого тела. На непрерывном спектре функция спектрального сдвига связана с матрицей рассеяния. Однако в отличие от нее понятие функции спектрального сдвига содержательно как на непрерывном, так и на дискретном спектрах.

Функция спектрального сдвига впервые введена в работе И. М. Лифшица [9] при вычислении изменения свободной энергии кристаллической решетки за счет появления дефекта в одном узле (возмущение ранга 1). Основы математической теории функции спектрального

Ключевые слова: спектральная теория возмущений, функция спектрального сдвига, матрица рассеяния, оператор ранга 1.

сдвига были заложены М. Г. Крейном [7, 8, 15]. В дальнейшем эта тематика интенсивно разрабатывалась и расширялась в работах [1, 3, 5, 10, 11, 14, 18, 19].

Отметим, что в работе [16] приведен другой вывод формулы следов М. Г. Крейна для пары самосопряженных, максимальных диссипативных, а также других типов резольвентно сравнимых операторов.

В работе [4] (см. также [5, 17, 19]) обнаружено, что функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ и основной объект математической теории рассеяния – матрица рассеяния $S(\lambda)$ – связаны формулой Бирмана–Крейна

$$\det S(\lambda) = e^{-2\pi i \xi(\lambda)}.$$

Эта связь позволяет интерпретировать функцию спектрального сдвига как фазу рассеяния и стимулирует интерес к ней в квантовомеханических задачах.

Пусть A – спектрально абсолютно непрерывный самосопряженный оператор в пространстве H с областью определения $D(A)$ и $E(\Omega)$ – его спектральный проектор, где Ω – борелевское множество в $\mathbb{R}$. При условиях $c \in \mathbb{R}$, $f \in H$ и $\|f\| = 1$ вводим возмущенный оператор

$$B = A + c(\,\cdot\,, f)\, f,$$

где $\|\cdot\|$ – норма, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение в H.

Положим

$$\rho(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(E(\lambda) f, f\right), \qquad E(\lambda) = E\left((-\infty, \lambda]\right).$$

Определение 1.1 (см. [13]). Если функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет условиям

а) $|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant L(x,y)\, |x-y|^{\alpha}$,
где $\alpha \in (0,1)$ и $L(x,y)$ – ограниченная функция, и

б) в окрестности каждой точки λ, где выполняются равенства

$$\rho(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad 1 + c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x)}{x-\lambda}\, dx = 0,$$

функция $L(x,y)$ удовлетворяет условию

$$L(x,y) \leqslant l_0\left(|x-\lambda| + |y-\lambda|\right),$$

где l_0 – положительное число, то оператор V, задаваемый равенством

$$V = c(\cdot, f)\, f, \quad c \in \mathbb{R},\ \|f\| = 1,$$

называется A-гладким по Гёльдеру с показателем α.

В работе [13, стр. 393, Пример] показано, что из обычной непрерывности в смысле Гёльдера функции $\rho(\lambda)$ не следует, что точки разрыва первого рода функции $\xi(\lambda)$ будут собственными значениями возмущенного оператора. Там же отмечено, что для того, чтобы точки разрывов первого рода функции спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ были собственными значениями возмущенного оператора, наверняка в этих точках на функцию $\rho(\lambda)$ надо наложить более жесткое ограничение, чем непрерывность в смысле Гёльдера.

Цель этой работы – показать, что даже из A-гладкости по Гёльдеру оператора $V = c(\cdot, f)\, f$ в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, где функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ терпит разрыв первого рода, не следует, что эта точка будет собственным значением возмущенного оператора.

§2. Операторы L_s и L_c

Пусть H реализовано в виде пространства $L_2(0, +\infty)$ измеримых функций $f(x)$, имеющих суммируемый квадрат. Введем следующие операторы, действующие в пространстве $L_2(0, +\infty)$:

$$\begin{cases} L_s u(x) = -u''(x), \\ D(L_s) \\ = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \in L_2(0,+\infty) : u'(x) \text{ – абсолютно непрерывная функция,} \\ u''(x) \in L_2(0,+\infty),\ u(0) = 0 \end{array} \right\} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} L_c u(x) = -u''(x), \\ D(L_c) \\ = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \in L_2(0,+\infty) : u'(x) \text{ – абсолютно непрерывная функция,} \\ u''(x) \in L_2(0,+\infty),\ u'(0) = 0 \end{array} \right\}. \end{cases}$$

Теорема 2.1. *Пусть L_s и L_c – определенные выше операторы. Тогда*

(i) *L_s и L_c – положительные самосопряженные операторы;*

(ii) *оба оператора спектрально абсолютно непрерывны, т.е.*

$$\sigma(L_s) = \sigma(L_c) = \sigma_{ac}(L_s) = \sigma_{ac}(L_c) = [0,\ +\infty),$$

где $\sigma(T)$ – спектр оператора T;

(iii) *для $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0$ ($\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел), ядра $G_s(x,t,\lambda)$ и $G_c(x,t,\lambda)$ операторов $R_\lambda(L_s) = (L_s - \lambda E)^{-1}$ и*

$R_\lambda (L_c) = (L_c - \lambda E)^{-1}$ *имеют, соответственно, следующий вид*:

$$G_s(x,t,\lambda) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}t}, & x \leqslant t, \\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}x}, & t \leqslant x \end{cases} \tag{2.1}$$

и

$$G_c(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{i\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}t}, & x \leqslant t, \\ -\frac{\cos\sqrt{\lambda}t}{i\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}x}, & t \leqslant x; \end{cases} \tag{2.2}$$

(iv) *для* $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0$ *справедливо равенство*

$$G_c(x,t,\lambda) = G_s(x,t,\lambda) - \frac{1}{i\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}t} e^{i\sqrt{\lambda}x}.$$

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) хорошо известны в литературе (см., например, [2,12]). Для доказательства утверждения (iii) достаточно доказать формулу (2.1), поскольку формула (2.2) доказывается подобным же образом.

Итак, пусть $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0$ и $f(x)$ – произвольная функция из пространства $L_2(0,+\infty)$. Положим

$$C_1(x,\lambda,f) = C_1(0,\lambda,f) - \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_0^x e^{-i\sqrt{\lambda}t} f(t)\, dt \tag{2.3}$$

и

$$C_2(x,\lambda,f) = -\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_x^{+\infty} e^{i\sqrt{\lambda}t} f(t)\, dt, \tag{2.4}$$

где

$$C_1(0,\lambda,f) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{i\sqrt{\lambda}t} f(t)\, dt. \tag{2.5}$$

Из метода вариации произвольных постоянных следует, что если коэффициенты $C_1(x,\lambda,f)$ и $C_2(x,\lambda,f)$ определить формулами (2.3)–(2.5), то функция

$$u(x,\lambda) = C_1(x,\lambda,f)\, e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2(x,\lambda,f)\, e^{-i\sqrt{\lambda}x} \tag{2.6}$$

принадлежит области определения оператора L_s и является решением операторного уравнения

$$L_s u - \lambda E u = f. \tag{2.7}$$

Учитывая соотношения (2.3)–(2.5), из (2.6) и (2.7) получим

$$R_\lambda(L_s)f = \left[\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{+\infty} e^{i\sqrt{\lambda}t}f(t)\,dt - \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{x} e^{-i\sqrt{\lambda}t}f(t)\,dt\right]e^{i\sqrt{\lambda}x}$$
$$+\left(-\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\int\limits_x^{+\infty} e^{i\sqrt{\lambda}t}f(t)\,dt\right)e^{-i\sqrt{\lambda}x} = \int\limits_0^{x}\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}x}f(t)\,dt$$
$$+\int\limits_x^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}t}f(t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} G_s(x,t,\lambda)f(t)\,dt,$$

где функция $G_s(x,t,\lambda)$ определяется формулой (2.1).

Для доказательства утверждения (iv) преобразуем формулу (2.2):

$$G_c\,(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{i\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}t}, & x \leqslant t, \\ -\frac{\cos\sqrt{\lambda}t}{i\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}x}, & t \leqslant x \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\frac{e^{i\sqrt{\lambda}x}+e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2i\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}t}, & x \leqslant t, \\ -\frac{e^{i\sqrt{\lambda}t}+e^{-i\sqrt{\lambda}t}}{2i\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}x}, & t \leqslant x \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x}-e^{-i\sqrt{\lambda}x}-2e^{i\sqrt{\lambda}x}}{2i\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}t}, & x \leqslant t, \\ \frac{e^{i\sqrt{\lambda}t}-e^{-i\sqrt{\lambda}t}-2e^{i\sqrt{\lambda}t}}{2i\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}x}, & t \leqslant x \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}t} - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x}\cdot e^{i\sqrt{\lambda}t}}{i\sqrt{\lambda}}, & x \leqslant t, \\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}x} - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x}\cdot e^{i\sqrt{\lambda}t}}{i\sqrt{\lambda}}, & t \leqslant x \end{cases} = G_s\,(x,t,\lambda) - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x}\cdot e^{i\sqrt{\lambda}t}}{i\sqrt{\lambda}}.$$

Тем самым, доказано утверждение (iv) теоремы. □

Отметим, что утверждение (iv) обобщает соответствующее утверждение М. Г. Крейна из [7, Раздел 6], где оно доказано для случая $\lambda = -1$.

Обозначим через H_s и H_c, соответственно, значения операторнозначных функций $R_\lambda\,(L_s)$ и $R_\lambda\,(L_c)$ в точке $\lambda = -1$. Сформулируем теорему, принадлежащую М. Г. Крейну [7], которая следует немедленно из теоремы 2.1 и описывает свойства операторов H_s и H_c.

Теорема 2.2. (i) *H_s и H_c – ограниченные самосопряженные операторы в $L_2\,(0,+\infty)$.*

(ii) *Оба оператора спектрально абсолютно непрерывны, т.е.*

$$\sigma(H_s) = \sigma(H_c) = \sigma_{ac}(H_s) = \sigma_{ac}(H_c) = [0,1]\,.$$

(iii) $H_c = H_s + \frac{1}{2}(\cdot,\psi)\psi$, *где* $\psi = \sqrt{2}e^{-x}$ *– нормированный вектор в пространстве* $L_2(0,+\infty)$.

§3. Функция спектрального сдвига М. Г. Крейна для пары самосопряженных операторов H_s и H_c

Теорема М. Г. Крейна (см. [7,8]) позволяет выразить функцию спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ через граничные значения определителя оператора $E + V(H_s - (\lambda + i\varepsilon)E)^{-1}$:

$$\begin{aligned}\xi(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\arg\det\left(E + V(H_s - (\lambda+i\varepsilon)E)^{-1}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\arg\left(1 + \frac{1}{2}\left(R^{(s)}(\lambda+i\varepsilon)\psi,\ \psi\right)\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\arg\left(1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d\left(E_x^{(s)}\psi,\ \psi\right)}{x-\lambda-i\varepsilon}\right),\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $V = \frac{1}{2}(\cdot,\psi)\psi$, $E_x^{(s)}$ – спектральная функция, а $R^{(s)}(z)$ – резольвента самосопряженного оператора H_s.

Следующая лемма полезна для исследования свойств функции $\xi(\lambda)$.

Лемма 3.1. *Пусть* α *–произвольное число из множества* $\mathrm{M} = \mathbb{C}\backslash(0,1)$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{dx}{x-\alpha} = \pi\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1\right). \tag{3.2}$$

Доказательство. Функция $\varphi(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ является двузначной в области $\Omega = \mathbb{C}\backslash[0,1]$ и имеет две точки ветвления второго порядка: $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$. Точка $\alpha = \infty$ не является особой точкой. Функция $\varphi(\alpha)$ распадается в области Ω на две регулярные ветви. Мы выбираем ту ветвь, для которой $\varphi(\infty) = 1$.

В работе [6, стр. 304, формула 3.228(1)] доказано, что формула (3.2) справедлива при $\alpha \in (-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. Тогда из принципа аналитического продолжения следует, что она верна и в области Ω.

Справедливость формулы (3.2) для $\alpha = 1$ является следствием того факта, что $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \pi$, где $B\,(l; m)$ – бета-функция Эйлера.

Принимая во внимание, что при $\alpha = 0$ обе стороны формулы (3.2) равны $+\infty$, она остается в силе и при $\alpha = 0$. □

Теорема 3.1. *Пусть* $\rho\,(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(E_\lambda^{(s)}\psi, \psi\right)$ *и* $\xi\,(\lambda)$ *– функция спектрального сдвига для пары операторов* H_s *и* H_c. *Тогда*

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leqslant 0, \\ \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}, & 0 < \lambda < 1, \\ 0, & \lambda \geqslant 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

и

$$\xi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ \frac{1}{4}, & \lambda = 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < \lambda < 1, \\ \frac{1}{4}, & \lambda = 1, \\ 0, & \lambda > 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $0 < \lambda < 1$ и $F_\mu^{(s)}$ – спектральная функция самосопряженного оператора L_s. Тогда

$$H_s = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dF_\mu^{(s)}}{\mu + 1} = -\int\limits_0^1 \lambda\, dF_{\frac{1}{\lambda}-1}^{(s)} = \int\limits_0^1 \lambda\, d\left(E - F_{\frac{1}{\lambda}-1}^{(s)}\right) = \int\limits_0^1 \lambda\, dE_\lambda^{(s)},$$

где $E_\lambda^{(s)} = E - F_{\frac{1}{\lambda}-1}^{(s)}$ – спектральная функция самосопряженного оператора H_s.

Известно, что (см. [2, стр. 306]) $F_\mu^{(s)}$ является интегральным оператором с ядром

$$F_\mu^{(s)}\,(x,\ s) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\mu}} \sin tx \sin ts\, dt, & \mu > 0, \\ 0, & \mu \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

В силу (3.5) для $0 < \lambda < 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}\left(E_\lambda^{(s)}\psi, \psi\right) \\
&= -\frac{4}{\pi}\frac{d}{d\lambda}\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1}{\lambda}-1}} \sin tx \sin ts\, dt\right) e^{-s}\, ds\right] e^{-x}\, dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}\left(\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x\sqrt{\frac{1}{\lambda}-1}\right) e^{-x}\, dx\right)^2 \qquad (3.6) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}\left(\frac{\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}{1+\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right)^2 = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Учитывая равенства (3.6), постоянность спектральной функции $E_\lambda^{(s)}$ на множестве $(-\infty,\ 0)\bigcup(1,\ +\infty)$ и ее непрерывность слева, получаем представление (3.3).

Докажем формулу (3.4). Из равенств (3.1), (3.3) и леммы 3.1 следует, что

$$\begin{aligned}
\xi(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\arg\left(1+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{x-\lambda-i\varepsilon}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\arg\left[1+\left(\sqrt{\frac{\lambda+i\varepsilon-1}{\lambda+i\varepsilon}}-1\right)\right] \qquad (3.7) \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\big[\arg(\lambda-1+i\varepsilon)-\arg(\lambda+i\varepsilon)\big].
\end{aligned}$$

Шаг 1. Пусть $\lambda < 0$. Тогда

$$\arg(\lambda-1+i\varepsilon) = \pi-\zeta_-^{(1)}(\varepsilon) \ \text{ и } \ \arg(\lambda+i\varepsilon) = \pi-\zeta_-^{(2)}(\varepsilon),$$

где

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\zeta_-^{(1)}(\varepsilon) = \lim_{0<\varepsilon\to 0}\zeta_-^{(2)}(\varepsilon) = 0.$$

Отсюда и из равенства (3.7) следует, что $\xi(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$.

Шаг 2. Пусть $\lambda = 0$. Тогда

$$\arg(\lambda-1+i\varepsilon) = \pi-\zeta_0(\varepsilon) \ \text{ и } \ \arg(\lambda+i\varepsilon) = \frac{\pi}{2},$$

где

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\zeta_0(\varepsilon)=0.$$

Отсюда и из (3.7) вытекает, что $\xi(0)=\frac{1}{4}$.

Шаг 3. Пусть $0<\lambda<1$. Тогда

$$\arg(\lambda-1+i\varepsilon)=\pi-\zeta_{01}^{(1)}(\varepsilon)\ \text{ и }\ \arg(\lambda+i\varepsilon)=\zeta_{01}^{(2)}(\varepsilon),$$

где

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\zeta_{01}^{(1)}(\varepsilon)=\lim_{0<\varepsilon\to 0}\zeta_{01}^{(2)}(\varepsilon)=0.$$

Отсюда и из равенства (3.7) следует, что $\xi(\lambda)=\frac{1}{2}$ при $0<\lambda<1$.

Шаг 4. Пусть $\lambda=1$. Тогда

$$\arg(\lambda-1+i\varepsilon)=\frac{\pi}{2}\ \text{ и }\ \arg(\lambda+i\varepsilon)=\zeta_1(\varepsilon),$$

где

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\zeta_1(\varepsilon)=0.$$

Отсюда и из (3.7) вытекает, что $\xi(1)=\frac{1}{4}$.

Шаг 5. Пусть $\lambda>1$. Тогда

$$\arg(\lambda-1+i\varepsilon)=\zeta_{+}^{(1)}(\varepsilon)\ \text{ и }\ \arg(\lambda+i\varepsilon)=\zeta_{+}^{(2)}(\varepsilon),$$

где

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\zeta_{+}^{(1)}(\varepsilon)=\lim_{0<\varepsilon\to 0}\zeta_{+}^{(2)}(\varepsilon)=0.$$

Отсюда и из равенства (3.7) следует, что $\xi(\lambda)=0$ при $\lambda>1$.

Из вышеприведенных рассуждений следует справедливость равенства (3.4). □

Здесь следует отметить, что в работе [16, Пример 4.1] вычислена функция спектрального сдвига для пар самосопряженных расширений симметрического оператора A, порождаемого матричным дифференциальным выражением Штурма–Лиувилля

$$\mathcal{A}f(x):=-\frac{d^2}{dx^2}f(x),\qquad f(x)=\operatorname{col}\{f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)\},$$

с областью определения

$$D(A)=W_0^{2,2}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^n):=\{f(x)\in W^{2,2}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^n)\ :\ f(0)=f'(0)=0\}.$$

Легко видеть, что функция $\rho(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\left(E_\lambda^{(s)}\psi,\psi\right)$, где $\psi=\sqrt{2}e^{-x}$, обладает следующими свойствами:

1) $\rho(1)=0$;

2) $1 + \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x)}{x-1} dx = 0$;

3) равномерно непрерывна, в смысле Гёльдера с показателем $\frac{1}{2}$, в окрестности точки $\lambda = 1$.

Но несмотря на это, точка $\lambda = 1$, где функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ имеет разрыв первого рода, не является собственным значением возмущенного оператора H_c, так как по теореме 2.2 этот оператор спектрально абсолютно непрерывен.

Таким образом, получаем, что даже из равномерной непрерывности функции $\rho(\lambda)$, в смысле Гёльдера, в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, где функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ терпит разрыв первого рода и выполняются условия

$$\rho(\lambda_0) = 0 \quad \text{и} \quad 1 + c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x)}{x - \lambda_0} \, dx = 0,$$

не следует, что она будет собственным значением возмущенного оператора.

В заключение авторы выражают благодарность рецензенту за ряд замечаний, которые улучшили текст статьи.

Список литературы

1. А. Б. Александров, В. В. Пеллер, *Формула следов Крейна для унитарных операторов и операторно липшицевы функции.* — Функц. анализ и его прил. **50**, No. 3 (2016), 1–11.
2. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* (2-е изд.), М., Наука, 1966, с. 544.
3. М. Ш. Бирман, *Избранные труды. Математическая теория рассеяния. Функция спектрального сдвига*, Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2010, с 504.
4. М. Ш. Бирман, М. Г. Крейн, *К теории волновых операторов и операторов рассеяния.* — ДАН СССР **144**, No. 3 (1962), 475–478.
5. М. Ш. Бирман, Д. Р. Яфаев, *Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие.* — Алгебра и анализ **4**, No. 5 (1992), 1–44.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (4-е изд.), М., ФМ, 1963, с. 1108.
7. М. Г. Крейн, *О формуле следов в теории возмущений.* — Матем. сб. **33(75)**, No. 3 (1953), 597–626.

8. М. Г. Крейн, *О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов*, Первая летняя математическая школа (Канев, 1963), ч. 1. Киев, Наукова думка, 1964, 103–187.
9. И. М. Лифшиц, *Об одной задаче теории возмущений.* — Успехи мат. наук **7**, No. 1 (1952), 171–180.
10. М. М. Маламуд, Х. Найдхардт, В. В. Пеллер, *Формула следа для функций сжатий.* — Функц. анализ и его прил. **51**, No. 3 (2017), 33–55.
11. А. Р. Миротин, *Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. III. Некоторые вопросы теории возмущений.* — Изв. вузов. Матем. No. 12 (2017), 24–34.
12. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы* (2-е изд.), М., Наука, 1969, с. 528.
13. P. Alsholm, *Inverse scattering theory for perturbations of rank one.* — Duke Math. J. **47**, No. 2 (1980), 391–398.
14. F. Gesztezy, K. A. Makarov, S. N. Naboko, *The spectral shift operator*, Math. Results in Quantum Mechanic (Prague, 1998) Oper. Theory Adv. Appl. **108**, Birkhäuser, Basel, 1999, 59–90.
15. M. G. Krein, *Perturbation determinants and a trace formula for some classes of pairs of operators.* — J. Operator Theory **17**, No. 1 (1987), 129–187. (in Russian)
16. M. Malamud, H. Neidhardt, *Trace formulas for additive and non-additive perturbations.* — Advances in Math. **274** (2015), 736–832.
17. M. M. Malamud, H. Neidhardt, V. V. Peller, *Absolute continuity of spectral shift.* — Journal of Functional Analysis, **276**, No. 5 (2019), 1575–1621.
18. V. V. Peller, *The Lifshits–Krein trace formula and operator Lipschitz functions.* — Proc. Amer. Math. Soc. **144**, No. 12 (2016), 5207–5215.
19. D. R. Yafaev, *Mathematical scattering theory: Analytic theory.* — Mathematical Surveys and Monographs **158** (2010), 444.

Aliev A. R., Eyvazov E. H. Spectral shift function and eigenvalues of the perturbed operator.

In the space of square-integrable functions on the positive semi-axis, two positive selfadjoint operators are constructed that are generated by a one-dimensional free Hamiltonian. These operators are employed to construct a pair of spectrally absolutely continuous bounded selfadjoint operators whose difference is an operator of rank 1. Then the perturbation determinant is used to find an explicit form of the M. G. Krein spectral shift function for this pair. It is shown that despite the A-smoothness of the perturbation in the sense of Hölder, the point $\lambda = 1$, where the spectral

shift function has a discontinuity of the first kind, is not an eigenvalue of the perturbed operator.

Азербайджанский государственный
университет нефти и промышленности,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджан
E-mail: alievaraz@yahoo.com

Поступило 8 июня 2022 г.

Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджан
E-mail: eyvazovelshad@gmail.com