Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 511, 2022 г.

В. М. Поляков

КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА КЛАССОВ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ С ПОДСКОКАМИ ВЫСОТЫ 2

§1. Введение

В данной работе мы будем изучать векторные расслоения на схеме $\mathbb{P}^1_A$, где A некоторая область главных идеалов. В частности, особое внимание будет уделено случаю $A = \mathbb{Z}$. Выбор в качестве основного кольца A именно области главных идеалов вместо, например, просто коммутативного нетерова кольца обусловлен тем, что в используемых методах будет играть ключевую роль теория приведения (приведение матриц к нормальной форме Смита).

В работе мы будет придерживаться стандартных обозначений:

$$\mathbb{P}^1_A = \mathrm{Proj}\ A[t_0, t_1], \quad \deg t_0 = \deg t_1 = 1.$$

В обозначениях $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_X(n)$ будем опускать X и писать просто $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}(n)$. Как обычно, U_i – дополнение к нулям t_i, $U_{01} = U_0 \cap U_1$, $x = t_1/t_0$, $y = t_0/t_1$. Кроме того, $\mathcal{O}(U_0) = A[x]$, $\mathcal{O}(U_1) = A[y]$, $\mathcal{O}(U_{01}) = A[x, y]$, при том $xy = 1$.

1.1. Матрицы склейки. Одним из удобных способов задавать векторные расслоения является задание расслоения с помощью матрицы склейки. Приведем краткое описание конструкций. Пусть E векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$ ранга n. Тогда по теореме Квиллена–Суслина (см. [3, 4]) мы можем тривиализовать E на U_i: $E|_{U_0} \simeq \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_n$ и $E|_{U_1} \simeq \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_n$. С этими тривиализациями связана матрица $\sigma \in \mathrm{GL}_n(A[x, y])$, такая, что $\mathbf{e}\sigma = \mathbf{f}$ на U_{01}, где $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. Обратное тоже верно: можно построить векторное расслоение с данной матрицей склейки σ.

Ключевые слова: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, подскоки, род.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2022-289.

1.2. Известные результаты. Расслоения над $\mathbb{P}^1_F$, где F – поле, полностью классифицируются следующей классической теоремой.

Теорема 1 (Гротендик, [5]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_F$, где F – поле, может быть представлено суммой линейных расслоений, причем слагаемые определены однозначно.*

Также известна структура линейных расслоений, для случая проективного пространства над нетеровым кольцом.

Теорема 2 (Серр, [6]). *Всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n_A$ изоморфно расслоению вида $p^*L \otimes \mathcal{O}(d)$, где L – линейное расслоение на $\operatorname{Spec} A$, а p – структурная проекция $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$.*

Ввиду этих теорем мы можем утверждать следующее: пусть E расслоение ранга n на $\mathbb{P}^1_A$, $y \in \operatorname{Spec} A$, а E_y – ограничение расслоения на $\mathbb{P}^1_F$, где F – поле вычетов точки y. Тогда $E_y \simeq \mathcal{O}(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(d_n)$, где $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ однозначно определенный набор целых чисел.

Определение 1. *Пусть E векторное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^1_A$. Будем говорить, что E*

(i) *имеет тривиальный общий слой, если $E_\eta \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$, где η – общая точка $\mathbb{P}^1_A$;*
(ii) *имеет подскок высоты m в точке $y \in \operatorname{Spec} A$, если $E_y \simeq \mathcal{O}(-m) \oplus \mathcal{O}(m)$.*

Будем считать подскоком высоты 0 в точке y отсутствие подскока: $E_y \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$.

Определение 2. *Расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^1_A$ с тривиальным общим слоем будем называть расслоением с подскоками высоты m, если найдется хотя бы одна точка с подскоком высоты m, а во всех остальных точках высота подскоков не больше m.*

Отметим, что множество точек подскока расслоения всегда конечно. Этот факт является следствием теоремы о замене базы (более подробно см. [1], 18.1.2.2).

Известны также следующие результаты.

Теорема 3 (Hanna, [7]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$, где A – дедекиндово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой либо линейные расслоения либо расслоения ранга два.*

Теорема 4 (Hanna, [7]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$, где A – евклидово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.*

Теорема 5 (Horrocks, [8]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$, где A – локальное кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.*

Отдельно отметим работы [1, 11, 12], в которых изучались явления, связанные с подскоками расслоений ранга 2. В первых двух изучались расслоения с простыми подскоками и тривиальным общим слоем. В последней работе, вместо тривиального общего слоя, был рассмотрен слой вида $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$. В первой и третьей работе были даны полные классификации соответствующих расслоений. Сформулируем основные результаты этих работ. Для начала, положим $V_0(m, \alpha) = \operatorname{Coker}(\,\phi : \mathcal{O}(-2)^2 \to \mathcal{O}(-1)^4)$, где стрелка ϕ задается матрицей

$$\phi = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ \alpha t_0 & t_1 \\ m t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{pmatrix},$$

$V_1(m, e) = \operatorname{Coker}(\,\psi : \mathcal{O}(-2)^3 \to \mathcal{O}(-1)^5)$, где

$$\psi = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ t_0 & t_1 & 0 \\ 0 & e t_0 & t_1 \\ 0 & m t_0 & 0 \\ 0 & 0 & t_0 \end{pmatrix}$$

и $V_1'(m, e) = \operatorname{Coker}(\,\psi' : \mathcal{O}(-2)^3 \to \mathcal{O}(-1)^5)$, где ψ' задается матрицей

$$\psi' = \begin{pmatrix} t_1 & e t_0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ t_0 & 0 & t_1 \\ 0 & m t_0 & 0 \\ 0 & 0 & t_0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6 (Смирнов [1, 11]).

(i) *Если $m \neq 0$ и $\gcd(m, \alpha) = 1$, то $\mathcal{O}_X$–модуль $V_0(m, \alpha)$ является расслоением. Если, кроме того, $m \neq \pm 1$, то $V_0(m, \alpha)$ – расслоение с простыми подскоками. Подскоки находятся в точности в* *делителях m. Если E – векторное расслоение с простыми подскоками на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, то E изоморфно расслоению вида $V_0(m,\alpha)$.*

(ii) *Пусть $E_1 = V_0(m_1,\alpha_1)$, $E_2 = V_0(m_2,\alpha_2)$, где $\gcd(m_1,\alpha_1) = 1$, $\gcd(m_2,\alpha_2) = 1$, $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$. Расслоения E_1 и E_2 изоморфны тогда и только тогда, когда идеал (m_1) равен идеалу (m_2) и существует $z \in \mathbb{Z}$ такое, что $\alpha_2/\alpha_1 \equiv \pm z^2 \pmod{m_1}$.*

(iii) *Вложение $\mathcal{O}(-1) \hookrightarrow V_0(m,e)$, фактор которого является расслоением, существует тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $\pm e$ является квадратичным вычетом по модулю m.*

(iv) *Для любой пары (m,e) взаимно простых чисел, $\mathcal{O}(-2)$ является подрасслоением $V_0(m,e)$.*

(v) *Расслоение $V_0(m,e)$ может быть задано матрицей склейки*
$$\begin{pmatrix} ax^{-1} & b \\ c & dx \end{pmatrix},$$
где $ad - bc = 1$, $(b) = (m)$ и существует $\lambda \in \mathbb{Z}$ такое, что $a\lambda^2 \equiv \pm e$.

Теорема 7 (Яковенко [12])**.** *Пусть $m \neq 0$ и $\gcd(m,e) = 1$, тогда $V_1(m,e)$ и $V_1'(m,e)$ является расслоениями. Если, кроме того, m не является обратимым, то слои данных расслоений над $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ изоморфны $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$, все подскоки имеют вид $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(2)$, причём дивизоры вырождения $\mathfrak{f}(V_1(m,e))$ и $\mathfrak{f}(V_1'(m,e))$ в точности равны m. И верно следующее*:

(i) *Всякое расслоение на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с общим слоем $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками изоморфно или расслоению вида $V_1(m,e)$, или $V_1'(m,e)$. В частности, $V_1(m,e) \simeq V_1'(m',e')$ тогда и только тогда, когда $m = \pm m' = \pm 1$.*

(ii) *Расслоения $V_1(m,e)$ и $V_1(m',e')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $(m) = (m')$ и $e \equiv \pm e' \pmod{m}$. Аналогично для V_1'.*

(iii) *Расслоения $V_1(m,e)$ и $V_1'(m,e)$ могут быть определены матрицами склейки*
$$\begin{pmatrix} ax^{-1} & bx \\ c & dx^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} ax^{-1} & b \\ cx & dx^2 \end{pmatrix},$$
соответственно, где $ad - bc = 1$, $(b) = (m)$ и $a \equiv \pm e \pmod{m}$.

1.3. Спектральная последовательность Бейлинсона. Основным средством для изучения расслоений с подскоком высоты 2 у нас будет спектральная последовательность Бейлинсона. С ее помощью мы сможем свести задачу к изучению целочисленных матриц относительно небольшого размера. Здесь и далее будем обозначать $H^i(\mathbb{P}^1_A, F)$ просто $H^i(F)$.

Теорема 8 (Бейлинсон [13, 14])**.** *Пусть F – векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$, $p : \mathbb{P}^1_A \to \operatorname{Spec} A$ – структурная проекция. Существует спектральная последовательность с первым членом $E_1^{pq} = Rp_*^q(F(p)) \otimes \Omega^{-p}(-p)$, сходящаяся к*

$$F^i = \begin{cases} F, & \textit{если } i = 0; \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

E_1-член спектральной последовательности расположен во втором квадранте, а его ненулевая часть – в нулевой и первой строках:

$$H^1(F(-1)) \otimes O(-1) \xrightarrow{d_1} H^1(F) \otimes O,$$

$$H^0(F(-1)) \otimes O(-1) \xrightarrow{d_1} H^0(F) \otimes O.$$

Применим эту теорему для наших расслоений, но не напрямую, а сначала немного подкрутив расслоение, чтобы первая строка спектральной последовательности занулилась. Тогда мы получим представление нашего расслоения в виде фактора.

Пусть E векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$ ранга 2 с подскоками высоты n. Тогда по теореме о замене базы $H^1(E(n)) = H^1(E(n-1)) = 0$, а также $H^0(E(n)) \simeq A^{2n+2}$, $H^0(E(n-1)) \simeq A^{2n}$. Тогда из спектральной последовательности Бейлинсона следует, что для расслоения $E(n)$ существует короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{2n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}^{2n+2} \longrightarrow E(n) \longrightarrow 0.$$

После ее подкрутки на $(-n)$ получаем

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^{2n+2}(-n) \longrightarrow E \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Для явного задания стрелки φ зафиксируем базисы расслоений $\mathcal{O}^{2n}$ и $\mathcal{O}^{2n+2}$: $e_1, \dots, e_{2n}$ и $f_1, \dots, f_{2n+2}$ соответственно. Это фиксирует нам следующее отождествление

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}^{2n}(-1-n), \mathcal{O}^{2n+2}(-n)) \simeq M_{2n+2,2n}(\operatorname{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))).$$

Таким образом, стрелка φ, задающая наше расслоение E как коядро, записывается следующим образом: $\varphi = t_0\varphi_0 + t_1\varphi_1$, где $\varphi_0, \varphi_1 \in$

$M_{2n+2,2n}(A)$. Эти матрицы определены с точностью до замены базисов, то есть эквивалентные матрицы будут давать изоморфные расслоения. В нашем случае условие эквивалентности выглядит следующим образом: $\varphi \sim \varphi'$, если $\varphi' = \sigma\varphi\rho$ для некоторых $\sigma \in \mathrm{GL}_{2n+2}(A)$, $\rho \in \mathrm{GL}_{2n}(A)$. Наша цель – привести матрицу φ к наиболее простому виду.

Определение 3. *Стрелку $\varphi : \mathcal{O}^{2n}(-1-n) \longrightarrow \mathcal{O}^{2n+2}(-n)$ будем называть невырожденной, если ее коядро является расслоением ранга* 2.

Из спектральной последовательности Бейлинсона мы получили, что каждое векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$ ранга 2 с подскоками высоты n является коядром невырожденной стрелки. Обратное, конечно, не верно.

Для начала, ограничим наше расслоение в точку $t_0 = 0$. Тогда, в силу теории элементарных делителей (нормальная форма Смита), матрица φ_1 приводится к следующему диагональному виду

$$\varphi_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

На диагонали действительно стоят единицы, поскольку иначе фактормодуль, задаваемый этой матрицей, будет иметь кручение. Переобозначим φ_1' как φ_1, так же поступим и с φ_0, который каким-то образом тоже изменился, но нас пока не интересует каким именно. В дальнейшем, каждый раз после преобразований мы будем так же переобозначать наши матрицы, уже не проговаривая этого.

Теперь нам предстоит преобразовать матрицу φ_0 к наиболее простому виду, не изменяя при этом полученную на предыдущем шаге φ_1.

Мы можем снова воспользоваться теорией элементарных делителей, но уже применительно к двум последним строкам матрицы φ_0, после чего можно, с помощью последней строки, занулить все элементы над единицей в получившейся матрице:

$$\varphi_0' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \nu & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \nu & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Последний элемент последней строки действительно 1, поскольку иначе он обязан иметь общий простой делитель с ν, обозначим его π, а тогда, ограничив наше расслоение на $\mathbb{P}^1 \otimes A/\pi$ мы получим, что у матрицы φ остается единственный ненулевой минор размера $2n$ – первые $2n$ строк. Тогда если рассмотреть его как однородный полином, то на нашей схеме найдется точка (возможно не рациональная) в которой он занулится, а это противоречит предположению о невырожденности.

Предложение 1. *Пусть F векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$ ранга 2 с тривиальным общим слоем и подскоками высоты n. Тогда*

$$H^1(\mathbb{P}^1_A, F(n-2)) \simeq A/\nu$$

для некоторого ν.

Доказательство. Положим $E = F(n-2)$. Выпишем ненулевой кусок длинной точной последовательности когомологий, полученной из короткой точной последовательности (1)

$$0 \to H^0(E) \to H^1(\mathcal{O}^{2n}(-3)) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(\mathcal{O}^{2n+2}(-2)) \to H^1(E) \to 0. \qquad (4)$$

Рассмотрим следующий базис

$$\frac{e_1}{t_0^2 t_1}, \ \frac{e_2}{t_0^2 t_1}, \ \cdots, \ \frac{e_{2n}}{t_0^2 t_1}, \ \frac{e_1}{t_0 t_1^2}, \ \frac{e_2}{t_0 t_1^2}, \ \cdots, \ \frac{e_{2n}}{t_0 t_1^2}$$

когомологий Чеха $H^1(\mathcal{O}^{2n}(-3))$ и базис

$$\frac{f_1}{t_0t_1}, \dots, \frac{f_{2n+2}}{t_0t_1}$$

когомологий $H^1(\mathcal{O}^{2n+2}(-2))$. Вычисления показывают, что матрица φ^* для данных базисов имеет следующий вид

$$\varphi^* = (\varphi_0, \varphi_1) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,2n-1} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,2n-1} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \cdots & a_{2n,2n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \nu & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Откуда легко видеть, что $H^1(\mathbb{P}^1_A, E) \simeq \operatorname{Coker} \varphi^* \simeq A/\nu$. □

Определение 4. *Дискриминантом расслоения мы будем называть идеал (ν) из предыдущего предложения.*

Замечание 1. В случае $A = \mathbb{Z}$ иногда мы будем называть дискриминантом положительного представителя соответствующего идеала.

Замечание 2. Подсчет групп когомологий над каждой точкой $\operatorname{Spec}(A)$ показывает, что делители дискриминанта соответствуют точкам подскока максимальной высоты расслоения, то есть n. Далее мы покажем это более подробно в случае расслоений с подскоками высоты 2.

1.4. Род векторного расслоения. По аналогии с теорией квадратичных форм (см. [15]), определим понятие рода векторных расслоений на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$.

Определение 5. *Будем говорить, что два расслоения F_1 и F_2 на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ имеют одинаковый род, если они изоморфны над $\mathbb{Z}_p$ для каждого p: $F_1 \otimes \mathbb{Z}_p \simeq F_2 \otimes \mathbb{Z}_p$.*

В связи с понятием рода возникает несколько вопросов.

(i) (*теорема конечности*) *Является ли множество классов изоморфизма расслоений имеющих данный фиксированный род конечным?*

(ii) (*число классов*) *Если да, то можно ли написать явную формулу для числа классов, выражающую зависимость от набора точек подскока или дискриминанта? Если же это не представляется возможным, то найти асимптотику.*

(iii) (*теорема существования*) *Верно ли, что если мы зафиксируем расслоение* F_p *на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ *для каждого* p, *то существует расслоение* F *на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *такое, что* $F \otimes \mathbb{Z}_p \simeq F_p$?

В данной работе мы ответим на первый вопрос и докажем теорему конечности для расслоений с подскоками высоты 1 и 2. Для расслоений с простыми подскоками эта теорема будет простым следствием известной классификации [1]. Классификация расслоений с подскоками высоты 2 еще не получена, но, тем не менее, с помощью теории приведения мы сможем ограничить некоторое множество матриц, которые соответствуют нашим расслоениям и этого достаточно для доказательства теоремы конечности.

На текущий момент мы также можем дать положительный ответ на третий вопрос для расслоений с подскоком высоты 1 – он естественным образом следует из классификации.

Предложение 2. *Расслоения одного рода имеют одинаковый дискриминант.*

Доказательство. Пусть зафиксировано два расслоения F и G ранга 2 с тривиальным общим слоем и подскоками высоты n на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с дискриминантами ν и μ соответственно, а также пусть выполняется условие $F \otimes \mathbb{Z}_p \simeq G \otimes \mathbb{Z}_p$ для каждого простого p. Дискриминанты (с точностью до единиц) являются инвариантами расслоения, поскольку все вычисления из предложения (1) верны для любого кольца. Рассмотрим ν и μ как элементы $\mathbb{Z}_p$, тогда имеем равенства $\nu = u_p \mu$ для каждого p. Таким образом, каждое простое p входит в разложения μ и ν в одинаковой степени. Поэтому идеалы, образованные ими, совпадают. □

Отметим также, что аналогичное утверждение верно для квадратичных форм (см. [10] 9.4, лемма 4.1).

Следствие 1 (теорема конечности для простых подскоков)**.** *Число классов изоморфизма расслоений ранга* 2 *на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *с простыми подскоками с фиксированным родом конечно.*

Доказательство. Из классификации расслоений с подскоками высоты 1 следует, что при фиксированном дискриминанте ν их число классов изоморфизма конечно, а так как у расслоений одного рода одинаковый дискриминант, то отсюда следует требуемый результат. □

Теорема 9 (теорема существования для простых подскоков)**.** *Пусть для каждого простого p зафиксировано расслоение F_p ранга 2 с простыми подскоками на проективной прямой над $\mathbb{Z}_p$. Тогда существует расслоение F на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ такое, что $F \otimes \mathbb{Z}_p \simeq F_p$.*

Доказательство. Пусть задано конечное множество простых чисел, в которых будут располагаться простые подскоки расслоения $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$. Для каждого простого $p \in P$ расслоение на $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ будет иметь вид $V_0(p^{k_p}, \epsilon_p)$, а для простых, в которых нет подскока, соответствующим расслоением будет $\mathcal{O}^2$.

Найдем дискриминант искомого расслоения: $\nu = \prod_{p \in P} p^{k_p}$, после чего, по китайской теореме об остатках находится ϵ такой, что $\epsilon \equiv \epsilon_p \pmod{p^{k_p}}$. Тогда расслоение $V_0(\nu, \epsilon)$ будет искомым. $\square$

§2. Расслоения с подскоками высоты 2

Пусть теперь E векторное расслоение на $\mathbb{P}^1_A$ с подскоками высоты 2 и тривиальным общим слоем. Тогда, как было показано выше, его можно представить в виде коядра стрелки φ в следующей короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^4(-3) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^6(-2) \longrightarrow E \longrightarrow 0. \tag{6}$$

Следуя общей конструкции, для явного задания стрелки φ зафиксируем базисы $e_1, \ldots, e_4$ и $f_1, \ldots, f_6$ расслоений $\mathcal{O}^4$ и $\mathcal{O}^6$. Тем самым, получим отождествление

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}^4(-3), \mathcal{O}^6(-2)) \simeq M_{6,4}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)))$$

и стрелка φ представится в виде $\varphi = t_0\varphi_0 + t_1\varphi_1$ с $\varphi_0, \varphi_1 \in M_{6,4}(A)$,

$$\varphi = t_0 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \epsilon_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \epsilon_2 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \epsilon_3 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \epsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

2.1. Подскоки расслоения, заданного как $\mathrm{Coker}\,\varphi$**.** Теперь нам необходимо выяснить как связаны точки подскока нашего расслоения E с элементами матрицы φ. Мы покажем, что точки подскока высоты 2 являются простыми делителями ν, а точки подскока высоты 1 окажутся простыми делителями определителя

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

Для того, чтобы получить это, нам будет необходимо вычислить когомологии расслоения E и его подкрутки на -1 и сравнить их с когомологиями пучков $\mathcal{O}^2$, $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(2)$.

Теорема 10. *Пусть* $F = \mathrm{Coker}(\varphi)$, *для стрелки* φ *имеющей вид, к которому мы привели наши матрицы ранее. Тогда*

$$H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}}, F) = A \oplus A, \quad H^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}}, F) = A/\nu.$$

Доказательство. Напишем ненулевой кусок точной длинной последовательности когомологий, полученной из короткой точной последовательности (6)

$$0 \longrightarrow H^0(E) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}^4(-3)) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(\mathcal{O}^6(-2)) \longrightarrow H^1(E) \longrightarrow 0. \quad (8)$$

Рассмотрим базис

$$\frac{e_1}{t_0^2t_1}, \frac{e_2}{t_0^2t_1}, \frac{e_3}{t_0^2t_1}, \frac{e_4}{t_0^2t_1}, \frac{e_1}{t_0t_1^2}, \frac{e_2}{t_0t_1^2}, \frac{e_3}{t_0t_1^2}, \frac{e_4}{t_0t_1^2}$$

когомологий Чеха $H^1(\mathcal{O}^4(-3))$ и базис

$$\frac{f_1}{t_0t_1}, \frac{f_2}{t_0t_1}, \dots, \frac{f_6}{t_0t_1}$$

когомологий $H^1(\mathcal{O}^6(-2)$. В данном случае матрица φ^* имеет следующий вид

$$\varphi^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \epsilon_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \epsilon_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \epsilon_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \epsilon_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда, как ранее было показано, $H^1(\mathbb{P}^1_A, F) \simeq \mathrm{Coker}\,\varphi^* \simeq A/\nu$, а также $H^0(\mathbb{P}^1_A, F) \simeq \mathrm{Ker}\,\varphi^* \simeq A \oplus A$, поскольку $\nu \neq 0$ и в качестве фундаментальной системы решений берутся

$$(\alpha_1, 0, 0, 0, -a_{11}\alpha_1, -a_{21}\alpha_1, -a_{31}\alpha_1, -a_{41}\alpha_1)^T$$

и

$$(0, \alpha_2, 0, 0, -a_{12}\alpha_2, -a_{22}\alpha_2, -a_{32}\alpha_2, -a_{42}\alpha_2)^T. \qquad \square$$

Предложение 3. *В условиях предыдущей теоремы, подскоки высоты 2 векторного расслоения F совпадают с простыми делителями ν.*

Доказательство. Заметим, что $H^1(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{O}^2) = 0$,

$$H^1(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)) = 0 \quad \text{и} \quad H^1(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(2)) = R$$

и т. д., где R область целостности. Тогда, если π простой делитель ν, то над точкой (π) наше расслоение изоморфно $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(2)$. Это следует из теоремы Гротендика и из того, что если мы проведем вычисления из предыдущей теоремы над $\mathbb{P}^1_A \otimes A/\pi$, то получим, что группы когомологий пучка $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(2)$ и пучка F_π совпадают. □

Теорема 11. *В условиях предыдущей теоремы, имеем*

(i) $H^0(\mathbb{P}^1_A, F(-1)) = 0$.
(ii) *Точки с простыми подскоками совпадают с простыми делителями* $D_1 = \det \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$, *не являющимися простыми делителями* ν.
(iii) $\left|H^1(\mathbb{P}^1_A, F(-1))\right| = \left|A/D_1\nu^2 A\right|$.

Доказательство. (i) и (ii). Длинная точная последовательность для подкрученного векторного расслоения будет иметь вид

$$0 \to H^0(E(-1)) \to H^1(\mathcal{O}^4(-4)) \xrightarrow{\varphi(-1)^*} H^1(\mathcal{O}^6(-3)) \to H^1(E(-1)) \to 0.$$

Зафиксируем базис

$$\frac{e_1}{t_0^3 t_1}, \dots, \frac{e_4}{t_0^3 t_1}, \ \frac{e_1}{t_0^2 t_1^2}, \dots, \frac{e_4}{t_0^2 t_1^2}, \ \frac{e_1}{t_0 t_1^3}, \dots, \frac{e_4}{t_0 t_1^3}$$

для $H^1(\mathcal{O}^4(-4))$ и базис

$$\frac{f_1}{t_0^2 t_1}, \dots, \frac{f_6}{t_0^2 t_1}, \ \frac{f_1}{t_0 t_1^2}, \dots, \frac{f_6}{t_0 t_1^2}.$$

для $H^1(\mathcal{O}^6(-3))$. Матрица $\varphi(-1)^*$ в этих базисах будет выглядеть следующим образом

$$\varphi(-1)^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \epsilon_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \epsilon_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \epsilon_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \epsilon_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & \epsilon_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & \epsilon_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & \epsilon_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{41} & a_{42} & \epsilon_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Считаем, что $\nu \neq 0$, поскольку иначе над общим слоем будет подскок высоты 2. Пусть $R = A/\pi$, где π простой элемент A и $(\pi, \nu) = 1$. Несложные вычисления показывают, что размерность ядра $\varphi(-1)^*$ равняется

$$2 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим, какими могут быть когомологии подкрутки нашего расслоения над сечениями с разными подскоками:

$$H^0(\mathbb{P}^1_B, \mathcal{O}(-1)^2) = 0, \qquad H^0(\mathbb{P}^1_B, \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}) = B,$$
$$H^0(\mathbb{P}^1_B, \mathcal{O}(-3) \oplus \mathcal{O}(1)) = B^2. \tag{11}$$

Поэтому имеем

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \neq 0,$$

так как иначе (π) – точка подскока высоты 2 и $\pi | \nu$. Также отметим, что $D_1 \neq 0$, поскольку у нас нет подскока в общей точке. Осталось сказать, что точки подскока высоты 1 совпадают с простыми делителями D_1, поскольку при сужении расслоения на них ранг ядра будет 1 и наоборот.

(iii). Легко увидеть, что в образе $\varphi(-1)^*$ лежат 12 векторов, разобьем их на две группы и запишем в виде матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\a_{31}&a_{32}&\epsilon_3&1&0\\a_{41}&a_{42}&\epsilon_4&0&1\\0&0&\nu&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&\nu&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, нахождение коядра сводится к вычислению нормального диагонального вида матрицы

$$\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&\epsilon_3&1&0\\a_{41}&a_{42}&\epsilon_4&0&1\\0&0&\nu&0&0\\0&0&0&\nu&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Чтобы проверить, что D_1 является инвариантом расслоения, нам достаточно посчитать произведение элементарных делителей, которое, в свою очередь, совпадает с определителем $D_1\nu^2$ последней матрицы. Таким образом $\left|H^1(\mathbb{P}^1_A, F(-1))\right| = |\operatorname{Coker}\varphi(-1)^*| = \left|A/D_1\nu^2 A\right|$.
Утверждение (ii) также следует из вычислений первых когомологий и коядра, поскольку имеются равенства (11), а последняя матрица, рассмотренная по модулю π, эквивалентна

$$\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

□

Следствие 2. (D_1) *и* (ν) *являются инвариантами нашего расслоения, точки подскока высоты* 2 *совпадают с простыми делителями* ν, *а точки с простыми подскоками совпадают с простыми делителями* D_1, *отличными от делителей* ν.

Следствие 3. *Если* π *делит* ν, *то* $\gcd(a_{41}, a_{42}, \epsilon_4) \neq 0 \pmod{\pi}$.

Доказательство. Если это не так, то первые 3 столбца матрицы (12) можно сделать нулевыми с помощью элементарных преобразований в кольце A/π, а тогда ранг коядра $\varphi(-1)^*$ будет 3, что соответствует подскоку высоты 3. □

2.2. Гомоморфизмы расслоений с подскоками высоты 2. Сейчас мы изучим гомоморфизмы между двумя векторными расслоениями с подскоками высоты 2. Они будут соответствовать матрицам, удовлетворяющим некоторым условиям целочисленности. Пусть имеется 2 расслоения E и F и первому соответствует матрица

$$\varphi = t_0 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \epsilon_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \epsilon_2 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \epsilon_3 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \epsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а второму

$$\psi = t_0 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \xi_1 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \xi_2 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \xi_3 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & \xi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из функториальности спектральной последовательности Бейлинсона следует, что задание морфизма $E \to F$ равносильно заданию коммутативной диаграммы следующего вида

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}^4(-3) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}^6(-2) & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}^4(-3) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{O}^6(-2) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{13}$$

То есть, если отождествлять морфизмы с соответствующими матрицами для базисов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$, то получаем условие

$$\psi\theta = \lambda\varphi.$$

Для удобства разобьем матрицы θ и λ на блоки:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

где $\theta_1, \cdots, \theta_4, \lambda_4 \in M_{2,2}(A)$, $\lambda_1 \in M_{4,4}(A)$, $\lambda_2 \in M_{4,2}(A)$, $\lambda_3 \in M_{2,4}(A)$. Также мы введем следующие обозначения

$$N(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N'(\nu) = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

M_1 и M_2 – верхние блоки матриц φ_0 и ψ_0 соответственно:

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} M_1 \\ N(\nu) \end{pmatrix}, \quad \psi_0 = \begin{pmatrix} M_2 \\ N(\mu) \end{pmatrix}.$$

Предложение 4. *Приведенная выше конструкция отождествляет $Hom_{\mathcal{O}}(E, F)$ с множеством матриц $\theta \in M_{4,4}(A)$, удовлетворяющих следующим трем условиям целочисленности*

(i) $N(\mu)\theta = \lambda_4 N(\nu)$, *для некоторой матрицы* $\lambda_4 \in M_{2,2}(A)$;

(ii) $(M_2\theta - \theta M_1)_{*,k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *с* $k = 1, 2$;

(iii) $\lambda_2 = (M_2\theta - \theta M_1)_{*,k} N'(\nu)^{-1} \in M_{4,2}(A)$ *с* $k = 3, 4$.

Доказательство. В условии коммутативности диаграммы (13) приравняем коэффициенты из левой и правой части при t_0 и t_1. Из равенства коэффициентов при t_1 следует, что $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_1 = \theta$. В то же время, из равенства коэффициентов при t_0 для нижних правых блоков матрицы мы получаем $N(\mu)\theta = \lambda_4 N(\nu)$, а для верхних блоков $M_2\theta = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 N(\nu) = \theta M_1 + \lambda_2 N(\nu)$. Первые два столбца матрицы $\lambda_2 N(\nu)$ нулевые, поэтому получаем (ii), а для оставшихся столбцов получаем (iii). □

Следствие 4. *$\theta_3 = 0$ и $N'(\mu)\theta_4 = \lambda_4 N'(\nu)$.*

Доказательство. Достаточно расписать поэлементно условие (i). □

2.3. Классы изоморфизма расслоений с подскоками высоты 1. Для начала, изучим вырожденный случай $\nu = 1$ без подскоков высоты 2. Попробуем привести матрицу φ к наиболее простому виду и сопоставить задание расслоения с подскоками высоты 1 с помощью матрицы φ размера 6 на 4 и с помощью матрицы 4 на 2 из работы [1]. Итак, пусть имеется расслоение E, задаваемое как коядро стрелки

$$\varphi = t_0 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Разобьем матрицу φ_0 на блоки размера 2 на 2 следующим образом:

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ A_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}.$$

Также, пусть имеется некоторый изоморфизм, заданный матрицей $\theta \in \mathrm{GL}_4(A)$, удовлетворяющей условиям целочисленности из предложения (4) (это будет действительно изоморфизм, поскольку матрица λ тоже будет обратимой, условия (i)–(iii) для обратного морфизма в данном случае очевидным образом выполняются). Посмотрим, как на наше расслоение будут действовать изоморфизмы, то есть как будут выражаться элементы матрицы ψ через элементы матриц φ и θ.
Из условия коммутативности диаграммы (13) получаем $\psi_0 = \lambda\varphi_0\theta^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} \theta & \lambda_2 \\ \mathbb{O} & \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ A_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^{-1} & * \\ \mathbb{O} & \theta_4^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 A_1 \theta_1^{-1} + \theta_2 A_2 \theta_1^{-1} & * \\ \theta_4 A_2 \theta_1^{-1} & * \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}.$$

Элементы на месте звездочек в последней матрице, как и раньше, можно сделать нулевыми при помощи 5-ой и 6-ой строк матрицы (то есть с помощью подходящего выбора θ_2). Таким образом под действием гомоморфизма блоки A_1 и A_2 изменяются следующим образом:

$$A_1 \mapsto B_1 = \theta_1 A_1 \theta_1^{-1} + \theta_2 A_2 \theta_1^{-1}, \qquad (15)$$

$$A_2 \mapsto B_2 = \theta_4 A_2 \theta_1^{-1}. \qquad (16)$$

Для наших целей будет достаточно рассматривать морфизмы с $\theta_2 = \mathbb{O}$. Матрицы θ_i должны удовлетворять условиям целочисленности (i)–(iii), распишем их. Первое и третье условия являются в нашем случае тривиальными ($\mu = \nu = 1$). Второе условие даёт нам следующее:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ A_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & \mathbb{O} \\ B_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} A_1\theta_1 \\ A_2\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1^2 A_1 \theta_1^{-1} \\ \theta_4^2 A_2 \theta_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, условия целочисленности требуют, чтобы для θ_1 и θ_4 выполнялись следующие равенства

$$A_1\theta_1^2 = \theta_1^2 A_1, \quad A_2\theta_1^2 = \theta_4^2 A_2. \tag{17}$$

Окажется, что для наших целей достаточно рассмотреть более узкий класс морфизмов, в котором в качестве матриц θ_1 и θ_4 берутся инволютивные матрицы, то есть такие, которые в квадрате дадут единичную матрицу: $\theta_1^2 = \theta_4^2 = I$. Очевидно, что преобразования с такими матрицами удовлетворяют условиям (17).

Замечание 3. Если не требовать, чтобы $\theta_2 = \mathbb{O}$, то есть разрешить матрице A_2 влиять на действие морфизмов на матрицу A_1, то второе условие (17) останется прежним, а первое примет следующий вид

$$\theta_1^2 A_1 + (\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_4)A_2 = A_1\theta_1^2.$$

Лемма 1. *Пусть кольцо R таково, что $\mathrm{SL}_2(R) = \mathrm{E}_2(R)$, где $\mathrm{E}_2(R)$ подгруппа $\mathrm{SL}_2(R)$, порожденная элементарными трансвекциями (т.е. матрицами, у которых на диагонали стоят 1, а вне диагонали имеется только один ненулевой элемент). Тогда любой элемент из $\mathrm{SL}_2(R)$ представляется в виде конечного произведения инволютивных матриц.*

Доказательство. Любая элементарная трансвекция представляется в виде произведения двух инволютивных матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для нижнетреугольных матриц транспонируем это равенство. Поскольку, по предположению, $\mathrm{SL}_2(R)$ порождается элементарными трансвекциями, лемма доказана. $\square$

Замечание 4. Любую матрицу можно привести к нормальной форме Смита используя только матрицы из $\mathrm{SL}_2(R)$.

Доказательство. Пусть $P, Q \in \mathrm{GL}_2(R)$ и $A' = PAQ$ – нормальная форма Смита матрицы A. Пусть $\det P = u_1^{-1}$, $\det Q = u_2^{-1}$ и

$$T = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $P' = TP, Q' = QS \in \mathrm{SL}_2(R)$. Тогда $A'' = TA'S = P'AQ'$ будет искомой нормальной формой Смита (с отличающимися на единицы от первоначальных элементарными делителями). $\square$

Теорема 12. *Пусть кольцо A таково, что $\mathrm{SL}_2(A) = \mathrm{E}_2(A)$ и пусть имеется расслоение E, задаваемое как коядро стрелки* (14). *Тогда оно изоморфно расслоению, задаваемому, как коядро стрелки ψ, с*

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Как мы отметили выше, на блок A_2 матрицы φ мы можем действовать слева и справа инволютивными матрицами. Пусть

$$A_2' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = PA_2Q$$

– нормальная форма Смита матрицы A_2, полученная с помощью матриц из $\mathrm{SL}_2(A)$ из предыдущего замечания. По лемме 1 эти матрицы представляются в виде произведения инволютивных матриц. Подействуем автоморфизмами на наше расслоение E сначала такими, у которых $\theta_4 = I$, а θ_1 последовательно пробегает матрицы из разложения Q на инволютивные, а затем автоморфизмами у которых $\theta_1 = I$, и θ_4 пробегает разложение P, но в обратном порядке. В итоге мы получим изоморфное расслоение, но с A_2' вместо A_2 в качестве соответствующего блока матрицы φ.

Далее мы воспользуемся тем же аргументом, что и раньше и скажем, что $b = 1$, иначе опять найдется π – простой делитель a и b и следовательно на $\mathbb{P}^1 \otimes A/\pi$ найдется точка, в которой ненулевые миноры размера 4

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}t_0 + t_1 & a_{12}t_0 & 0 & 0 \\ a_{21}t_0 & a_{22}t_0 + t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_j \end{pmatrix}$$
$$= t_it_j(t_1^2 + t_0t_1(a_{11}+a_{22}) + t_0^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}))$$

обнулятся. После этого, обнулим ненулевые элементы из второго столбца, стоящие над единицей.

Чтобы обнулить элемент a_{11} поступим также, как и в работе [1]. Ограничим наше расслоение на $x = -a_{11}$, после чего из невырожденности будет следовать, что $(\beta, a_{21}) = 1$, а значит найдутся $\bar{\beta}, \bar{a}_{21} \in A$ такие, что $\bar{\beta}\beta + \bar{a}_{21}a_{21} = 1$. После этого вычтем из первой строки вторую, умноженную на $\bar{a}_{21}a_{11}$ и третью, умноженную на $\bar{\beta}a_{11}$, после чего подправим второй и третий столбцы с помощью первого для того, чтобы вернуть исходный вид матрицы φ_1, затем последовательно, как и раньше, обнулим элементы матрицы φ_0 стоящие над единицами на нижней диагонали подправляя при этом матрицу φ_1. Эти преобразования, наконец, приводят нашу матрицу к нужному виду. □

Замечание 5. Условиям теоремы удовлетворяют, например, все евклидовы кольца, а также дедекиндовы области главных идеалов арифметического типа (в т.ч. кольца целых числовых полей) с бесконечной группой единиц, см. [2].

Замечание 6. Несложными вычислениями можно показать, что задание расслоения с подскоками высоты 1 с помощью матрицы ψ, как в предыдущей теореме, совпадает с заданием такого расслоения с помощью матрицы

$$\varphi = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ \varepsilon t_0 & t_1 \\ \nu t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{pmatrix}$$

из работы [1], где $\nu = \beta, \ \varepsilon = \alpha$.

2.4. Автоморфизмы расслоений с подскоками высоты 2. Вернемся к случаю расслоений с подскоками высоты 2, то есть теперь ν не единица кольца A. Итак, пусть E векторное расслоение на P^1_A ранга 2 с подскоками высоты 2, которое задается как коядро стрелки φ из начала 2.2. Как и в предыдущем разделе нам будет достаточно рассматривать автоморфизмы E, задаваемые матрицами θ, у которых блок $\theta_2 = \mathbb{O}$. Обозначим элементы в блоках θ_1 и θ_4 следующим образом:

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{13} & \theta_{14} \end{pmatrix}, \quad \theta_4 = \begin{pmatrix} \theta_{41} & \theta_{42} \\ \theta_{43} & \theta_{44} \end{pmatrix}.$$

Под действием автоморфизма блоки A_1 и A_2 матрицы φ_0 будут изменяться согласно формулам (15) и (16), ν является инвариантом расслоения с точностью до единиц, поэтому $N(\nu)$ перейдет в $N(\mu)$, где $\mu = \nu u$, u – единица кольца A. Не умаляя общности можем считать $\mu = \nu$. Распишем теперь условия целочисленности из следствия 4. Условие (i) дает нам

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} \theta_{41} & \nu\theta_{42} \\ \nu^{-1}\theta_{43} & \theta_{44} \end{pmatrix},$$

откуда $\nu \,|\, \theta_{43}$. Как и раньше, мы ограничимся автоморфизмами с $\theta_2 = 0$, тогда условие (ii) будет выглядеть так же, как и в случае $\nu = 1$, то есть получаем 2 уравнения (17). Распишем условие (iii):

$$\lambda_2 = (M_2\theta - \theta M_1)_{*,3-4}\, N'(\nu)^{-1} = \begin{pmatrix} \nu^{-1}(\epsilon_1\theta_{41} - \xi_1\theta_{11} - \xi_2\theta_{12}) & \epsilon_1\theta_{42} \\ \nu^{-1}(\epsilon_2\theta_{41} - \xi_1\theta_{13} - \xi_2\theta_{14}) & \epsilon_2\theta_{42} \\ \nu^{-1}(\epsilon_3\theta_{41} - \xi_3\theta_{41} - \xi_4\theta_{42}) & \epsilon_3\theta_{42} \\ \nu^{-1}(\epsilon_4\theta_{41} - \xi_3\theta_{43} - \xi_4\theta_{44}) & \epsilon_4\theta_{42} \end{pmatrix}.$$

Это дает нам систему сравнений

$$\begin{cases} \epsilon_1\theta_{41} \equiv \xi_1\theta_{11} + \xi_2\theta_{12} \pmod{\nu} \\ \epsilon_2\theta_{41} \equiv \xi_1\theta_{13} + \xi_2\theta_{14} \pmod{\nu} \\ \epsilon_3\theta_{41} \equiv \xi_3\theta_{41} + \xi_4\theta_{42} \pmod{\nu} \\ \epsilon_4\theta_{41} \equiv \xi_3\theta_{43} + \xi_4\theta_{44} \pmod{\nu} \end{cases} \tag{18}$$

Отметим, что условие (iii) не ограничивает θ_1, θ_4 в том смысле, что при выборе $\xi_1, \ldots, \xi_4$ в качестве решения системы уравнений (18) при уже фиксированных θ_{ij}, эта система разрешима (ξ_i рассматриваются как неизвестные, а θ_{ij} как константы), поскольку θ_1, θ_4 обратимы.

Теперь у нас имеется возможность привести матрицу A_2 к более простому виду. Будем действовать похожим образом, как и в случае $\nu = 1$. Пусть $A_2' = A_2T$ – эрмитова нормальная форма матрицы A_2, то есть A_2 нижнетреугольная матрица, а $T \in \mathrm{SL}_2(A)$. Разложим T в произведение инволютивных матриц и затем подействуем на наше расслоение последовательно автоморфизмами с матрицами $\theta_1 = I$, и матрицами θ_4, пробегающими матрицы из разложения T на инволютивные. Таким образом мы получим изоморфное расслоение с нижнетреугольным блоком A_2 матрицы φ_0. Этого достаточно, чтобы доказать конечность классов изоморфизма расслоений с фиксированными родами.

Теорема 13. *Пусть кольцо A таково, что* $\mathrm{SL}_2(A) = \mathrm{E}_2(A)$ *и группа единиц $A^\times$ конечна. Предположим, что зафиксировано* 2 *идеала кольца $(a), (b)$ и $(a) \neq A$. Тогда существует лишь конечное число классов изоморфизма векторных расслоений ранга* 2 *на $\mathbb{P}^1_A$ с подскоками высоты* 2 *с фиксированными инвариантами $(\nu) = (a)$ и $(D_1) = (b)$.*

Доказательство. Итак, пусть имеется расслоение E с фиксированными инвариантами, задаваемое матрицей φ. Предыдущими преобразованиями мы установили, что оно изоморфно расслоению, задаваемому следующей матрицей

$$\psi = t_0 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \epsilon_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \epsilon_2 & 0 \\ a_{31} & 0 & \epsilon_3 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \epsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Отметим, что a_{31}, a_{42} могут принимать только конечное множество значений, поскольку $a_{31}a_{42} = D_1$ с точностью до единицы, и группа единиц по предположению конечна. Далее мы заключаем, что элемент a_{41} пробегает конечное множество значений, поскольку мы можем прибавлять к первому столбцу второй, подправляя при этом вторую строку (для матрицы φ_1), как и раньше, поэтому элемент a_{41} определен по модулю a_{42}. Таким образом, количество матриц A_2 нижнетреугольного вида, которые соответствуют нашим расслоениям с фиксированными инвариантами, конечно.

Теперь установим конечность множества матриц A_1. Заметим, что элементы a_{12} и a_{22} определены по модулю a_{42} – к первой и второй строке нашей матрицы мы можем прибавлять четвертую, при этом подправляя вторым столбцом четвертый (матрицы φ_1), после чего шестой строкой матрицы φ_0 зануляя элементы стоящие над единицей. Точно так же доказывается, что элементы a_{11}, a_{21} определены по модулю a_{31}, только в этом случае во время исправления матрицы φ_1 элементы ϵ_i будут каким-то образом меняться, но нам пока не важно каким. При этом матрица A_2 никак не изменится.

Итак, элементы матриц A_1 и A_2 пробегают конечное множество значений, осталось заметить, что ϵ_i определены по модулю ν, причем соответствующие преобразования не изменяют матриц A_1 и A_2.

Таким образом, для некоторого расслоения с фиксированными инвариантами мы привели его матрицу φ к некоторой матрице ψ, которых при фиксированных инвариантах конечное число. $\square$

2.5. Теорема конечности для подскоков высоты 2. Теперь у нас есть все необходимое для доказательства теоремы конечности для расслоений с подскоками высоты 2.

Теорема 14. *Число классов изоморфизма расслоений ранга* 2 *на* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *с подскоками высоты* 2 *с фиксированным родом конечно.*

Доказательство. Пусть имеется 2 расслоения одного рода F_1 и F_2 с основными инвариантами $\nu_i, D_{1,i}$, где $i = 1, 2$. Как и в случае расслоений с простыми подскоками, сначала мы устанавливаем равенство идеалов $(\nu_1) = (\nu_2)$ и $(D_{1,1}) = (D_{1,2})$, поскольку они являются инвариантами расслоения по следствию (2) и их вычисление не зависит от базового кольца. После чего требуемый результат следует из теоремы 13. $\square$

Список литературы

1. A. L. Smirnov, *On filtrations of vector bundles over* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Arithmetic and Geometry, London Math. Soc. Lect. Note Series **420**, Cambridge Univ. Press, 2015, 436–457.
2. Л. Н. Васерштейн, *О группе* SL_2 *над дедекиндовыми кольцами арифметического типа.* — Матем. сб. **89(131)** : 2(10) (1972), 313–322.
3. D. Quillen, *Projetive modules over polynomial rings.* — Invent. Math. **36** (1976), 167–171.
4. А. А. Суслин, *Проективные модули над кольцом многочленов свободны.* — Докл. АН СССР **229**, 5 (1976), 1063–1066.
5. A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphére de Riemann.* — Amer. Journal of Math. **79** (1) (1957).
6. A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique: II.* — Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. Publications Mathématiques de l'IHÉS **8** (1961).
7. Ch. C. Hanna, *Subbundles of vector bundles on the projective line.* — J. Algebra **52**, no. 2 (1978), 322–327.
8. G. Horrocks, *Projective modules over an extension of a local ring.* — Proc. London Math. Soc. (3) **14** (1964), 714–718.
9. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* Москва, Мир, 1981.
10. J. W. S. Cassels, *Rational Quadratic Forms.* Academic press, 1978.
11. А. Л. Смирнов, *Векторные расслоения на* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *с простыми подскоками.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **452** (2016), 202–217.
12. С. С. Яковенко, *Векторные расслоения на* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *с общим слоем* $\mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$ *и простыми подскоками.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **452** (2016), 218–237.

13. А. А. Бейлинсон, *Когерентные пучки на* $\mathbf{P}^n$ *и проблемы линейной алгебры.* — Функц. анализ и его приложения **12**, 3 (1978), 68–69.
14. К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер, *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах.* Москва, Мир, 1984.
15. D. A. Cox, *Primes of the Form* x^2+ny^2: *Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication.* Monographs and textbooks in pure and applied math., Wiley, 1989.

Polyakov V. M. Finiteness of the number of classes of vector bundles on $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ with jumps of height 2.

We consider vector bundles of rank 2 with jumps of heights 1 and 2 and a trivial generic fiber on the arithmetic surface $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$. The finiteness of the number of isomorphism classes of such vector bundles with a fixed discriminant and, as a consequence, with a fixed genus is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: `polyakov@pdmi.ras.ru`

Поступило 6 октября 2022 г.