Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 511, 2022 г.

А. Л. Смирнов

О СТЕПЕНЯХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ СЕЧЕНИЙ

§1. Введение

Речь идет о векторных расслоениях на проективной прямой над кольцом целых чисел, то есть о расслоениях на арифметической поверхности. Рассматриваются сечения расслоения и его подкруток с помощью линейных расслоений. При этом особый интерес представляют сечения, нигде не обращающиеся в ноль. С каждым расслоением E связано множество $NSD(E)$, состоящее из целых чисел, для которых у соответствующей подкрутки существует сечение без нулей.

В данный момент наиболее актуальным для исследования представляется случай расслоения ранга два. Кроме того, в связи с намерением изучать в последующем расслоения на аракеловских моделях $\mathbf{P}^1$, наиболее важны для нас расслоения с тривиальным общим слоем. Основной результат этой заметки (теорема 3.1) показывает, в частности, что для расслоений ранга два с тривиальным общим слоем множество $NSD(E)$ содержит все целые числа, начиная с некоторого места. Более того, для каждого такого расслоения соответствующее место можно указать явно.

Автор благодарит Г. А. Струкова за обсуждение изучаемого вопроса и за программы, использование которых способствовало получению представленных результатов.

§2. Постановка задачи

Ниже будем изучать векторные расслоения на конкретной схеме, представляющей собой проективную прямую $\mathbf{P}^1$ над $\mathbb{Z}$. Таким образом,

$$\mathbf{P}^1 = \operatorname{Proj}\mathbb{Z}[t_0, t_1],$$

где $\deg t_0 = \deg t_1 = 1$ (см., например, [1]). Нам потребуется стандартное покрытие

$$\mathbf{P}^1 = U_0 \cup U_1,$$

Ключевые слова: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, результант, подкрутка, сечение, невырожденное.

где U_i – дополнение к нулям t_i. Тогда $\mathcal{O}(U_0) = \mathbb{Z}[x]$, $\mathcal{O}(U_1) = \mathbb{Z}[y]$, $\mathcal{O}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{Z}[x, y]$, где $x = t_1/t_0$, $y = t_0/t_1$. Таким образом, $xy = 1$.

Здесь и далее будем писать $\mathcal{O}$ вместо $\mathcal{O}_X$, если схема X ясна из контекста. Для произвольного целого числа d, в частности, $\mathcal{O}(d)$ – стандартное линейное расслоение степени d на $\mathbf{P}^1$.

Ниже E – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1$.

С каждым целым числом d связано расслоение $E(d)$, называемое подкруткой E. По определению, $E(d) = \mathcal{O}(d) \otimes E$. Сечением E степени d будем называть произвольный морфизм

$$\mathcal{O} \to E(d).$$

Сечения степени d также будем называть d-сечениями.

Ниже по умолчанию предполагается (см. §1), что

$$\operatorname{rk} E = 2.$$

2.1. Оснащения и матрицы склейки. Известно (см. [2]), что ограничения E на U_0 и U_1 являются свободными $\mathcal{O}$-модулями. Таким образом, можно выбрать такие сечения $e_1, e_2 \in E(U_0)$ и $f_1, f_2 \in E(U_1)$, что

$$E|_{U_0} = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2, \quad E|_{U_1} = \mathcal{O}f_1 \oplus \mathcal{O}f_2. \tag{1}$$

На $U_0 \cap U_1$ эти наборы связаны соотношением

$$(e_1, e_2)\sigma = (f_1, f_2), \quad \text{где} \quad \sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x, y]). \tag{2}$$

Матрица σ называется матрицей склейки расслоения. Она зависит от оснащения E, то есть от выбора базисов E на U_0 и U_1.

В качестве матрицы склейки может быть использована произвольная матрица $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x, y])$. Таким образом, множество классов изоморфизма векторных расслоений ранга 2 представлено двойным фактором

$$\mathrm{Vect}_2(\mathbf{P}^1) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x]) \diagdown \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x, y]) \diagup \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[y]). \tag{3}$$

2.2. Некоторые инварианты расслоения. Пусть $s : \mathcal{O} \to E(d)$ сечение степени d. Сечение s будем называть невырожденным, если оно не имеет нулей на $\mathbf{P}^1$.

Из теоремы Ханны (см. [3]) вытекает, что всякое расслоение допускает невырожденное сечение некоторой степени. Для каждого конкретного расслоения E желательно уметь строить невырожденное d-сечение минимальной степени. Этот инвариант расслоения обозначается $l_{min}(E)$.

Вычисление инварианта $l_{\min}(E)$ – интересная нерешенная задача. Известны только алгоритмы получения нижней и верхней оценок инварианта $l_{\min}(E)$ (см. [4, 5]). Однако полученные таким образом верхние и нижние оценки не всегда совпадают.

Множество степеней невырожденных сечений $NSD(E)$ расслоения E определено следующим образом:

$$NSD(E) = \{d \in \mathbb{Z}| \text{ существует невырожденное сечение } E(d)\}.$$

Легко видеть, что множество $NSD(E)$ ограничено снизу. Таким образом, $l_{\min}(E)$ – минимальный элемент множества $NSD(E)$.

Ниже по умолчанию предполагается (см. §1), что E расслоение с тривиальным общим слоем или, иными словами, что на схеме $\mathbf{P}^1 \otimes \mathbb{Q}$ имеется изоморфизм

$$E \otimes \mathbb{Q} \cong \mathcal{O}^2.$$

В случае тривиального $E = \mathcal{O}^2$, например, несложно увидеть, что $NSD(\mathcal{O}^2) = \{0, 1, \dots\}$. Это тотчас вытекает из невырожденности d-сечения $s = (t_0^d, t_1^d)$ при $d \geqslant 0$. В общем случае, по определению,

$$NSD(E) \subset \{d \in \mathbb{Z}| d \geqslant l_{\min}(E)\}.$$

Вот интересующий нас вопрос: верно ли, что здесь не только включение, но и равенство?

§3. Основные результаты

Вот основной результат этой заметки.

3.1. Теорема. *Если $E \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathcal{O}^2$, $d \in NSD(E)$, $e \geqslant d$ и $e \geqslant 3d - 2$, то $e \in NSD(E)$.*

Доказательство. Пусть $s : \mathcal{O} \to E(d)$ – невырожденное сечение степени d. Утверждается, что существует точная последовательность вида

$$0 \to \mathcal{O}(-d) \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} \mathcal{O}(d) \to 0.$$

Для доказательства существования такой последовательности рассмотрим точную последовательность векторных расслоений

$$0 \to \mathcal{O}(-d) \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} L \to 0.$$

Так как $\mathrm{Det}(E) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathcal{O}$, то $L \simeq \mathcal{O}(d)$. Поэтому E можно задать с помощью матрицы склейки

$$\sigma = \begin{pmatrix} y^d & m \\ 0 & x^d \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $m \in \mathbb{Z}[x, y]$. В самом деле, расслоение E оснастим (см. 2.1) следующим образом. Положим

$$e_1 = s(t_0^{-d}), \quad e_2 = i_0(t_0^d), \quad f_1 = s(t_1^{-d}), \quad f_2 = i_1(t_1^d),$$

где i_0 и i_1 произвольные расщепления ограничений p на U_0 и U_1. Расщепления i_0 и i_1 существуют в силу проективности ограничений $\mathcal{O}(d)$ на U_0 и на U_1. Легко видеть, что матрица склейки, связанная с таким оснащением, имеет вид, указанный в (4).

Более того, можно считать, что

$$v_x(m) \leqslant d - 1, \quad v_y(m) \leqslant d - 1. \tag{5}$$

Здесь v_x и v_y единственные нормирования поля $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}(y)$, тривиальные на $\mathbb{Q}$ и такие, для которых $v_x(x) = 1$ и $v_y(y) = 1$. Этого легко добиться, умножая σ слева и справа (см. (3)), соответственно, на матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & b(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a \in \mathbb{Z}[x]$ и $b \in \mathbb{Z}[y]$ подходящие полиномы от x и y.

Над кольцом $\mathbb{Z}[u, v, w, z, t]$, где $uv = 1$, $wz = 1$, рассмотрим матрицы

$$l = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & vw \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 + tz & t^2 uz \\ -vz & 1 - tz \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} v & t \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

Вычисление показывает, что эти матрицы связаны соотношением

$$lsr = \begin{pmatrix} z & tuz - u \\ 0 & w \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Рассмотрим гомоморфизм $\pi : \mathbb{Z}[u, v, w, z, t] \to \mathbb{Z}[x, y]$, при котором

$$u \mapsto x^d, \quad v \mapsto y^d, \quad t \mapsto m, \quad z \mapsto y^e, \quad w \mapsto x^e.$$

Непосредственно видно, что

$$\pi(s) = \sigma, \tag{7}$$

где матрица σ указана в (4). Положим

$$\lambda = \pi(l), \quad \rho = \pi(r). \tag{8}$$

Покажем, что в условиях доказываемой теоремы

$$\lambda \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x]), \quad \rho \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[y]). \tag{9}$$

В самом деле, прямое вычисление показывает, что

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & y^d x^e \end{pmatrix}.$$

Из условия $e \geqslant d$ (см. 3.1) вытекает, что матрица λ определена над $\mathbb{Z}[x]$. Так как $\det \lambda = 1$, то часть утверждения (9), связанная с λ, доказана. Прямое вычисление также показывает, что

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 + my^e & m^2 x^d y^e \\ -y^{d+e} & 1 - my^e \end{pmatrix}.$$

Из условия $e \geqslant 3d - 2$ (см. 3.1) вытекает, что матрица ρ определена над $\mathbb{Z}[y]$. Действительно,

$$\deg_x(m^2 x^d y^e) = 2\deg_x(m) + d - e \leqslant 2(d-1) + d - e = 3d - 2 - e \leqslant 0. \tag{10}$$

Так как $\det \rho = 1$, то утверждение (9) полностью проверено.

Ввиду (7) и (8) из (6) вытекает равенство

$$\lambda\sigma\rho = \sigma',$$

где

$$\sigma' = \begin{pmatrix} y^e & mx^d y^e - x^d \\ 0 & x^e \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица σ' может быть выбрана в качестве матрицы склейки для E (см. 2.1). Отсюда сразу же видно, что у расслоения E есть невырожденное сечение s' степени e. Это сечение на U_0 задано формулой $1 \mapsto t_0^e \otimes e_1'$. Здесь e_1' первый базисный вектор на U_0 того оснащения E, которому соответствует σ'. $\square$

3.2. Следствие. *Если общий слой E тривиален и $l_{\min}(E) = 1$, то $NSD(E) = \{1, 2, \dots\}$.*

3.3. Множество $NSD(E)$ в случае $l_{\min}(E) = 2$. В этом случае теорема 3.1 показывает, что

$$\{2, 4, \dots\} \subset NSD(E) \subset \{2, 3, 4, \dots\}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае невыясненным остается единственный вопрос: верно ли, что всегда существует невырожденное сечение степени три? Ответ на этот вопрос автору не известен. Ниже, однако, приведен пример расслоения E, для которого $l_{\min}(E) = 2$ и $3 \in NSD(E)$.

Пусть E задано матрицей склейки

$$\begin{pmatrix} 2y & 5 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Известно (см. [5, пример 2]), что E может быть задано также матрицей склейки

$$\sigma = \begin{pmatrix} y^2 & -1+2y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Известно также (см. [6]), что E не имеет невырожденных сечений степеней 0 и 1. Таким образом, $l_{\min}(E) \leqslant 2$. Утверждается, что

$$NSD(E) = \{2, 3, 4, \dots\}.$$

Это вытекает из следующей модификации теоремы 3.1.

3.4. Теорема. *Пусть E задано матрицей склейки*

$$\sigma = \begin{pmatrix} y^d & m \\ 0 & x^d \end{pmatrix},$$

где $e \geqslant d \geqslant 0$ и $v_x(m) \leqslant 0$. Тогда $e \in NSD(E)$.

Доказательство. Это утверждение проверяется так же, как и теорема 3.1, за исключением оценки (10). Ее следует заменить оценкой $\deg_x(m^2 x^d y^e) \leqslant 0 + d - e \leqslant 0$. □

§4. Метод поиска невырожденного сечения

Приведенное выше доказательство теоремы 3.1 выглядит слишком трюкообразным. Решающим моментом этого доказательства является предъявление подходящих матриц l и r. Эти матрицы просто выписаны без объяснения того, как они были найдены. Ниже приведены такие объяснения, так как они могут оказаться полезными при дальнейших исследованиях.

Метод поиска невырожденных сечений использует идею алгоритма редукции из [5]. В этом алгоритме имеется шаг выбора некоторого параметра n (см. [5, 4.4, формула 4.15]). В алгоритме в качестве n предлагается взять максимум из двух чисел. Однако допустимо выбрать в качестве n произвольное число, лишь бы оно было не меньше этого максимума. Именно такой выбор и используется выше для построения невырожденных сечений большой степени.

Имеется, однако, одно препятствие для применения этого метода. Дело в том, что исходная матрица склейки может с самого начала быть редуцированной. В этом случае алгоритм редукции просто не запустится и у нас не появится возможность использовать прием, указанный выше. В этом случае предлагается сначала слегка возмутить исходную матрицу склейки, не изменяя класса изоморфизма соответствующего расслоения.

Продемонстрируем реализацию этого плана на примере. Начнем с матрицы склейки вида

$$\begin{pmatrix} y & m \\ 0 & x \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $m \in \mathbb{Z}$. По техническим причинам будет удобно ограничиться случаем $|m| > 1$. Матрица (13) уже редуцирована. Поэтому начнем с возмущения. Попробуем использовать простейшее такое возмущение, а именно

$$\begin{pmatrix} y & m \\ 0 & x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y & m \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & y \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Это возмущение не меняет класса изоморфизма соответствующего векторного расслоения (см. 2.1). Возьмем

$$\sigma = \begin{pmatrix} m & y \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим к σ алгоритм редукции. При этом мы используем некоторые обозначения из [5]. Начнем с x-редукции, т. е. с поиска матрицы λ. Следуя описанию алгоритма редукции, в качестве начального значения возьмем

$$\lambda = \sigma^*/x^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -x & m \end{pmatrix}.$$

Условие $v_x(\det\lambda) = 0$ не выполнено. Условие $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)) \geqslant \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$ также не выполнено ($m > 1$). Поэтому входим в процедуру модификации второй строки R_2. Находим

$$\lambda\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -x & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & y \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\max\{1, v_y(\lambda_{2,*}\sigma) - v_y(\lambda_{1,*}\sigma) + 1\} = \max\{1, (-1) - (0) + 1\} = 1$. Пусть

$$n = a, \quad \text{где} \quad a \geqslant 1.$$

Именно в этом месте мы нарушили стандартное выполнение алгоритма редукции. Завершая R_2, получаем новое значение

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -x^{a+1} & -1 + mx^a \end{pmatrix}.$$

Условие $v_x(\det\lambda) = 0$ не выполнено. Условие $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)) \geqslant \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$ выполнено, так как $|m| > 1$. Поэтому входим в процедуру модификации первой строки R_1. Находим

$$\lambda = \begin{pmatrix} x & -m \\ -x^{a+1} & -1 + mx^a \end{pmatrix}.$$

Условие $v_x(\det\lambda) = 0$ не выполнено. Условие $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)) \geqslant \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$ выполнено, так как $m \neq 0$. Поэтому входим в процедуру модификации второй строки R_2. Находим

$$\lambda\sigma = \begin{pmatrix} x & -m \\ -x^{a+1} & -1 + mx^a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & y \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & -x^a \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\max\{1, v_y(\lambda_{2,*}\sigma) - v_y(\lambda_{1,*}\sigma) + 1\} = \max\{1, (-1) - (0) + 1\} = 1$. Пусть

$$n = 1.$$

Завершая процедуру R_2, получаем новое значение

$$\lambda = \begin{pmatrix} x & -m \\ x - x^{a+2} & -m - x + mx^{a+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $v_x(\det\lambda) \neq 0$ и $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)) \geqslant \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$. Поэтому входим в процедуру модификации первой строки R_1. Находим новое значение

$$\lambda = \begin{pmatrix} x^{a+1} & 1 - mx^a \\ x - x^{a+2} & -m - x + mx^{a+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $v_x(\det\lambda) \neq 0$ и $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)) < \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$ $(m > 1)$. Поэтому входим в процедуру R_2. Находим

$$\lambda\sigma = \begin{pmatrix} x^{a+1} & 1 - mx^a \\ x - x^{a+2} & -m - x + mx^{a+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & y \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^a \\ -x^2 & 1 - x^{a+1} \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\max\{1, v_y(\lambda_{2,*}\sigma) - v_y(\lambda_{1,*}\sigma) + 1\} = \max\{1, (-a-1) - (-a) + 1\} = 1$. Пусть

$$n = 1.$$

Завершая процедуру R_2, получаем новое значение

$$\lambda = \begin{pmatrix} x^{a+1} & 1 - mx^a \\ x^2 + x^{a+1} - x^{a+3} & 1 - mx - x^2 - mx^a + mx^{a+2} \end{pmatrix}.$$

Здесь $v_x(\det\lambda) \neq 0$ и $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)) \geqslant \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$. Поэтому входим в процедуру R_1. Находим новое значение

$$\lambda = \begin{pmatrix} -x + x^{a+2} & m + x - mx^{a+1} \\ x^2 + x^{a+1} - x^{a+3} & 1 - mx - x^2 - mx^a + mx^{a+2} \end{pmatrix}.$$

Здесь $v_x(\det\lambda) \neq 0$ и $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)) \geqslant \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$. Поэтому входим в процедуру R_1. Находим новое значение λ, это

$$\begin{pmatrix} -1 - mx - mx^a + x^{a+1} + mx^{a+2} & 1 + m^2 + mx + m^2x^{a-1} - mx^a - m^2x^{a+1} \\ x^2 + x^{a+1} - x^{a+3} & 1 - mx - x^2 - mx^a + mx^{a+2} \end{pmatrix}.$$

Здесь $v_x(\det\lambda) = 0$. Поэтому мы нашли окончательное значение λ.

Для построения матрицы ρ воспользуемся процедурой E из [5, 5.2]. В этой процедуре

$$\rho = \theta^{-1}, \tag{14}$$

причем матрица θ получается цепочкой модификаций из начального значения. Следуя описанию алгоритма, для выбора начального значения вычислим матрицу

$$\lambda\sigma = \begin{pmatrix} -m + x + mx^2 & -y - m - mx^{a-1} + x^a + mx^{a+1} \\ x - x^3 & x + x^a - x^{a+2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В качестве начального значения θ возьмем матрицу

$$(\lambda\sigma)/y^* = \begin{pmatrix} -my^{a+1} + y^a + my^{a-1} & -y^{a+2} - my^{a+1} - my^2 + y + m \\ y^{a+1} - y^{a-1} & y^{a+1} + y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

В результате цепочки модификаций находим, что

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} \\ y^{a+1} - y^{a-1} & y^{a+1} + y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\theta_{1,1} = \begin{cases} (b+1)y^{a-1} - u(b), & \text{если } a = 2b+1, \\ (by+1)y^{a-1} - u(b), & \text{если } a = 2b, \end{cases}$$

$$\theta_{1,2} = \begin{cases} v(b+1) + b + 1, & \text{если } a = 2b+1, \\ v(b+1) - u(b+1) + yu(b) + by + 1, & \text{если } a = 2b, \end{cases}$$

$u(n) = 1 + y^2 + \cdots + y^{2(n-1)}$, $v(n) = 1 + 2y^2 + 3y^4 + \cdots + by^{2(n-1)}$.

Учитывая (14) и (15), находим

$$\lambda\sigma\rho = \begin{pmatrix} y^{a+2} & \sigma_{1,2} \\ 0 & x^{a+2} \end{pmatrix},$$

где $\sigma_{1,2}$ при необходимости можно легко вычислить.

Таким образом, по невырожденному сечению степени один построено невырожденное сечение степени $a+2$.

Литература

1. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* Москва, Мир, 1981.
2. C. S. Seshadri, *Triviality of vector bundles over the affine space K^2.* — Proc. Nat. Acad. Sci. **44** (1958), 456–458.
3. Ch. C. Hanna, *Subbundles of vector bundles on the projective line.* — J. Algebra **52**, No. 2 (1978), 322–327.
4. А. Л. Смирнов, Г. А. Струков, *Короткие сечения некоторых расслоений на проективной прямой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **490** (2020), 124–141.
5. А. Л. Смирнов, С. С. Яковенко, *Построение линейной фильтрации для расслоений ранга* 2 *на* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Матем. сборник **208** (2017), 111–128.
6. A. L. Smirnov, *On filtrations of vector bundles over* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Arithmetic and Geometry, Cambridge Univ. Press, London Math. Soc., Lect. Note Series, vol. 420, 436–457, 2015.

Smirnov A. L. On the degrees of nondegenerated sections.

The paper concerns vector bundles on the projective line over the ring of integers. We deal with bundles of rank 2 with the trivial generic fiber. We consider twistings of such a bundle with a certain degree. It is proved that for sufficiently high degrees there exist nonvaniching sections of corresponding twistings.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 7 сентября 2022 г.