Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

А. Б. Александров

О ПОДСТАНОВКАХ С ВЕСОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ОПЕРАТОРНО ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

Пусть $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ обозначает пространство всех липшицевых функций, заданных на подмножестве $\mathfrak{F}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, т. е. множество всех функций $f : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \tag{1.1}$$

для некоторой константы $C = C(f)$ и для всех $x, y \in \mathfrak{F}$. Обозначим через $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})}$ наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (1.1).

Непрерывная функция f на множестве $\mathfrak{F}$ называется *операторно липшицевой*, если существует константа C такая, что

$$\|f(A) - f(B)\| \leqslant C\|A - B\| \tag{1.2}$$

для любых самосопряжённых операторов A и B в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ таких, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset \mathfrak{F}$, где $\|T\|$ и $\sigma(T)$ обозначают соответственно операторную норму и спектр оператора T, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Множество всех операторно липшицевых функций на $\mathfrak{F}$ обозначим через $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$. Пусть $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$ обозначает наименьшую из констант $C \geqslant 0$, удовлетворяющих условию (1.2).

Ясно, что $\mathrm{OL}(\mathfrak{F}) \subset \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})} \leqslant \|\cdot\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})}$. Хорошо известно, что любая функция $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ дифференцируема в каждой неизолированной точке множества $\mathfrak{F}$.

Пространства $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ и $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ являются полунормированными.

Положим

$$\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F}) : \lim_a f = 0\}$$

и

$$\mathrm{Lip}_a(\mathfrak{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f \in \mathrm{Lip}(\mathfrak{F}) : \lim_a f = 0\},$$

Ключевые слова: операторно липшицевы функции.

Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований No. 20-01-00209.

где a – предельная точка множества $\mathfrak{F}$. Ясно, что пространства $\mathrm{OL}_a(\mathfrak{F})$ и $\mathrm{Lip}_a(\mathfrak{F})$ являются банаховыми пространствами.

Мы не требуем замкнутости множества $\mathfrak{F}$, хотя случай произвольного множества $\mathfrak{F}$ по существу сводится к случаю замкнутого множества $\mathfrak{F}$. Это связано с тем, что любая функция $f \in \mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ продолжается единственным образом до липшицевой функции на множестве $\operatorname{clos}\mathfrak{F}$, где $\operatorname{clos}\mathfrak{F}$ обозначает замыкание множества $\mathfrak{F}$. Таким образом, пространство $\mathrm{Lip}(\mathfrak{F})$ отождествляется естественным образом с пространством $\mathrm{Lip}(\operatorname{clos}\mathfrak{F})$, а пространство $\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ – с пространством $\mathrm{OL}(\operatorname{clos}\mathfrak{F})$.

Нам понадобится описание операторно липшицевых функций в терминах мультипликаторов Шура.

Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ – произвольные множества. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ пространство всех матриц $A = \{a(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$, задающих ограниченный оператор из $\ell^2(\mathcal{T})$ в $\ell^2(\mathcal{S})$. Пусть $\|\{a(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}\|$ обозначает норму соответствующего оператора из $\ell^2(\mathcal{T})$ в $\ell^2(\mathcal{S})$. С каждой парой матриц A и B вида $A = \{a(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ и $B = \{b(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ можно связать их произведение Шура $A\star B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a(s,t)b(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$. Матрица $M = \{m(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ называется *мультипликатором Шура пространства* $\mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$, если $M\star A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ для любой матрицы $A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$. Пусть $\mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ обозначает пространство всех мультипликаторов Шура пространства $\mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$. Положим

$$\|M\|_{\mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{\|M\star A\| : A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T}), \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} \leqslant 1\}.$$

С каждой матрицей $M = \{m(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ мы связываем также следующую величину:

$$\|M\|_{\mathfrak{M}_0(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\big\{\|M\star A\| : A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}\times\mathcal{T}),\\ \|A\| \leqslant 1,\ a(t,t) = 0 \text{ при всех } t \in \mathcal{S}\cap\mathcal{T}\big\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}_0(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$ – множество всех матриц $M = \{m(s,t)\}_{(s,t)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$ таких, что $\|M\|_{\mathfrak{M}_0(\mathcal{S}\times\mathcal{T})} < +\infty$. Ясно, что $\mathfrak{M}(\mathcal{S}\times\mathcal{T}) \subset \mathfrak{M}_0(\mathcal{S}\times\mathcal{T})$.

С каждой функцией f, заданной на множестве $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}\subset\mathbb{R}$, мы связываем функцию $\mathfrak{D}_0 f : \mathfrak{F}\times\mathfrak{F} \to \mathbb{C}$,

$$(\mathfrak{D}_0 f)(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{если } x \neq y,\\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Мы будем использовать следующее хорошо известное описание операторно липшицевых функций, см., например, теорему 3.3.2 в обзоре [3].

Теорема 1.1. *Пусть f – непрерывная функция на подмножестве $\mathfrak{F}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{D}_0 f \in \mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})$, при этом имеет место равенство $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \|\mathfrak{D}_0 f\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}$.*

С каждой дифференцируемой функцией f, заданной на множестве $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}\subset\mathbb{R}$, без изолированных точек, мы связываем разделённую разность $\mathfrak{D}f : \mathfrak{F}\times\mathfrak{F}\to\mathbb{C}$,

$$(\mathfrak{D}f)(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{если} \quad x\ne y, \\ f'(x), & \text{если} \quad x=y. \end{cases}$$

Заметим, что функция $(\mathfrak{D}f)(x,y)$ непрерывна по каждой переменной.

В дальнейшем у нас будут появляться и другие функции, заданные на множестве $\{(x,y)\in\mathfrak{F}\times\mathfrak{F} : x\ne y\}$. Мы будем продолжать эти функции в тех случаях, когда это возможно, до функций на $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$, непрерывных по каждой переменной.

Нам понадобится ещё одно хорошо известное утверждение, см., например, теорему 3.3.6 в обзоре [3].

Теорема 1.2. *Пусть f – функция на множестве $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}\subset\mathbb{R}$, без изолированных точек. Тогда $f\in\mathrm{OL}(\mathfrak{F})$ в том и только в том случае, когда f дифференцируема всюду на $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{D}f\in\mathfrak{M}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})$, при этом имеет место равенство $\|f\|_{\mathrm{OL}(\mathfrak{F})} = \|\mathfrak{D}f\|_{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F})}$.*

§2. Оценки норм некоторых мультипликаторов Шура

Г. Беннетом [4] было получено описание мультипликаторов Шура для матриц Тёплица, то есть для матриц вида $\{a_{m-n}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$.

Этот результат допускает обобщение, в котором вместо группы $\mathbb{Z}$ рассматривается произвольная локально компактная группа G, см., например, [1]. Нам понадобится этот результат для группы $\mathbb{R}$, причём только тривиальная его часть, то есть только достаточное условие для того, чтобы матрица вида $\{f(s-t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2}$ была мультипликатором Шура.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ является преобразованием Фурье конечной меры на $\mathbb{R}$. Тогда $\{f(s-t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2}\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2)$.*

Все результаты этого параграфа основаны на этой элементарной теореме.

Пусть $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ обозначает линейную оболочку семейства функций $\{e^{\lambda t}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, заданных на $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ множество всех функций f, представимых в виде $f=gh^{-1}$, где $g,h\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$, причём $h\not\equiv 0$.

Теорема 2.2. *Пусть $f\in\mathcal{X}(\mathbb{R})$. Предположим, что $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f(t)=0$ и все особые точки функции f устранимы. Тогда $\{f(s-t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2}\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 достаточно убедиться в том, что $\mathscr{F}f\in L^1(\mathbb{R})$. Для этого сначала заметим, что $f\in L^1(\mathbb{R})$, поскольку $f(t)=o(e^{-\varepsilon|t|})$ при $|t|\to+\infty$, если ε – достаточно малое положительное число. Следовательно, $\mathscr{F}f$ – ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$. Остаётся заметить, что если функция f удовлетворяет условиям доказываемой теоремы, то и каждая из её производных $f^{(k)}$ тоже удовлетворяет условиям этой теоремы. Следовательно, $\mathscr{F}f(t)=o((1+|t|)^{-k})$ при $|t|\to+\infty$ при любом натуральном k. □

Следствие 2.3. *Пусть $f\in\mathcal{X}(\mathbb{R})$. Предположим, что существует конечный предел $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f(t)$ и все особые точки функции f устранимы. Тогда $\{f(s-t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2}\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. Пусть $a=\lim\limits_{|t|\to+\infty}f(t)$. Тогда функция $f-a$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Остаётся заметить, что $f=(f-a)+a$. □

Теперь при помощи экспоненты всё это можно пересадить с прямой $\mathbb{R}$ на луч $(0,+\infty)$.

Пусть $\mathcal{P}_*(0,+\infty)$ обозначает линейную оболочку семейства функций $\{x^{\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, заданных на $(0,+\infty)$. Обозначим через $\mathcal{X}_*(0,+\infty)$ множество всех функций f, представимых в виде $f=gh^{-1}$, где $g,h\in\mathcal{P}_*(0,+\infty)$, причём $h\not\equiv 0$.

Тогда следствие 2.3 может быть переформулировано следующим образом.

Теорема 2.4. *Пусть* $f \in \mathcal{X}_*(0,+\infty)$*. Предположим, что* $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$*, где* $c \in \mathbb{C}$*, и все особые точки функции* f *устранимы. Тогда* $\{f(xy^{-1})\}_{(x,y)\in(0,+\infty)^2} \in \mathfrak{M}((0,+\infty)^2)$.

Замечание. Легко видеть, что эту теорему можно формально усилить, написав $\{f(xy^{-1})\}_{(x,y)\in[0,+\infty]^2} \in \mathfrak{M}([0,+\infty]^2)$, положим $f(xy^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} c$ в том случае, когда $x \in \{0,+\infty\}$ или $y \in \{0,+\infty\}$, при этом $\|f(xy^{-1})\|_{\mathfrak{M}((0,+\infty)^2)} = \|f(xy^{-1})\|_{\mathfrak{M}([0,+\infty]^2)}$.

§3. Нечётные операторно липшицевы функции

Положим $\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0,+\infty)$ и $\mathbb{R}_- \stackrel{\text{def}}{=} (-\infty,0]$.

В этом параграфе мы докажем, что нечётное продолжение операторно липшицевой функции $f \in \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$ является операторно липшицевым на всей прямой $\mathbb{R}$.

Теорема 3.1. *Пусть* f *– нечётная функция, заданная на вещественной прямой. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})$,

(ii) $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Импликация (i)$\Longrightarrow$(ii) тривиальна. Докажем, что (ii) влечёт (i), т. е. $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2) \quad\Longrightarrow\quad \mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$. Нам нужно доказать, что $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_-^2)$, $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+)$ и $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+)$. Ясно, что для любой нечётной функции f включение $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$ равносильно включению $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_-^2)$, а каждое из двух включений $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_+)$ и $\mathfrak{D}f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-)$ равносильно включению $\dfrac{f(x)+f(y)}{x+y} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$. Таким образом, всё сводится к доказательству импликации

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2) \quad\Longrightarrow\quad \frac{f(x)+f(y)}{x+y} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$$

при условии $f(0)=0$.

Из неравенства $|f(x)| \leqslant cx$ при всех $x \in \mathbb{R}_+$ и из тождества

$$2\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} = \frac{(x+y)(yf(x)-xf(y))}{xy(x-y)} \tag{3.1}$$

вытекает, что $\dfrac{(x+y)(yf(x)-xf(y))}{xy(x-y)} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$. Заметим, что

$$\frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{xy^{-1}}{(xy^{-1}+1)^2} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$$

в силу теоремы 2.4.

Следовательно, $\dfrac{yf(x)-xf(y)}{x^2-y^2} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$. Остаётся заметить, что

$$\frac{f(x)+f(y)}{x+y} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - 2\frac{yf(x)-xf(y)}{x^2-y^2}. \qquad \square$$

Следствие 3.2. *Пусть* $f \in \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$. *Тогда* $f^2(\sqrt{x}) \in \mathrm{OL}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Условие $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R}_+)$ означает, что $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$. Из теоремы 3.1 следует, что $\dfrac{f(x)+f(y)}{x+y} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$. Поэтому $\dfrac{f^2(x)-f^2(y)}{x^2-y^2} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$, то есть $\dfrac{f^2(\sqrt{x})-f^2(\sqrt{y})}{x-y} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2)$. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть* $f, g \in \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$. *Тогда* $f(\sqrt{x})g(\sqrt{x}) \in \mathrm{OL}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Это следствие мгновенно вытекает из следствия 3.2, если воспользоваться тождеством $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$. $\square$

Следствие 3.4. *Пусть* $f \in \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$. *Тогда* $\sqrt{x}f(\sqrt{x}) \in \mathrm{OL}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Достаточно применить следствие 3.3 к функции $g(x) = x$. $\square$

В следующем параграфе мы получим обобщения этих следствий.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 3.1 видно, что

$$f \in \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+) \quad \Longrightarrow \quad \frac{yf(x)-xf(y)}{x^2-y^2} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^2).$$

Можно доказать, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В качестве контрпримера можно взять функцию $f(x) = x\log x$, которая не удовлетворяет даже скалярному условию Липшица.

Легко видеть, что приведённое выше доказательство теоремы 3.1 позволяет доказать следующее обобщение этой теоремы, если только использовать функцию $\mathfrak{D}_0 f$ вместо $\mathfrak{D} f$.

Теорема 3.5. *Пусть f – нечётная функция, заданная на симметричном относительно нуля подмножестве $\mathfrak{F}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*
(i) $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F})$,
(ii) $f \in \mathrm{OL}(\mathfrak{F} \cap \mathbb{R}_+)$.

Замечание 2. Из теоремы 3.5 можно вывести, что любая операторно липшицева функция на промежутке может быть продолжена до операторно липшицевой функции на всей прямой, то есть $\mathrm{OL}(P) = \{f|P : f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R})\}$ для любого промежутка P вещественной прямой $\mathbb{R}$. Если P – луч, то можно считать, что $P = \mathbb{R}_+$. В этом случае всё сводится к теореме 3.1, то есть к частному случаю теоремы 3.5. Случай ограниченного невырожденного промежутка требует несложных дополнительных рассуждений, которых мы здесь не приводим.

§4. Операторы подстановки с весом

С каждым числом $\alpha \in \mathbb{R}$ мы связываем оператор T_α на множестве всех функций на интервале $(0, +\infty)$, заданный следующим образом: $(T_\alpha f)(x) = x^{1-\alpha} f(x^\alpha)$.

Заметим, что $T_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$.

Теорема 4.1. *Оператор T_α действует непрерывно на пространстве $\mathrm{OL}_0((0, +\infty))$. Кроме того, если $\alpha \neq 0$, то оператор*

$$T_\alpha : \mathrm{OL}_0((0, +\infty)) \to \mathrm{OL}_0((0, +\infty))$$

является изоморфизмом.

Докажем сначала лемму.

Лемма 4.2. *Пусть $f \in \mathrm{OL}_0((0, +\infty))$. Тогда*

$$\frac{x^{\tau-1} f(x) - y^{\tau-1} f(y)}{x^\tau - y^\tau} \in \mathfrak{M}((0, +\infty)^2)$$

при всех ненулевых $\tau \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Имеем:

$$2\frac{x^{\tau-1} f(x) - y^{\tau-1} f(y)}{x^\tau - y^\tau} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} + \frac{(yf(x) - xf(y))(x^\tau + y^\tau)}{xy(x^\tau - y^\tau)}$$
$$= \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} + \frac{(x+y)(yf(x) - xf(y))}{xy(x-y)} \cdot \frac{(x-y)(x^\tau + y^\tau)}{(x+y)(x^\tau - y^\tau)}$$

Остаётся заметить, что $\dfrac{(x+y)(yf(x)-xf(y))}{xy(x-y)} \in \mathfrak{M}((0,+\infty)^2)$ в силу тождества (3.1) и

$$\frac{(x-y)(x^\tau+y^\tau)}{(x+y)(x^\tau-y^\tau)} = \frac{(xy^{-1}-1)(x^\tau y^{-\tau}+1)}{(xy^{-1}+1)(x^\tau y^{-\tau}-1)} \in \mathfrak{M}((0,+\infty)^2)$$

в силу теоремы 2.4. □

Доказательство теоремы 4.1. Докажем сначала, что оператор T_α действует непрерывно в пространстве $\mathrm{OL}_0((0,+\infty))$. Случай $\alpha=0$ тривиален. Пусть $\alpha\neq 0$. Ясно, что достаточно доказать, что

$$\frac{x^{1-\alpha}f(x^\alpha)-y^{1-\alpha}f(y^\alpha)}{x-y} \in \mathfrak{M}((0,+\infty)^2)$$

или, что то же самое,

$$\frac{x^{\frac{1}{\alpha}-1}f(x)-y^{\frac{1}{\alpha}-1}f(y)}{x^{\frac{1}{\alpha}}-y^{\frac{1}{\alpha}}} \in \mathfrak{M}((0,+\infty)^2).$$

Последнее включение вытекает из леммы 4.2 при $\tau=\alpha^{-1}$.

Остаётся доказать, что оператор $T_\alpha : \mathrm{OL}_0((0,+\infty)) \to \mathrm{OL}_0((0,+\infty))$ является изоморфизмом, если $\alpha\neq 0$. Для этого достаточно заметить, что $T_\alpha^{-1}=T_{\alpha^{-1}}$. □

Как уже отмечалось выше, пространство $\mathrm{OL}(\mathbb{R}_+)$ отождествляется естественным образом с пространством $\mathrm{OL}((0,+\infty))$. При этом отождествлении пространству $\mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$ соответствует пространство $\mathrm{OL}_0((0,+\infty))$. Поэтому теорему 4.1 можно переформулировать следующим образом.

Оператор T_α действует непрерывно на пространстве $\mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$. Кроме того, если $\alpha\neq 0$, то оператор $T_\alpha : \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)\to \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$ является изоморфизмом.

Отметим, что теорема 4.1 для $\alpha=-1$ является частным случаем некоторых результатов статьи [2].

Приведём теперь следующее обобщение теоремы 4.1.

Теорема 4.3. *Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – конечная последовательность вещественных чисел, а $\{f_k\}_{k=1}^n$ – конечная последовательность функций из пространства $\mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$. Тогда функция $x^{1-\alpha}\prod\limits_{k=1}^n f_k(x^{\alpha_k})$ принадлежит пространству $\mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$, где $\alpha=\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k$.*

Доказательство. Будем это доказывать индукцией по n. База индукции (то есть случай $n = 1$) сводится к теореме 4.1. Предположим, что для $n = m - 1$ теорема доказана. Докажем её для $n = m$. Применяя индукционное предположение к последовательности чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^{m-1}$, где $\beta_k \stackrel{\text{def}}{=} 2\alpha_k$, и последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^{m-1}$, получим, что $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{1-\beta}\prod\limits_{k=1}^{m-1} f_k(x^{\beta_k}) \in \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$ при $\beta = 2\sum\limits_{k=1}^{m-1}\alpha_k$. Положим $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{1-2\alpha_m} f_m(x^{2\alpha_m})$. Ясно, что $g \in \mathrm{OL}_0(\mathbb{R}_+)$ в силу теоремы 4.1 . Остаётся заметить, что $x^{1-\alpha}\prod\limits_{k=1}^{m} f_k(x^{\alpha_k}) = f(\sqrt{x})g(\sqrt{x})$ и воспользоваться следствием 3.3. $\square$

С каждым невырожденным промежутком P можно связать пространство $\mathrm{OL}'(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{f' : f \in \mathrm{OL}(P)\}$.

Теорема 4.1 позволяет также получить соответствующее утверждение об операторе подстановки на пространстве $\mathrm{OL}'((0,+\infty))$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.4. *Пусть f – непрерывная функция на невырожденном промежутке P вещественной прямой $\mathbb{R}$ такая, что $(x-a)f(x) \in \mathrm{OL}(P)$ при некотором $a \in P$. Тогда $f \in \mathrm{OL}'(P)$.*

Мы будем использовать эту лемму для $P = \mathbb{R}_+$ и $a = 0$. Случай $P = \mathbb{R}$ рассмотрен в статье [2], см. теорему 3.4 в [2]. Приведённое там доказательство работает и в общем случае.

Кроме того, случай произвольного промежутка P сводится к случаю $P = \mathbb{R}$ при помощи замечания 2.

Теорема 4.5. *Пусть $g \in \mathrm{OL}'((0,+\infty))$. Тогда $g(x^\alpha) \in \mathrm{OL}'((0,+\infty))$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Случай $\alpha = 0$ тривиален. Пусть $\alpha \neq 0$. Возьмём функцию $f \in \mathrm{OL}((0,+\infty))$ такую, что $f' = g$. Тогда $x^{1-\alpha}f(x^\alpha) \in \mathrm{OL}((0,+\infty))$ в силу теоремы 4.1. Следовательно, $(1-\alpha)x^{-\alpha}f(x^\alpha) + \alpha g(x^\alpha) \in \mathrm{OL}'((0,+\infty))$. Остаётся заметить, что

$$x^{-\alpha}f(x^\alpha) = x^{-1}(x^{1-\alpha}f(x^\alpha)) \in \mathrm{OL}'((0,+\infty))$$

в силу леммы 4.4. $\square$

При $\alpha > 0$ аналогичное утверждение имеет место и для функций $g \in \mathrm{OL}'(\mathbb{R}_+)$.

Чтобы оно было верно и при $\alpha < 0$, нужно положить

$$0^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0+} x^\alpha = +\infty$$

и

$$f'(+\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to +\infty} x^{-1} f(x)$$

для $f \in \mathrm{OL}(\mathbb{R}_+)$.

Список литературы

1. А. Б. Александров, *Мультипликаторы Тёплица–Шура для класса $S_p(L^2(G))$ при $p < 1$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, 282 (2001), 5–19.
2. А. Б. Александров, *Операторно липшицевы функции и дробно-линейные преобразования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, 401 (2012), 5–52.
3. А.Б. Александров, В. В. Пеллер, *Операторно липшицевы функции.* — УМН, **71**, вып. 4(430), (2016), 3–106.
4. G. Bennett, *Schur multipliers.* — Duke Math, J., **44**, (1977), 603–639.

Aleksandrov A. B. On substitutions with a weight in the space of operator Lipschitz functions.

Operators of the form $f \mapsto x^\beta f(x^\alpha)$ are treated. Among other things, it is proved that such an operator acts on the class of operator Lipschitz functions on $(0, +\infty)$ if and only if $\alpha + \beta = 1$.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 16 сентября 2022 г.