Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 511, 2022 г.

В. Г. Журавлев

СИММЕТРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

Введение

Универсальные ядерные разбиения $\mathcal{T}(v,\mu,\rho)$ порождаются параллелепипедами $T_0, T_1, \ldots, T_d$, разбивающими пространство $\mathbb{R}^d$. Разбиения $\mathcal{T}(v,\mu,\rho)$ параметризуются тройками (v,μ,ρ), пробегающими бесконечный цилиндр $\triangle\times\triangle\times\mathbb{R}$ с основанием $\triangle\times\triangle$ – прямым произведением двух симплексов $\triangle$ размерности d. Параметр v определяет геометрию параллелепипедов T_k, а два дугих μ,ρ – симметрию ядерного разбиения $\mathcal{T}(v,\mu,\rho)$.

В настоящей статье мы сосредотачиваемся на важном классе разбиений

$$\mathcal{T}(v,\mu)=\mathcal{T}(v,\mu,0) \tag{0.1}$$

содержащих в себе *ядро*

$$\mathrm{Kr}=T_0\cup T_1\cup\ldots\cup T_d \tag{0.2}$$

– центрально-симметричный многогранник, представляющим собою параллелоэдр. Еще одна характерная особенность ядерных разбиений (0.1) состоит в существовании для них двойственных разбиений

$$\mathcal{T}^*(v,\mu)=\mathbf{s}\,\mathcal{T}(v,\mu) \tag{0.3}$$

– симметричных образов разбиений $\mathcal{T}(v,\mu)$ относительно центральной симметрии $\mathbf{s}$, центр которой совпадает с центром ядра (0.2).

В настоящей статье мы покажем, что ядерные разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$ имеют два вида симметрий: 1) обычные симметрии, переводящие разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$ в себя; 2) квазисимметрии, связывающие разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$ с двойственными им разбиениями $\mathcal{T}^*(v,\mu)$ из (см. предложение 4.1, теоремы 8.1, 10.1, 11.1). Название *ядро*, по-видимому, появилось впервые в [1] при изучении одномерных разбиений Фибоначчи. Однако роль ядер была осознана после открытия и исследования фрактального разбиения Рози [2, 3].

Ключевые слова: универсальные ядерные разбиения, ступенчатые поверхности (stepped surfaces), звездные графы разбиений.

К построению ядерных разбиений произвольной размерности d ведут два пути: 1) метод дифференцирования индуцированных торических разбиений [4] и 2) метод локальных правил [5,6]. Другой подход, не связанный с ядерными разбиениями и использующий ступенчатые поверхности (stepped surfaces) в трехмерном пространстве, изложен в [7–11].

Ядерные разбиения обладают множеством интересных арифметических, геометрических, комбинаторных свойств и уже нашли применения в кристаллографии [12–14], а также в изучении множеств ограниченного остатка [3,15] и многомерных цепных дробей [4,16].

§1. Универсальные ядерные разбиения. Основные определения

1.1. Взвешенные звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0,1,\dots,d\}$. Пусть $v_0, v_1, \dots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\} = \{0,1,\dots,d\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетение. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие $\sigma \Leftrightarrow \sigma'$. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

Определение 1.1. *Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через*

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \ldots + \lambda_{k'_{d-1}} v_{k'_{d-1}};\ \lambda_{k'_1}, \dots, \lambda_{k'_{d-1}} \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Такое множество векторов

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\} \tag{1.2}$$

назовем звездой, если для всех дополнительных к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости (1.1) *и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.*

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ будут линейно независимы.

Каждому вектору v_k звезды v из (1.2) поставим в соответствие его *вес* μ_k – вещественное число, а всей звезде v – *весовой вектор*

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d) \tag{1.3}$$

с нормирующим условием

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_d = 1, \tag{1.4}$$

где

$$\mu_k > 0 \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, d. \tag{1.5}$$

Звезда $v = v_\mu$, снабженная весовым вектором (1.3)–(1.5), называется *взвешенной звездой*.

1.2. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \ldots, d$ замкнутые d-мерные *параллелепипеды*

$$T_k = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_d} v_{k_d};\ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{1.6}$$

где $k_1, \ldots, k_d$ – дополнительные к k индексы в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Множество лучей $v_{k_1}, \ldots, v_{k_d}$ назовем *остовом* параллелепипеда T_k из (1.6). Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ является звездой (1.2), то объединение

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_d \tag{1.7}$$

параллелепипедов (1.6) образует *параллелоэдр* [15,17] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} T[l] \tag{1.8}$$

с помощью параллельных переносов $T[l] = T + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $T[l]$ из (1.8) не имеют общих внутренних точек. Здесь

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_d] \tag{1.9}$$

– *полная решетка* в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \ldots, l_d$, состоящим из векторов

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, d \tag{1.10}$$

Для $d = 2$ параллелоэдр T из (1.7) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [18], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [19].

Из разбиения (1.8) следует, что параллелоэдр T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d / L$, т.е. параллелоэдр T можно отождествить с самим тором $\mathbb{T}^d_L$ через каноническое отображение

$$T \overset{\longrightarrow}{\sim} \mathbb{T}^d_L:\ x \mapsto x \bmod L, \tag{1.11}$$

при этом, с точностью до множества граничных точек $\partial T = T \setminus T^{\mathrm{int}}$, отображение (1.11) есть биекция. В [17] доказано, что для развертки T существует *перекладывание*

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{1.12}$$

на векторы $v_0, v_1, \ldots, v_d$ звезды v, связанные с базисом (1.9) решетки L равенствами (1.10). В формуле (1.12) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (1.7), где $k = 0, 1, \ldots, d$. Развертки T, обладающие свойством (1.12), называются *перекладывающимися*.

Заметим, что при переходе (1.10) от векторов переклыдывания v_0, $v_1, \ldots, v_d$ к базизу $l_1, \ldots, l_d$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{1.13}$$

В частности, из равенств (1.10) и (1.13) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$. Поэтому перекладывание (1.12) эквивалентно сдвигу

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{1.14}$$

тора $T = \mathbb{T}^d_L$ на вектор $\alpha' \bmod L$.

1.3. Звездный граф. Дополнительно к (1.2) введем *симметризованную звезду*

$$w = \{w_0, w_1, \ldots, w_d\}, \tag{1.15}$$

состоящую из лучей $w_k = \pm v_k$, где v_k принадлежат звезде v, и имеющих соответственно *веса*

$$\mu w_k = \mathrm{sign}(w_k)\mu_k. \tag{1.16}$$

Здесь *знаки* $\mathrm{sign}(w_k)$ звезд w_k определены условиями $\mathrm{sign}(w_k) = +1$ или -1 для $w_k = +v_k$ или $w_k = -v_k$ соответственно.

Рассмотрим *ориентированный граф* $\overrightarrow{G}$ с *вершинами*

$$\overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}} \; = \; \{x = x(a);\ a \in \mathbb{Z}^{d+1},\ \mu x \in \mathfrak{I}\}, \tag{1.17}$$

при этом

$$x = x(a) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \ldots + a_d v_d \tag{1.18}$$

или в других обозначениях, которые далее будут использоваться,

$$x = x(a) = a \circ v, \tag{1.19}$$

где полагаем

$$a \circ v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \ldots + a_d v_d \tag{1.20}$$

– точка из пространства $\mathbb{R}^d$ с *индексом* $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ из решетки Z^{d+1}; *вес* μx точки $x = x(a)$ определен равенством

$$\mu x = a_0\, \mu v_0 + a_1\, \mu v_1 + \ldots + a_d\, \mu v_d = \mu a, \tag{1.21}$$

где справа

$$\mu a = a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \ldots + a_d \mu_d \tag{1.22}$$

– *вес* индекса a, определяемый по весовому вектору $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d)$ из (1.3); $\mathfrak{I}= [0, 1)$ – *единичный полуинтервал.*

Вершины x, $x' \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$ соединим *дугой* w_k – ориентированным ребром с номером $k = 0, 1, \ldots, d$, если

$$x' - x = w_k \in w. \tag{1.23}$$

Здесь справа указана симметризованная звезда (1.15). Если же вершины $x = x(a)$, $x' = x'(a')$ записать в терминах индексов (1.18), то (1.23) будет эквивалентно условию

$$a' - a = \varepsilon_k^{\pm} \in \varepsilon^{\pm}, \tag{1.24}$$

при этом

$$\varepsilon^{\pm} = \{\varepsilon_0^{\pm}, \varepsilon_1^{\pm}, \ldots, \varepsilon_d^{\pm}\}, \tag{1.25}$$

где $\varepsilon_k^{\pm} = \pm\varepsilon_k$, – *симметризованная единичная звезда*, получающаяся симметризацией *единичного базиса*

$$\varepsilon_0 = (0, \ldots, 0, 1), \quad \varepsilon_1 = (1, \ldots, 0, 0), \quad \varepsilon_d = (0, \ldots, 1, 0) \tag{1.26}$$

пространства $\mathbb{R}^{d+1}$. Если единичным векторам ε_k придать *веса*

$$\mu\varepsilon_k = \mu_k \tag{1.27}$$

для $k = 0, 1, \ldots, d$, то вес (1.22) индекса a запишется

$$\mu a = a_0\, \mu\varepsilon_0 + a_1\, \mu\varepsilon_1 + \ldots + a_d\, \mu\varepsilon_d \tag{1.28}$$

аналогично весу (1.21) вершины $x = x(a)$.

Определенный в (1.17) и (1.23) граф $\overrightarrow{G}$ назовем *звездным графом.*

1.4. Вершины базисных параллелепипедов. Напомним, что параллелепипед T_k в (1.6) порождается векторами $v_i \in v$ с номерами i из множества

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}, \tag{1.29}$$

где $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$. Множество векторов

$$\mathrm{Sk}_k = \{v_i;\ i \in \mathcal{D}_k\} \tag{1.30}$$

назовем *остовом* (skeleton) параллелепипеда T_k. Остов Sk_k порождает параллелепипед T_k и содержит наименьшее число векторов с указанным свойством.

Согласно определению (1.6) параллелепипед T_k имеет следующие *вершины*

$$T_k^{\mathrm{ver}} = \{v_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k\}. \tag{1.31}$$

Здесь $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ – *мультииндекс*, являющийся произвольным подмножеством индексов из множества (1.29), и

$$v_{\mathbf{i}} = v_{i_1} + \ldots + v_{i_\iota}. \tag{1.32}$$

Далее нам потребуется понятие *отмеченного параллелепипеда* $T_{k,\mathbf{i}}$ – это параллелепипед T_k с некоторой выделенной фиксированной его вершиной $v_{\mathbf{i}} \in T_k^{\mathrm{ver}}$.

1.5. Графы базисных параллелепипедов. *Граф* $\overrightarrow{G}(T_k)$ параллелепипеда T_k – это ориентированный граф, имеющий вершины

$$\overrightarrow{G}^{\mathrm{ver}}(T_k) = T_k^{\mathrm{ver}}. \tag{1.33}$$

По аналогии с (1.23) вершины $v_{\mathbf{i}}$, $v_{\mathbf{i}'} \in T_k^{\mathrm{ver}}$ считаются соединенными дугой w_k, если

$$v_{\mathbf{i}'} - v_{\mathbf{i}} = w_k \in w. \tag{1.34}$$

Отмеченному параллелепипеду $T_{k,\mathbf{i}}$ отвечает граф $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$, в котором выделена та же вершина $v_{\mathbf{i}} \in \overrightarrow{G}^{\mathrm{ver}}(T_k)$, что и у параллелепипеда $T_{k,\mathbf{i}}$.

Заметим, согласно определениям (1.6) и (1.17), (1.23) имеют место включения

$$T_{k,\mathbf{i}} \subset \mathbb{R}^d, \quad \overrightarrow{G} \subset \mathbb{R}^d. \tag{1.35}$$

Учитывая (1.35), будем говорить, что граф $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ отмеченного параллелепипеда $T_{k,\mathbf{i}}$ *вкладывается*

$$x:\ \overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}}) \hookrightarrow \overrightarrow{G} \tag{1.36}$$

в граф $\overrightarrow{G}$ в его вершине $x \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$, если выполняется включение графов

$$\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}}) + (x - v_{\mathbf{i}}) \subset \overrightarrow{G}. \tag{1.37}$$

Последнее означает, что $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ является подграфом графа $\overrightarrow{G}$ при условии, если выделенную вершину $v_{\mathbf{i}}$ графа $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ параллельным сдвигом совместить с вершиной x графа $\overrightarrow{G}$. Обозначим через $X_{k,\mathbf{i}}$ множество вершин x графа $\overrightarrow{G}$, в которых имеет место включение (1.36).

1.6. Универсальные ядерные разбиения. Приведенные выше конструкции позволяют строить специальные разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$, называемые *универсальными ядерными разбиениями* пространства $\mathbb{R}^d$.

В [5] доказана

Основная теорема 1.1. *Пусть*

$$xT_{k,\mathbf{i}} = T_{k,\mathbf{i}} + (x - v_{\mathbf{i}}) \;\subset\; \mathbb{R}^d \tag{1.38}$$

обозначает параллелепипед, получающийся сдвигом $T_{k,\mathbf{i}}$ на вектор $x - v_{\mathbf{i}}$, где x принадлежит множеству вершин $X_{k,\mathbf{i}} \subset \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$ и $v_{\mathbf{i}} \in T_k^{\mathrm{ver}}$ – вершина базисного параллелепипеда T_k с мультииндексом $\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$.

Тогда имеет место разбиение

$$\mathbb{R}^d \;=\; \bigcup_{0\leqslant k\leqslant d}\;\bigcup_{\mathbf{i}\subseteq\mathcal{D}_k}\;\bigcup_{x\in X_{k,\mathbf{i}}} xT_{k,\mathbf{i}} \tag{1.39}$$

пространства $\mathbb{R}^d$ любой размерности d. В объединении (1.39) *любые два параллелепипеда $xT_{k,\mathbf{i}}$ и $x'T_{k',\mathbf{i}'}$ совпадают*

$$xT_{k,\mathbf{i}} = x'T_{k',\mathbf{i}'} \tag{1.40}$$

или не имеют общих внутренних точек. □

Из основной теоремы 1.1 следует, что при любом выборе звезды v и весового параметра μ, определенных в (1.2) и (1.3), объединение

$$\mathcal{T}(v,\mu) \;=\; \bigcup_{0\leqslant k\leqslant d}\;\bigcup_{\mathbf{i}\subseteq\mathcal{D}_k}\;\bigcup_{x\in X_{k,\mathbf{i}}} xT_{k,\mathbf{i}} \tag{1.41}$$

представляет собою разбиение пространства $\mathbb{R}^d$.

Замечание 1.1. Упомянутые во введении универсальные ядерные разбиения $\mathcal{T}(v,\mu,\rho)$ получаются аналогично разбиениям (1.41) с заменой единичного полуинтервала $\mathfrak{I}$ на сдвинутый полуинтервал $\mathfrak{I} + \rho$. Разбиения $\mathcal{T}(v,\mu) = \mathcal{T}(v,\mu,0)$ являются типичными: они образуют всюду плотное подмножество среди всех разбиений вида $\mathcal{T}(v,\mu,\rho)$. Среди других, разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$ выделяет наличие у них ядра, содержащего начало координат.

§2. Единичный граф

2.1. Ориентированный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}$. В пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ выделим $(d+1)$-мерный *слой*

$$\mathbb{R}^{d+1}_\mu = \{\widehat{x} \in \mathbb{R}^{d+1};\ \mu \cdot \widehat{x} \in \mathfrak{I}\}, \tag{2.1}$$

где $\mu \cdot \widehat{x}$ – скалярное произведение весового вектора $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d)$ из (1.3) и $\widehat{x}$; $\mathfrak{I} = [0,1)$ – снова единичный полуинтервал. В свою очередь, в слое $\mathbb{R}^{d+1}_\mu$ выделим *решетку*

$$\mathbb{Z}^{d+1}_\mu = \mathbb{R}^{d+1}_\mu \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{a \in \mathbb{Z}^{d+1};\ \mu a \in \mathfrak{I}\} \tag{2.2}$$

точек $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ с целыми координатами a_k. Здесь μa обозначает *вес* точки a, определяемый формулой (1.22), и согласно которой можем записать $\mu a = \mu \cdot a$. Поэтому $\mu x = \mu \cdot x$ также будем называть *весом* и для произвольной вещественной точки $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Используя решетку (2.2), можем определить *ориентированный граф* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ с *вершинами*

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} = \mathbb{Z}^{d+1}_\mu. \tag{2.3}$$

Его вершины a, $a' \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}}$ соединим *дугой* $\varepsilon^\pm_k$, если выполнено условие

$$a' - a = \varepsilon^\pm_k, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon^\pm_k$, $k = 0, 1, \dots, d$, принадлежит симметризованной единичной звезде $\varepsilon^\pm$ из (1.25). Определенный в (2.3) и (2.4) граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ назовем *единичным графом*, поскольку его ребрами являются векторы единичного базиса (1.26).

2.2. Симплекс. Рассмотрим замкнутый d-мерный *симплекс* $\triangle_\varepsilon = \triangle^d_\varepsilon$, вершины которого есть концы векторов единичного базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ из (1.26). Вершины $\triangle^{\mathrm{ver}}_\varepsilon$ симплекса $\triangle_\varepsilon$ будем обозначать так же, как и самими векторы ε_k. Различать их будем по указательным терминам "вершина" или "вектор". *Внутренность* $\triangle^{\mathrm{int}}_\varepsilon$ симплекса $\triangle_\varepsilon$ образуют точки $\widehat{x} = (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d)$ вида

$$\widehat{x} = \widehat{x}_0\varepsilon_0 + \widehat{x}_1\varepsilon_1 + \ldots + \widehat{x}_d\varepsilon_d, \tag{2.5}$$

где координаты ограничены условиями

$$\widehat{x}_0 + \widehat{x}_1 + \ldots + \widehat{x}_d = 1, \quad \widehat{x}_k > 0. \tag{2.6}$$

Заметим, что $\widehat{x}_0, \widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_d$ в равенстве (2.5) можно интерпретировать и как *барицентрические координаты* внутренней точки $\widehat{x}$ симплекса $\triangle_\varepsilon$ относительно его вершин $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d \in \triangle_\varepsilon^{\rm ver}$.

2.3. Проекция. Выберем произвольную точку π из внутренности симплекса $\triangle_\varepsilon^{\rm int}$ и зададим *проекцию*

$$\mathrm{pr}_\pi : \ \mathbb{R}^{d+1}_\mu \ \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0} \tag{2.7}$$

вдоль соответствующего вектора π, отображающую слой (2.1) на его нижнюю граничную *гиперплоскость*

$$\mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0} = \{\widehat{x} \in \mathbb{R}^{d+1};\ \mu \cdot \widehat{x} = 0\}. \tag{2.8}$$

2.4. Изоморфизм графов. Чтобы не усложнять обозначения, условимся отождествлять

$$\mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0} = \mathbb{R}^d \tag{2.9}$$

гиперплоскость (2.8) с обычным d-мерным пространством $\mathbb{R}^d$; и пусть вложение $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ будет согласовано с (2.9).

Проекция

$$v = \mathrm{pr}_\pi \varepsilon \tag{2.10}$$

единичного базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d\}$ из (1.26) на гиперплоскость $\mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0} = \mathbb{R}^d$ образует звезду v (см. определение 1.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $\overrightarrow{G}$ *– звездный граф* (1.17), (1.23) *и* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ *– единичный граф* (2.3), (2.4). *Если звезда* v *имеет вид* (2.10), *где в качестве* π *выбрана произвольная внутренняя точка симплекса* $\triangle_\varepsilon$, *то проекция* pr_π *из* (2.7), *перенесенная на указанные графы*

$$\mathrm{pr}_\pi : \ \overrightarrow{\mathcal{G}} \ \ \overrightarrow{\sim} \ \ \overrightarrow{G}, \tag{2.11}$$

задает изоморфизм этих графов.

Доказательство. См. [5]. □

§3. Эквивалентность вложения графов и разбиений

3.1. Локальная эквивалентность. Скажем, что отмеченный параллелепипед $T_{k,\mathbf{i}}$ *вкладывается*

$$x : T_{k,\mathbf{i}} \ \hookrightarrow \ \mathcal{T}(v,\mu) \tag{3.1}$$

(ср. с определением вложения графов (1.36)) в разбиение $\mathcal{T}(v,\mu)$ в его вершине $x \in \mathcal{T}_L(v,\mu)^{\,\mathrm{ver}}$, если выполняется включение

$$T_{k,\mathbf{i}} + (x - v_{\mathbf{i}}) \ \subset \ \mathcal{T}(v,\mu), \tag{3.2}$$

означающее, что в вершине x присутствует параллелепипед P разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$, получающийся параллельным сдвигом параллелепипеда $T_{k,\mathbf{i}}$, переводящим его выделенную вершину $v_{\mathbf{i}} \in T_{k,\mathbf{i}}^{\mathrm{ver}}$ в вершину x разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$.

Предложение 3.1. *Пусть* $\mathcal{T}(v,\mu)$ *– ядерное разбиение* (1.41) *пространства* $\mathbb{R}^d$ *и* $\overrightarrow{G}$ *– звездный граф данного разбиения, определенный в* (1.17) *и* (1.23). *Тогда для любой вершины* $x \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$ *имеет место равносильность*

$$x : \overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}}) \ \hookrightarrow \ \overrightarrow{G} \ \Leftrightarrow \ x : T_{k,\mathbf{i}} \ \hookrightarrow \ \mathcal{T}(v,\mu) \tag{3.3}$$

вложений графов (1.36) *отмеченных многогранников* $T_{k,\mathbf{i}}$ *и вложений* (3.1) *самих многогранников.*

Доказательство. Для периодических разбиений $\mathcal{T}(v,\mu)$ равносильность (3.3) доказана в лемме 5.1 из [5]. Непериодические разбиения и разбиения смешанного типа $\mathcal{T}(v,\mu)$ получаются из периодических предельным переходом [5]. Отсюда следует, что утверждение (3.3) выполняется и для произвольных ядерных разбиений $\mathcal{T}(v,\mu)$. □

3.2. Группа симметрий S. Согласно (1.41) и (1.6), ядерные разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$ состоят из трансляций параллелепипедов $T_0, T_1, \ldots, T_d$, имеющих в общем случае лишь центральные симметрии. Поэтому в поисках изоморфизмов разбиений $\mathcal{T}(v,\mu)$ можно ограничиться *группой движений* $\mathbf{S}$, порождаемой параллельными сдвигами и центральными симметриями.

3.3. Глобальная эквивалентность. Из предложения 3.1 вытекает следующая

Теорема 3.1. *Для любой симметрии* $\mathbf{s}$ *из группы* $\mathbf{S}$ *выполняется равносильность свойств*

$$\mathbf{s}:\mathcal{T}(v,\mu)\overrightarrow{\sim}\mathcal{T}(v,\mu)\ \Leftrightarrow\ \mathbf{s}:\overrightarrow{G}\overrightarrow{\sim}\overrightarrow{G} \tag{3.4}$$

быть $\mathbf{s}$ *симметрией разбиения* $\mathcal{T}(v,\mu)$ *и его звездного графа* $\overrightarrow{G}$.

§4. Типы ядерных разбиений пространства

4.1. Ранг весового вектора. Определим *ранг* $\operatorname{rank}\mu$ весового вектора $\mu=(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_d)$ из (1.3) как максимальное число $r=\operatorname{rank}\mu$ линейно независимых его координат

$$\mu_{\max}=\{\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_r}\}\subseteq\{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_d\} \tag{4.1}$$

над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ или, что равносильно – над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Из (4.1) и определения (1.3)–(1.5) весового вектора μ следует, что ранг $\operatorname{rank}\mu$ должен удовлетворять неравенствам

$$1\leqslant\operatorname{rank}\mu\leqslant d+1. \tag{4.2}$$

4.2. Решетка периодов ядерного разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$. Обозначим через

$$L=L_\mu\ \subset\ \mathbb{Z}^{d+1} \tag{4.3}$$

решетку решений $a=(a_0,a_1,\ldots,a_d)\in\mathbb{Z}^{d+1}$ однородного уравнения

$$\mu a=\mu\cdot a=\mu_0a_0+\mu_1a_1+\ldots+\mu_da_d=0, \tag{4.4}$$

т.е. решетку целочисленных векторов a, ортогональных $a\perp\mu$ весовому вектору $\mu=(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_d)$. *Ранг* $\operatorname{rank}L=\rho$ решетки

$$L=\mathbb{Z}[l_1,\ldots,l_\rho]\ \subset\ \mathbb{Z}^{d+1} \tag{4.5}$$

– это максимальное число ρ векторов $l_1,\ldots,l_\rho$ из L, линейно независимых над $\mathbb{Z}$. Таким образом, ранг решетки L – это ее размерность

$$\dim L=\operatorname{rank}L \tag{4.6}$$

над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ или, что равносильно в данном случае – над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Размерность $\dim L$ решетки L и ранг $\operatorname{rank}\mu$ соответствующего весового вектора μ связаны условием

$$\dim L=d+1-\operatorname{rank}\mu. \tag{4.7}$$

Из [5] следует

Предложение 4.1. *Ядерное разбиение $\mathcal{T}(v,\mu)$ пространства $\mathbb{R}^d$ из* (1.41) *периодично*

$$\mathcal{T}(v,\mu)+l=\mathcal{T}(v,\mu) \tag{4.8}$$

относительно трансляций (параллельных сдвигов) на векторы l решетки L из (4.3), *принадлежащей гиперплоскости $\mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0}\subset\mathbf{R}^{d+1}$, ортогональной весовому вектору μ.*

4.3. Типы ядерных разбиений $\mathcal{T}(v,\mu)$. В зависимости от величины ранга $\operatorname{rank}\mu$ весового вектора μ будем различать *три типа* ядерных разбиений $\mathcal{T}(v,\mu)$ пространства $\mathbb{R}^d$, построенных в (1.41).

Тип I: *непериодические разбиения* $\mathcal{T}(v,\mu)$, если

$$\operatorname{rank}\mu=d+1; \tag{4.9}$$

Тип II: *разбиения смешанного типа* $\mathcal{T}(v,\mu)$, если

$$1<\operatorname{rank}\mu<d+1; \tag{4.10}$$

Тип III: *периодические разбиения* $\mathcal{T}(v,\mu)$, если

$$\operatorname{rank}\mu=1. \tag{4.11}$$

Из предложения 4.1 видно, что в случае минимального ранга $\operatorname{rank}\mu=1$ весового вектора μ ядерное разбиение $\mathcal{T}(v,\mu)$ имеет решетку периодов L максимально возможной размерности

$$\dim L=d. \tag{4.12}$$

Наоборот, если весовой вектор μ имеет максимальный ранг $\operatorname{rank}\mu=d+1$, то у ядерного разбиения $\mathcal{T}(v,\mu)$ будет решетка периодов L минимальной размерности

$$\dim L=0, \tag{4.13}$$

так как решетка $L=\{0\}$ в силу формулы (4.7). У разбиений $\mathcal{T}(v,\mu)$ смешанного типа (4.10) решетка периодов L имеет размерность

$$1\leqslant\dim L\leqslant d-1. \tag{4.14}$$

Весовой вектор μ максимального ранга $\operatorname{rank}\mu=d+1$ естественно назвать вектором *общего положения*. Вырожденному случаю минимального ранга $\operatorname{rank}\mu=1$ отвечает *рациональный* весовой вектор μ из (4.18).

4.4. Весовой вектор общего положения. Из определения следует, что весовой вектор μ будет вектором общего положения, если

$$\text{координаты } \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}. \tag{4.15}$$

В этом случае множество точек $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ решетки $\mathbb{Z}^{d+1}$, являющихся решениями однородного уравнения (4.4), будет состоять из единственной точки $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, а неоднородного

$$\mu a = \mu \cdot a = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_d m_d = 1 \tag{4.16}$$

в силу нормирующего условия (1.4) – из единственной точки $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Поэтому имеем

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} \cap \mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0} = \{\mathbf{0}\}, \quad \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,*\,\mathrm{ver}} \cap (\mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0} + \mathbf{1}) = \{\mathbf{1}\}, \tag{4.17}$$

где $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} = \mathbb{Z}^{d+1}_{\mu}$ – вершины единичного графа (2.3) и $\mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0}$ – гиперплоскость (2.8).

4.5. Рациональный весовой вектор. Такой весовой вектор имеет вид

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d) = \Big(\frac{m_0}{m}, \frac{m_1}{m}, \ldots, \frac{m_d}{m}\Big), \tag{4.18}$$

где m_k, m – натуральные числа, имеющие наибольший общий делитель

$$\mathrm{g.c.d.}(m_0, m_1, \ldots, m_d, m) = 1 \tag{4.19}$$

и удовлетворяющие нормирующему условию (1.4), которое в данном случае принимает вид

$$m_0 + m_1 + \ldots + m_d = m. \tag{4.20}$$

Как уже говорилось, теперь целые решения $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ однородного уравнения (4.4) образуют решетку максимально возможной размерности $\dim L = d$.

§5. Двойственные разбиения и графы

5.1. Основная центральная симметрия s. Обозначим через

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^- = s^-_{v^{\mathrm{sum}}} : x \mapsto -x + v^{\mathrm{sum}} = -\Big(x - \frac{1}{2}v^{\mathrm{sum}}\Big) + \frac{1}{2}v^{\mathrm{sum}} \tag{5.1}$$

центральную симметрию пространства $\mathbb{R}^d$ с *центром*

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}v^{\mathrm{sum}}, \tag{5.2}$$

где

$$v^{\mathrm{sum}} = v_0 + v_1 + \ldots + v_d \tag{5.3}$$

– сумма всех лучей v_k звезды v из (1.2). Назовем $\mathbf{s} = s^-_{v^{\mathrm{sum}}}$ *основной центральной симметрией* пространства $\mathbb{R}^d$. Иногда сумму лучей v^{sum} удобно записывать в обозначениях (1.20):

$$v^{\mathrm{sum}} = \mathbf{1} \circ v, \tag{5.4}$$

где

$$\mathbf{1} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_d = \underbrace{\{1, 1, \ldots, 1\}}_{d+1} \tag{5.5}$$

– сумма всех векторов ε_k единичного базиса (1.26).

5.2. Двойственные разбиения и звездные графы. С помощью центральной симметрии (5.1) для разбиения $\mathcal{T}(v, \mu)$ определим *двойственное ядерное разбиение*

$$\mathcal{T}^*(v, \mu) = \mathbf{s}\,\mathcal{T}(v, \mu) \tag{5.6}$$

пространства $\mathbb{R}^d$.

Звездный граф $\overrightarrow{G}$, определенный в (1.17) и (1.23), вложен $\overrightarrow{G} \subset \mathbb{R}^d$ согласно (1.35) в пространство $\mathbb{R}^d$. Поэтому для него можно рассмотреть *двойственный звездный граф* $\overrightarrow{G}^*$, полагая

$$\overrightarrow{G}^* = \mathbf{s}\,\overrightarrow{G}. \tag{5.7}$$

5.3. Двойственная основная центральная симметрия $\mathfrak{s}$. В дополнение к (5.1) рассмотрим еще

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^- = \mathfrak{s}^-_{\mathbf{1}} : x \mapsto -x + \mathbf{1} \tag{5.8}$$

– центральную симметрию пространства $\mathbb{R}^{d+1}$ с *центром*

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}, \tag{5.9}$$

где $\mathbf{1}$ – вектор (5.5). Симметрию $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^-_{\mathbf{1}}$ будем называть *основной центральной симметрией*, но уже бóльшего пространства $\mathbb{R}^{d+1}$.

5.4. Двойственный единичный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$. Пусть $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ – единичный граф (2.3), (2.4), вложенный в пространство $\mathbb{R}^{d+1}$. Тогда с помощью симметрии $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^-_{\mathbf{1}}$ можно определить *двойственный единичный граф*

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^* = \mathfrak{s}\,\overrightarrow{\mathcal{G}}. \tag{5.10}$$

Двойственный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$ можно также получить, если в определении (2.1)-(2.4) графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ единичный полуинтервал $\mathfrak{I} = [0,1)$ заменить *двойственным полуинтервалом*

$$\mathfrak{I}^* = (0,1], \tag{5.11}$$

где

$$* : x \mapsto -x+1 \tag{5.12}$$

– центральная симметрия прямой $\mathbb{R}$ с центром в точке $\frac{1}{2}$. При указанной замене ориентированный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$ по определению будет иметь *вершины*

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^{*\mathrm{ver}} = \mathbb{Z}_\mu^{*d+1}, \tag{5.13}$$

где

$$\mathbb{Z}_\mu^{*d+1} = \mathbb{R}_\mu^{*d+1} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{a \in \mathbb{Z}^{d+1};\ \mu a \in \mathfrak{I}^*\} \tag{5.14}$$

– решетка целых точек из $(d+1)$-мерного слоя

$$\mathbb{R}_\mu^{*d+1} = \{\widehat{x} \in \mathbb{R}^{d+1};\ \mu \cdot \widehat{x} \in \mathfrak{I}^*\}. \tag{5.15}$$

Определение же соседства

$$a' - a = \varepsilon_k^{\pm} \tag{5.16}$$

вершин $a,\ a' \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{*\mathrm{ver}}$ дугами $\varepsilon_k^{\pm}$, $k = 0,1,\ldots,d$, симметризованной единичной звезды $\varepsilon^{\pm}$ из (1.25) остается без изменения.

5.5. Коммутативная диаграмма для графов.

Предложение 5.1. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} & \overrightarrow{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\mathfrak{s}} & \overrightarrow{\mathcal{G}}^* & \\ \mathrm{pr}_\pi & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{pr}_\pi, \\ & \overrightarrow{G} & \xrightarrow{\mathbf{s}} & \overrightarrow{G}^* & \end{array} \tag{5.17}$$

где pr_π *– проекция* (2.11), $\mathbf{s}$ *и* $\mathfrak{s}$ *– центральные симметрии* (5.1) *и* (5.8).

Доказательство. Для доказательства коммутативности диаграммы (5.17) на графах достаточно проверить ее коммутативность на вершинах $a \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\mathrm{ver}}$. Используя обозначение (1.20), получаем

$$\mathrm{pr}_\pi(\mathfrak{s}a) = \mathrm{pr}_\pi(-a+\mathbf{1}) = (-a+\mathbf{1}) \circ v. \tag{5.18}$$

С другой стороны имеем

$$\mathbf{s}(\mathrm{pr}_\pi a) = \mathbf{s}(a \circ v) = -a \circ v + v_{\mathrm{sum}} = (-a+\mathbf{1}) \circ v, \tag{5.19}$$

так как $v_{\rm sum} = \mathbf{1} \circ v$ согласно (5.4). Сравнивая (5.18) и (5.19) приходим к формуле коммутирования

$$(\mathrm{pr}_\pi \cdot \mathfrak{s})\, a = (\mathbf{s} \cdot \mathrm{pr}_\pi)\, a. \tag{5.20}$$

□

§6. Проколотые единичные разбиения и графы

6.1. Вершинные звезды единичных графов $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$. Первая *вершинная звезда* $\mathbf{e}(\mathbf{0})$ имеет единственную вершину

$$\mathbf{e}(\mathbf{0})^{\rm ver} \;=\; \{\mathbf{0}\}, \tag{6.1}$$

из которой выходят дуги-лучи $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ единичного базиса (1.26) Остальные вершины, концы дуг ε_k, считаем пустыми или свободными. По определению лучи звезды $\mathbf{e}(\mathbf{0})$ – это в точности дуги единичного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, инцидентные его вершине $\mathbf{0}$.

Вторая *вершинная звезда* $\mathbf{e}(\mathbf{1})$ принадлежит двойственному единичному графу $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$ из (5.10). Эта звезда также с единственной вершиной

$$\mathbf{e}(\mathbf{1})^{\rm ver} \;=\; \{\mathbf{1}\}, \tag{6.2}$$

в которую входят дуги-лучи $-\varepsilon_0, -\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_d$ симметризованной единичной звезды $\varepsilon^{\pm}$ из (1.25). Вершины, начала дуг $-\varepsilon_k$, полагаются пустыми. Уточним: вершина из (6.2) – это конец вектора $\mathbf{1}$, выходящего из начала координат, а лучи звезды $\mathbf{e}(\mathbf{1})$ – это дуги двойственного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$, инцидентные вершине $\mathbf{1}$.

Если воспользоваться центральной симметрией $\mathfrak{s}$ пространства $\mathbb{R}^{d+1}$ из (5.8), то связь между вершинными звездами $\mathbf{e}(\mathbf{0})$ и $\mathbf{e}(\mathbf{1})$ можно кратко записать в виде формулы

$$\mathbf{e}(\mathbf{1}) = \mathfrak{s}\, \mathbf{e}(\mathbf{0}) = \mathbf{e}^*(\mathbf{0}). \tag{6.3}$$

Поэтому вторую вершинную звезду $\mathbf{e}(\mathbf{1})$ можно назвать *двойственной* для звезды $\mathbf{e}(\mathbf{0})$.

6.2. Проколотые графы $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ$, $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^*$: непериодический случай. Сначала сосредоточимся на более простом случае иррационального весового вектора $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d)$ из (1.3) или вектора *общего положения* (4.15).

Построим *проколотый граф* $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ$, вырезая

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^{\,\rm ver} = \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\rm ver} \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{6.4}$$

из единичного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ его вершину $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ и все инцидентные с ней дуги. Аналогично определим граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^*$, вырезая

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^{*\,\mathrm{ver}} = \overrightarrow{\mathcal{G}}^{*\,\mathrm{ver}} \setminus \{\mathbf{1}\} \tag{6.5}$$

из двойственного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$ его вершину $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ и все инцидентные с ней дуги. Проколотые графы $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ$, $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^*$ можно определить с помощью операции *вырезания* (*excision*, *cutting-out*)

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ = \overrightarrow{\mathcal{G}} \mathbin{\dot{-}} \mathbf{e}(\mathbf{0}), \tag{6.6}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^* = \overrightarrow{\mathcal{G}}^* \mathbin{\dot{-}} \mathbf{e}^*(\mathbf{0}) = \overrightarrow{\mathcal{G}}^* \mathbin{\dot{-}} \mathbf{e}(\mathbf{1}) \tag{6.7}$$

из единичных графов $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$ вершинных звезд $\mathbf{e}(\mathbf{0})$ и $\mathbf{e}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{e}(\mathbf{1})$, рассмотренных в (6.1) и (6.2). *Вклейка* (*embedding*) – это обратная операция к операции вырезания

$$\overrightarrow{\mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ \mathbin{\dot{+}} \mathbf{e}(\mathbf{0}), \tag{6.8}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^* = \overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^* \mathbin{\dot{+}} \mathbf{e}^*(\mathbf{0}) = \overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^* \mathbin{\dot{+}} \mathbf{e}(\mathbf{1}). \tag{6.9}$$

Лемма 6.1. 1. *Если $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d)$ является весовым вектором общего положения* (4.15), *то имеет место совпадение*

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ = \overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^* \tag{6.10}$$

проколотых графов (6.4), (6.5) *для единичного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, определенного в* (2.3), (2.4), *и двойственного ему графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$ из* (5.10).

2. *Ограничение основной центральной симметрии $\mathfrak{s}$ из* (5.8) *на проколотый граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ$ задает его автоморфизм*

$$\mathfrak{s} : \overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ \overset{\rightarrow}{\sim} \overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ. \tag{6.11}$$

3. *Двойственный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$ получается из проколотого графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ$ через вклейку*

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^* = \overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ \mathbin{\dot{+}} \mathbf{e}^*(\mathbf{0}) \tag{6.12}$$

вершинной звезды $\mathbf{e}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{e}(\mathbf{1})$.

Доказательство. 1. В случае весового вектора общего положения μ единичный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ и двойственный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}^*$ имеют одни и те же вершины, исключая вершины $\mathbf{0} \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\mathrm{ver}}$ и $\mathbf{1} = \mathbf{0}^* \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{*\,\mathrm{ver}}$, как это следует из (4.17). Вырезание же этих вершин (6.6), (6.7) приводит к совпадению (6.10) проколотых графов $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ$ и $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^*$.

2. Вытекает из равенства (6.10) и определения центральной симметрии (5.8).

3. Разложение (6.12) получается подстановкой $\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ^* = \overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ$ в разложение (6.9). □

§7. Проколотые звездные разбиения и графы

7.1. Вершинные звезды графов $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{G}^*$. Данные звезды определяются по аналогии с вершинными звездами единичных графов (6.1), (6.2). *Вершинная звезда* $\mathbf{v}(\mathbf{0})$ имеет единственную вершину

$$\mathbf{v}(\mathbf{0})^{\,\mathrm{ver}} \;=\; \{\mathbf{0}\}, \tag{7.1}$$

из которой выходят дуги-лучи $v_0, v_1, \ldots, v_d$ звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ из (1.2). Остальные вершины, концы дуг v_k, считаются пустыми. Вершинная звезда $\mathbf{v}(\mathbf{0})$ представляет собою звезду v с фиксированным центром в начале координат и лучи звезды $\mathbf{v}(\mathbf{0})$ – это в точности дуги звездного графа $\overrightarrow{G}$, инцидентные вершине $\mathbf{0}$.

Двойственная звезда $\mathbf{v}(v^{\mathrm{sum}})$, принадлежащая двойственному графу $\overrightarrow{G}^*$ из (5.7), имеет

$$\mathbf{v}(v^{\mathrm{sum}})^{\,\mathrm{ver}} \;=\; \{v^{\mathrm{sum}}\} \tag{7.2}$$

единственную вершину (5.3), в которую входят дуги-лучи $-v_0, -v_1, \ldots, -v_d$ звезды $-v = \{-v_0, -v_1, \ldots, -v_d\}$. Вершины, начала дуг $-v_k$, полагаются пустыми. Вершина из (7.2) – это конец вектора v_{sum}, выходящего из начала координат, а лучи звезды $\mathbf{v}(v^{\mathrm{sum}})$ – это дуги двойственного графа $\overrightarrow{G}^*$, инцидентные вершине v^{sum}.

Если воспользоваться центральной симметрией $\mathbf{s}$ пространства $\mathbb{R}^d$ из (5.1), то связь вершинной звездой $\mathbf{v}(\mathbf{0})$ и двойственной звездой $\mathbf{v}(v^{\mathrm{sum}})$ можно кратко записать в виде формулы

$$\mathbf{v}(v^{\mathrm{sum}}) \;=\; \mathbf{s}\,\mathbf{v}(\mathbf{0}) \;=\; \mathbf{v}^*(\mathbf{0}). \tag{7.3}$$

7.2. Проколотые графы $\overrightarrow{G}_\circ$, $\overrightarrow{G}_\circ^*$: непериодический случай. Проколотые графы $\overrightarrow{G}_\circ$, $\overrightarrow{G}_\circ^*$ будем строить сразу с помощью операции *вырезания*, минуя промежуточные этапы (6.4) и (6.5):

$$\overrightarrow{G}_\circ = \overrightarrow{G} \;\dot{-}\; \mathbf{v}(\mathbf{0}), \tag{7.4}$$

$$\overrightarrow{G}_\circ^* = \overrightarrow{G}^* \;\dot{-}\; \mathbf{v}^*(\mathbf{0}) = \overrightarrow{G}^* \;\dot{-}\; \mathbf{v}(v^{\mathrm{sum}}) \tag{7.5}$$

из единичных графов $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{G}^*$ и вершинных звезд $\mathbf{v}(\mathbf{0})$, $\mathbf{v}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{v}(v^{\mathrm{sum}})$, определенных в (7.1) и (7.2).

Лемма 7.1. 1. *Если* $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d)$ *является весовым вектором общего положения* (4.15)*, то имеет место совпадение*

$$\overrightarrow{G}_{\circ} = \overrightarrow{G}_{\circ}^* \tag{7.6}$$

проколотых графов (7.4), (7.5) *для звездного графа* $\overrightarrow{G}$*, определенного в* (1.17), (1.23)*, и двойственного ему графа* $\overrightarrow{G}^*$ *из* (5.7).

2. *Ограничение центральной симметрии* $\mathbf{s}$ *из* (5.1) *на проколотый граф* $\overrightarrow{G}_{\circ}$ *задает его автоморфизм*

$$\mathbf{s} : \overrightarrow{G}_{\circ} \ \overrightarrow{\sim}\ \overrightarrow{G}_{\circ}. \tag{7.7}$$

3. *Двойственный граф* $\overrightarrow{G}^*$ *получается из проколотого графа* $\overrightarrow{G}_{\circ}$ *через вклейку*

$$\overrightarrow{G}^* = \overrightarrow{G}_{\circ} \dotplus \mathbf{v}^*(\mathbf{0}) \tag{7.8}$$

вершинной звезды $\mathbf{v}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{v}(v^{\mathrm{sum}})$.

Доказательство. Рассмотрев ограничение диаграммы (5.17) на вершинные звезды, убеждаемся в коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{e}(\mathbf{0}) & \xrightarrow{\mathbf{s}} & \mathbf{e}^*(\mathbf{0}) & \\ \mathrm{pr}_{\pi} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{pr}_{\pi}, \\ & \mathbf{v}(\mathbf{0}) & \xrightarrow{\mathbf{s}} & \mathbf{v}^*(\mathbf{0}) & \end{array} \tag{7.9}$$

где pr_{π} – проекция (2.11). Отсюда, предложения 5.1 и леммы 6.1 вытекают утверждения 1–3. □

7.3. Проколотые разбиения $\mathcal{T}_{\circ}$, $\mathcal{T}_{\circ}^*$: непериодический случай. Далее для построенного в (1.41) разбиения пространства $\mathbf{R}^d$ будем использовать сокращенное обозначение

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(v, \mu). \tag{7.10}$$

Множество

$$T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}) \tag{7.11}$$

– параллелоэдр (1.7) – по отношению ко всему разбиению $\mathcal{T}$, определенному в (1.41), называется *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$ (ср. [4, 16]). Согласно (1.7) ядро Kr разбивается

$$\mathcal{K} = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_d \tag{7.12}$$

на $d+1$ *базисный параллелепипед* $T_0, T_1, \ldots, T_d$ из (1.6). Для каждого параллелепипеда T_k множество задающих его лучей $v_{k_1}, \ldots, v_{k_d}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ образует остов Sk_k из (1.30).

Замечание 7.1. Далее будем различать ядро Kr – множество (7.11) от ядра $\mathcal{K}$ – разбиения (7.12).

По (1.37) для всех $k = 0, 1, \ldots, d$ графы $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{0}})$ отмеченных параллелепипедов $T_{k,\mathbf{0}}$ вкладываются

$$x_0 : \ \overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{0}}) \ \hookrightarrow \ \overrightarrow{G} \tag{7.13}$$

в граф $\overrightarrow{G}$ разбиения $\mathcal{T}$ в его вершине $x_0 = 0 \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$. Тогда из (7.13) и предложения 3.1 заключаем, что соответствующие отмеченные параллелепипеды $T_{k,\mathbf{0}}$ вкладываются

$$x_0 : \ T_{k,\mathbf{0}} \ \hookrightarrow \ \mathcal{T} \tag{7.14}$$

и в само разбиение $\mathcal{T}$ в той же вершине $x_0 = 0$ общего с графом $\overrightarrow{G}$ пространства $\mathbf{R}^d$. Поскольку $x_0 = 0$ – общая вершина всех параллелепипедов

$$T_k = T_{k,\mathbf{0}}, \tag{7.15}$$

а последние разбивают (7.12) ядро $\mathcal{K}$, то в силу (7.14) будет вкладываться

$$x_0 : \ \mathcal{K} \ \hookrightarrow \ \mathcal{T} \tag{7.16}$$

и все ядро $\mathcal{K}$ в разбиение $\mathcal{T}$ в вершине $x_0 = 0$. Итак, в силу (7.16) имеем теоретико-множественное включение

$$\mathcal{K} \ \subset \ \mathcal{T} \ \subset \ \mathbb{R}^d, \tag{7.17}$$

поэтому можно определить *проколотое разбиение*

$$\mathcal{T}_\circ = \mathcal{T} \setminus \mathcal{K}. \tag{7.18}$$

7.4. Действие основной центральной симметрии s на ядро Kr.

Предложение 7.1. *Ядро* Kr *является выпуклым d-мерным центрально-симметричным многогранником с числом вершин*

$$\sharp\,\mathrm{Kr}^{\mathrm{ver}} = 2^{d+1} - 2 \tag{7.19}$$

и с центром симметрии

$$\mathbf{c}_{\mathrm{Kr}} = \mathbf{c} = \frac{1}{2} v^{\mathrm{sum}}, \tag{7.20}$$

где $\mathbf{c}$ *– центр основной центральной симметрии* $\mathbf{s}$ *из* (5.1)*,* (5.2)*.*

Число вершин $\mathrm{Kr}^{\mathrm{ver}}$ многогранника Kr равно количеству мультииндексов $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ из множества $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$, исключая $\mathbf{i} = \emptyset$ и $\mathbf{i} = \mathcal{D}$. Отсюда получаем формулу (7.20).

Используя данную формулу найдем центр тяжести многогранника Kr:

$$\frac{1}{\sharp\, \mathrm{Kr}^{\mathrm{ver}}} \sum_{\mathbf{i} \overset{*}{\subset} \mathcal{D}} v_{\mathbf{i}} \;=\; \frac{2^d - 1}{2^{d+1} - 2} (v_0 + v_1 + \ldots + v_d), \tag{7.21}$$

где суммирование ведется по описанным выше мультииндексам $\mathbf{i}$. Вспоминая обозначение (5.2), устанавливаем связь

$$\frac{1}{\sharp\, \mathrm{Kr}^{\mathrm{ver}}} \sum_{\mathbf{i} \overset{*}{\subset} \mathcal{D}} v_{\mathbf{i}} \;=\; \frac{1}{2}\, v^{\mathrm{sum}} \;=\; \mathbf{c} \tag{7.22}$$

с центром $\mathbf{c}$ центральной симметрии $\mathbf{s}$ из (5.1).

Далее, воспользовавшись определением (5.1), выводим формулу действия

$$\mathbf{s}\, v_{\mathbf{i}} = v_{\mathbf{i}'} \tag{7.23}$$

центральной симметрии $\mathbf{s}$ на вершины $v_{\mathbf{i}} \in \mathrm{Kr}^{\mathrm{ver}}$ многогранника Kr. Здесь $\mathbf{i}' = \mathcal{D} \setminus \mathbf{i}$ – дополнительный мультииндекс к $\mathbf{i}$. Следовательно, многогранник Kr является центрально-симметричным

$$\mathbf{s} : \; \mathrm{Kr} \;\overset{\rightarrow}{\sim}\; \mathrm{Kr} \tag{7.24}$$

с тем же центром симметрии, что и у центральной симметрии $\mathbf{s}$.

Остальные утверждения предложения 7.1 вытекают из определений (1.7), (1.2) многогранника $\mathrm{Kr} = T$ и звезды v.

7.5. Основная центральная симметрия и перекладывание ядра. Следующий материал потребуется нам в §11. Свяжем симметрию (7.24) с перекладыванием (1.12) ядра Kr. Перекладывание S' допускает факторизацию

$$\mathcal{K} \xrightarrow{S'} \mathcal{K} : \quad T_k \xrightarrow{S'} T_k + v_k \tag{7.25}$$

на параллелепипеды $T_0, T_1, \ldots, T_d$, образующие ядро Kr. В (7.25) индекс k пробегает все значения $k = 0, 1, \ldots, d$ и v_k – лучи звезды v. Из приведенной факторизации (7.25) становится понятным термин [17]: *перекладывание ядра.*

Таким образом, ядро $\mathcal{K}$ – перекладывающаяся фигура. В результате *перекладывания* или параллельных переносов составляющих ее многогранников T_k снова получается исходная фигура.

Согласно (1.6) параллелепипеды T_k центрально-симметричны

$$\mathbf{s}_k : \; T_k \;\overset{\longrightarrow}{\sim}\; T_k, \tag{7.26}$$

где

$$\mathbf{s}_k : \; x \;\longrightarrow\; -x + v_k^{\text{sum}}, \tag{7.27}$$

относительно собственных центров

$$\mathbf{c}_k = \frac{1}{2}\, v_k^{\text{sum}}, \text{ при этом } v_k^{\text{sum}} = v_{\text{sum}} - v_k. \tag{7.28}$$

Предложение 7.2. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{K} & \xrightarrow{\mathbf{s}} & \mathcal{K} & \\ \text{id} & \downarrow & & \downarrow & \text{id} \\ & \mathcal{K} & \xrightarrow{S'} & \mathcal{K} & \end{array} \tag{7.29}$$

коммутативна. Здесь $\mathcal{K}$ *– разбиение* (7.12) *ядра* Kr *на параллелепипеды* $T_0, T_1, \dots, T_d$ *, вертикальные стрелки* id *обозначают поточечные тождественные отображения,* $\mathbf{s}$ *– центральная симметрия* (5.1) *и* S' *– перекладывание ядра* (7.25).

Доказательство. Коммутативность диаграммы (7.29) вытекает из совпадений образов параллелепипедов

$$\mathbf{s}\, T_k = S' T_k \tag{7.30}$$

для всех $k = 0, 1, \dots, d$. Согласно (5.1) и (7.25) последнее равенство можно переписать в виде

$$-T_k + v^{\text{sum}} = T_k + v_k \tag{7.31}$$

или, используя (7.27) и (7.28), – в виде

$$T_k = -T_k + v^{\text{sum}} - v_k = -T_k + v_k^{\text{sum}} = \mathbf{s}_k T_k. \tag{7.32}$$

Поскольку параллелепипеды T_k симметричны $\mathbf{s}_k T_k = T_k$, получаем равенство (7.30). □

Таким образом, согласно предложению 7.2 имеет место эквивалентность

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\mathbf{s}} \mathbf{s}\,\mathcal{K} \;\sim\; \mathcal{K} \xrightarrow{S'} S'\mathcal{K} \tag{7.33}$$

действий на ядро $\mathcal{K}$ центральной симметриии $\mathbf{s}$ и перекладывания S'. Ядро

$$\mathcal{K}^* = \mathbf{s}\,\mathcal{K} = S'\mathcal{K} \tag{7.34}$$

назовем *двойственным ядром.*

Замечание 7.2. Из предложения 7.2 и симметричности (7.24) ядра Kr вытекает независимое от [17] доказательство замкнутости ядра Kr относительно перекладывания S' в (1.12), (7.25).

§8. Теорема о квазисимметрии s для разбиений типа I

Разбиение (7.12) ядра $\mathcal{K}$ является подразбиением

$$\mathcal{K} \;\subset\; \mathcal{T} \tag{8.1}$$

всего разбиения (7.10). Поэтому можем определить *проколотое разбиение* $\mathcal{T}_\circ$, вырезая

$$\mathcal{T}_\circ = \mathcal{T} \setminus \mathcal{K} \tag{8.2}$$

из разбиения $\mathcal{T}$ его ядро $\mathcal{K}$. На этом пути приходим к *разложению*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_\circ \cup \mathcal{K} \tag{8.3}$$

исходного разбиения $\mathcal{T}$ на два подразбиения $\mathcal{T}_\circ$ и $\mathcal{K}$, не имеющих общих внутренних точек

$$\mathcal{T}_\circ^{\,\mathrm{int}} \;\cap\; \mathcal{K}^{\mathrm{int}} = \varnothing. \tag{8.4}$$

Теорема 8.1. *Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v,\mu)$ – ядерное разбиение типа I, т.е. непериодическое разбиение* (4.9)*, и* $\mathbf{s}$ *– основная центральная симметрия* (5.1)*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Проколотое разбиение* (8.2) *центрально-симметрично*

$$\mathbf{s}\mathcal{T}_\circ = \mathcal{T}_\circ \tag{8.5}$$

относительно симметрии $\mathbf{s}$.

2. *Действие симметрии* $\mathbf{s}$ *на все разбиение* (8.3) *сводится*

$$\mathbf{s}\mathcal{T} = \mathcal{T}_\circ \cup \mathbf{s}\,\mathcal{K} \tag{8.6}$$

к центрально-симметричному преобразованию

$$\mathbf{s} :\; \mathcal{K} \;\longrightarrow\; \mathbf{s}\,\mathcal{K} \tag{8.7}$$

его конечного ядра $\mathcal{K}$.

Доказательство. 1. Из построения (8.2) проколотого разбиения $\mathcal{T}_\circ$ следует, что его *звездный граф* $\overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ)$ совпадает

$$\overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ) = \overrightarrow{G}_\circ \tag{8.8}$$

с проколотым графом $\overrightarrow{G}_\circ$, ранее определенным в (7.4). Применяя лемму 7.1 видим, что звездный граф $\overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ)$ симметричен

$$\mathbf{s} : \overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ) \overrightarrow{\sim} \overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ) \tag{8.9}$$

относительно центральной симметрии $\mathbf{s}$ из (5.1). Из теоремы 3.1 и (8.9) вытекает центральная симметричность (8.5) проколотого разбиения.

2. Если на разложение (8.3) разбиения $\mathcal{T}$ подействовать симметрией $\mathbf{s}$ и принять во внимание симметрию ядра (7.24), то получим разложение

$$\mathbf{s}\mathcal{T} = \mathbf{s}\,\mathcal{T}_\circ \cup \mathbf{s}\,\mathcal{K} \tag{8.10}$$

Теперь формула (8.6) следует из (8.10) и (8.5). □

§9. Теорема о квазисимметрии s для разбиений типа II, III

9.1. Определения для разбиений типа II, III. Согласно (4.12) и (4.14) ядерные разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v, \mu)$ типа II или III допускают нетривиальную решетку периодов $L \neq \{0\}$:

$$\mathcal{T} + l = \mathcal{T} \tag{9.1}$$

для векторов трансляций l из решетки L. Поэтому в определение (8.2) проколотого разбиения $\mathcal{T}_\circ$ нужно ввести изменения, заменяя ядро $\mathcal{K}$ на

$$\mathcal{K}_L = \mathcal{K} + L \tag{9.2}$$

– объединение разбиений $\mathcal{K} + l$ для всех $l \in L$. Из включения (8.1) и периодичности (9.1) разбиения $\mathcal{T}$ следует, что *решетка ядер* $\mathcal{K}_L$ является подразбиением

$$\mathcal{K}_L \ \subset \ \mathcal{T} \tag{9.3}$$

всего разбиения $\mathcal{T}$. *Проколотое разбиение*

$$\mathcal{T}_\circ = \mathcal{T} \setminus \mathcal{K}_L \tag{9.4}$$

определяем через вырезание из разбиения $\mathcal{T}$ решетки ядер $\mathcal{K}_L$. Снова приходим к *разложению*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_\circ \cup \mathcal{K}_L \tag{9.5}$$

исходного разбиения $\mathcal{T}$ на два подразбиения $\mathcal{T}_\circ$ и $\mathcal{K}_L$, не имеющих общих внутренних точек

$$\mathcal{T}_\circ^{\,\mathrm{int}} \cap \mathcal{K}_L^{\mathrm{int}} = \emptyset. \tag{9.6}$$

Основную центральную симметрию $\mathbf{s}$ из (5.1) расширим через сдвиги из решетки L до *композиции*

$$\mathbf{s}_L = \mathbf{s} \circ L = L \circ \mathbf{s}, \tag{9.7}$$

состоящей из всевозможных преобразований вида

$$\mathbf{s} \circ l: \; x \overset{l}{\mapsto} x + l \overset{\mathbf{s}}{\mapsto} -x + (v^{\mathrm{sum}} - l) \tag{9.8}$$

или

$$l \circ \mathbf{s}: \; x \overset{\mathbf{s}}{\mapsto} -x + v^{\mathrm{sum}} \overset{l}{\mapsto} -x + (v^{\mathrm{sum}} + l), \tag{9.9}$$

образующих одно и то же множество $\mathbf{s} \circ L = L \circ \mathbf{s}$, так как для решетки L справедливо равенство $L = -L$. Композиции (9.8) и (9.9) представляют собою центральные симметрии соответственно с центрами

$$\mathbf{c} \circ l = \mathbf{c} - \frac{1}{2} l, \quad l \circ \mathbf{c} = \mathbf{c} + \frac{1}{2} l, \tag{9.10}$$

где $\mathbf{c}$ – центр (5.2) симметрии $\mathbf{s}$. Таким образом центры (9.10) композиций $\mathbf{s}_L$ образуют *решетку центров*

$$\mathbf{c}_L = \mathbf{c} + \frac{1}{2} L. \tag{9.11}$$

9.2. Проколотые графы для разбиений типа II, III. Единичный *проколотый граф*

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}_\circ = \overrightarrow{\mathcal{G}} \;\dot{-}\; \mathbf{e}_L(\mathbf{0}) \tag{9.12}$$

определяем вырезанием, заменяя в (6.6) вершинную звезду $\mathbf{e}(\mathbf{0})$ *решеткой*

$$\mathbf{e}_L(\mathbf{0}) = \mathbf{e}(\mathbf{0}) + L \tag{9.13}$$

вершинных звезд $\mathbf{e}_l(\mathbf{0}) = \mathbf{e}(\mathbf{0}) + l$, получающихся сдвигами на векторы $l \in L$ вершинной звезды $\mathbf{e}(\mathbf{0})$ из (6.1).

По аналогии с (9.12) определим *проколотый звездный граф*

$$\overrightarrow{G}_\circ = \overrightarrow{G} \;\dot{-}\; \mathbf{v}_L(\mathbf{0}), \tag{9.14}$$

где

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{0}) = \mathbf{v}(\mathbf{0}) + L \tag{9.15}$$

– *решетка* вершинных звезд $\mathbf{v}_l(\mathbf{0}) = \mathbf{v}(\mathbf{0}) + l$, получающихся сдвигами вершинной звезды $\mathbf{v}(\mathbf{0})$ из (7.1).

Пусть pr_π – проекция (2.11), $\mathbf{s}$ и $\mathfrak{s}$ – центральные симметрии (5.1) и (5.8). Далее нам потребуется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & \overrightarrow{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\mathfrak{s}_l} & \overrightarrow{\mathcal{G}}^* & \\ \mathrm{pr}_\pi & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{pr}_\pi, \\ & \overrightarrow{G} & \xrightarrow{\mathbf{s}_l} & \overrightarrow{G}^* & \end{array} \tag{9.16}$$

где $\mathbf{s}_l$ – любая центральная симметрия из множества $\mathbf{s}_L$, определенного в (9.7), и $\mathfrak{s}_l$ – центральная симметрия из композиции

$$\mathfrak{s}_L = \mathfrak{s} \circ L = L \circ \mathfrak{s}. \tag{9.17}$$

Лемма 9.1. *Пусть* $\overrightarrow{\mathcal{G}_\circ}$, $\overrightarrow{G_\circ}$ *– проколотые графы* (9.12), (9.14); *и пусть* $\mathfrak{s}_l$ *и* $\mathbf{s}_l$ *– центральные симметрии из множества композиций* (9.17) *и* (9.7). *Тогда указанные симметрии задают соответственно автоморфизмы*

$$\mathfrak{s}_l : \overrightarrow{\mathcal{G}_\circ} \ \overrightarrow{\sim}\ \overrightarrow{\mathcal{G}_\circ} \tag{9.18}$$

и

$$\mathbf{s}_l : \overrightarrow{G_\circ} \ \overrightarrow{\sim}\ \overrightarrow{G_\circ}. \tag{9.19}$$

Доказательство. За основу доказательства (9.18) возьмем автоморфизм

$$\mathfrak{s} : \overrightarrow{\mathcal{G}_\circ} \ \overrightarrow{\sim}\ \overrightarrow{\mathcal{G}_\circ} \tag{9.20}$$

из леммы 6.1 и свойство решетки L быть решеткой периодов $l \in L$ единичного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$:

$$l : \overrightarrow{\mathcal{G}} \ \overrightarrow{\sim}\ \overrightarrow{\mathcal{G}}. \tag{9.21}$$

Теперь утверждение (9.18) вытекает из (9.20), (9.21) и равенства

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} \cap \mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0} = L, \tag{9.22}$$

означающего, что все вершины $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}}$ графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, лежащие на нижней граничной гиперплоскости $\mathbb{R}^{d+1}_{\mu,0}$ слоя $\mathbb{R}^{d+1}_{\mu}$ (см. (2.1) и (2.8)), – это в точности узлы решетки L.

Второй автоморфизм (9.19) вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & \overrightarrow{\mathcal{G}_\circ} & \xrightarrow{\mathfrak{s}_l} & \overrightarrow{\mathcal{G}_\circ} & \\ \mathrm{pr}_\pi & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{pr}_\pi \\ & \overrightarrow{G_\circ} & \xrightarrow{\mathbf{s}_l} & \overrightarrow{G_\circ} & \end{array} \tag{9.23}$$

– следствия (9.16). □

9.3. Теорема о квазисимметрии s для разбиений типа II, III.

Теорема 9.1. *Пусть* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v, \mu)$ *– ядерное разбиение типа* II *или* III, *т.е. разбиение смешанного типа* (4.10) *или периодическое разбиение* (4.11), *и* $\mathbf{s}_l$ *– любая центральная симметрия из множества* $\mathbf{s}_L$, *определенного в* (9.7). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Проколотое разбиение* (9.4) *центрально-симметрично*

$$\mathbf{s}_l \mathcal{T}_\circ = \mathcal{T}_\circ \tag{9.24}$$

относительно симметрии $\mathbf{s}_l$.

2. *Действие симметрии* $\mathbf{s}_l \in \mathbf{s}_L$ *на все разбиение* (9.5) *сводится*

$$\mathbf{s}_l \mathcal{T} = \mathcal{T}_\circ \cup \mathbf{s}_l \mathcal{K}_L \tag{9.25}$$

к центрально-симметричному преобразованию

$$\mathbf{s}_l : \ \mathcal{K}_L \ \longrightarrow \ \mathbf{s}_l \mathcal{K}_L \tag{9.26}$$

решетки ядер $\mathcal{K}_L$ *из* (9.2), *при этом*

$$\mathbf{s}_l \mathcal{K}_L = \mathcal{K}_L^* = \mathcal{K}^* + L, \tag{9.27}$$

где

$$\mathcal{K}^* = \mathbf{s}\,\mathcal{K} \tag{9.28}$$

– двойственное ядро для ядра $\mathcal{K}$.

Доказательство. 1. Из построения (9.4) проколотого разбиения $\mathcal{T}_\circ$ следует, что его звездный граф $\overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ)$ совпадает

$$\overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ) = \overrightarrow{G}_\circ \tag{9.29}$$

с вершинным проколотым графом $\overrightarrow{G}_\circ$ из (9.14). Применяя лемму 9.1 видим, что граф разбиения $\overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ)$ симметричен

$$\mathbf{s}_l : \overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ) \ \overset{\rightarrow}{\sim} \ \overrightarrow{G}(\mathcal{T}_\circ) \tag{9.30}$$

относительно центральных симметрий $\mathbf{s}_l$ из множества $\mathbf{s}_L$. Из теоремы 3.1 и (9.30) вытекает центральная симметричность (9.24) проколотого разбиения $\mathcal{T}_\circ$.

2. Рассмотрим *решетку многогранников*

$$\mathrm{Kr}_L = \mathrm{Kr} + L, \tag{9.31}$$

где Kr – параллелоэдр (7.11) ядра $\mathcal{K}$. Из (7.24) следует центральная симметричность

$$\mathbf{s}_l : \ \mathrm{Kr}_L \ \overset{\rightarrow}{\sim} \ \mathrm{Kr}_L \tag{9.32}$$

решетки многогранников (9.31) относительно симметрий $\mathbf{s}_l \in \mathbf{s}_L$. Если на разложение (9.5) разбиения $\mathcal{T}$ подействовать симметрией $\mathbf{s}_l$ и принять во внимание симметрию (9.32), то получим разложение

$$\mathbf{s}_l\mathcal{T} = \mathbf{s}_l\mathcal{T}_\circ \cup \mathbf{s}_l\,\mathcal{K}_L. \tag{9.33}$$

Теперь формула (9.25) следует из (9.33) и (9.24).

Равенства (9.27) и (9.28) вытекают из определения (9.2) решетки ядер Kr_L и формул преобразований симметрий (9.8), (9.9).

§10. Симметрии периодических разбиений

10.1. Центральные симметрии единичного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$. Нетривиальные центральные симметрии у единичного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ возможны только для рационального весового вектора

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_d) = \Big(\frac{m_0}{m}, \frac{m_1}{m}, \ldots, \frac{m_d}{m}\Big), \tag{10.1}$$

т.е. для случая (4.11) периодических разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v, \mu)$ или разбиений типа III. Из условий (4.19), (4.20) следует, что множество весов

$$\mathfrak{I}_\mu = \{\mu a;\ a \in \mathbb{Z}^{d+1}_\mu\} \ \subset\ \mathfrak{I}, \tag{10.2}$$

где $\mathbb{Z}^{d+1}_\mu$ – решетка (2.2) и $\mathfrak{I} = [0, 1)$ – единичный вещественный полуинтервал, заполняет весь *дискретный интервал*

$$\mathfrak{I}_\mu = \Big\{\frac{i}{m};\ i = 0, 1, \ldots, m-1\Big\}. \tag{10.3}$$

Поэтому среди вершин $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}}$ единичного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ найдется вершина

$$a^{\max} = a_{\frac{m-1}{m}} \tag{10.4}$$

с целыми координатами $a^{\max} = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ максимально возможного веса

$$\mu a^{\max} = \frac{m-1}{m}. \tag{10.5}$$

Все вершины $a \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}}$ графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ максимального веса образуют множество

$$\mathcal{A}^{\max} = \Big\{a;\ a \in \mathbb{Z}^{d+1},\ \mu a = \frac{m-1}{m}\Big\}, \tag{10.6}$$

получающееся

$$\mathcal{A}^{\max} = a^{\max} + L \tag{10.7}$$

из произвольной фиксированной вершины максимального веса (10.4) сдвигами на векторы решетки периодов L разбиения $\mathcal{T}$.

Обозначим через

$$\mathfrak{s}^{\max} : x \mapsto -x + a^{\max} \tag{10.8}$$

– центральную симметрию пространства $\mathbb{R}^{d+1}$ с *центром*

$$\mathfrak{c}^{\max} = \frac{1}{2}\, a^{\max}. \tag{10.9}$$

Расширим данную симметрию через сдвиги из решетки L до *группы*

$$\mathfrak{s}_L^{\max} = \langle \mathfrak{s}^{\max} \circ L \rangle = \langle L \circ \mathfrak{s}^{\max} \rangle, \tag{10.10}$$

порождаемой центральными симметриями вида

$$\mathfrak{s}^{\max} \circ l : \ x \overset{l}{\mapsto} x + l \overset{\mathfrak{s}^{\max}}{\mapsto} -x + (a^{\max} - l) \tag{10.11}$$

или

$$l \circ \mathfrak{s}^{\max} : \ x \overset{\mathfrak{s}^{\max}}{\mapsto} -x + a^{\max} \overset{l}{\mapsto} -x + (a^{\max} + l) \tag{10.12}$$

и всевозможными их композициями. Центральные симметрии (10.11) и (10.12) имеют соответственно центры

$$\mathfrak{c}^{\max} \circ l = \mathfrak{c}^{\max} - \frac{1}{2} l, \quad l \circ\ \mathfrak{c}^{\max} = \mathfrak{c}^{\max} + \frac{1}{2} l. \tag{10.13}$$

Поэтому центры (10.13) образуют *решетку центров*

$$\mathfrak{c}_L^{\max} = \mathfrak{c}^{\max} + \frac{1}{2} L \tag{10.14}$$

композиций $\mathfrak{s}_L^{\max}$. Из формул (10.11)–(10.13) вытекает связь

$$\mathfrak{c}_L^{\max} = \frac{1}{2} \mathcal{A}^{\max} \tag{10.15}$$

решетки центров (10.14) с максимальными вершинами (10.7).

Далее условимся одной и той же буквой L обозначать решетку и *группу* параллельных переносов на векторы этой решетки.

Лемма 10.1. 1. *Имеет место включение*

$$L \subset \mathfrak{s}_L^{\max} \tag{10.16}$$

группы сдвигов L в группу (10.10).

2. *Любая симметрия $\mathfrak{s}_l^{\max}$ из группы $\mathfrak{s}_L^{\max}$ является изоморфизмом*

$$\mathfrak{s}_l^{\max} : \overrightarrow{\mathcal{G}} \ \overset{\sim}{\rightarrow} \ \overrightarrow{\mathcal{G}} \tag{10.17}$$

единичного графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.

1. Включение (10.16) получается непосредственно из формул преобразований (10.11) и (10.12).

2. Проверим выполнение биекции вершин

$$\mathfrak{s}_l^{\max} : \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} \;\xrightarrow{\sim}\; \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} \tag{10.18}$$

для центральных симметрий $\mathfrak{s}_l^{\max}$ из группы $\mathfrak{s}_L^{\max}$. По определению (2.3) множество вершин $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} = \mathbb{Z}_\mu^{d+1}$ представляет собою решетку (2.2). Любая симметрия $\mathfrak{s}_l^{\max} \in \mathfrak{s}_L^{\max}$ переводит $\mathfrak{s}_l^{\max}(x) = -x + a$ целые точки в целые. Вес образа точки x равен

$$\mu\mathfrak{s}_l^{\max} = -\mu x + \mu a = -\mu x + \frac{m-1}{m},$$

где согласно (2.2) вес самой точки x удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \mu x < 1$. Поэтому для образа $\mathfrak{s}_l^{\max}(x)$ выполняются неравенства

$$\frac{-1}{m} < \mu\mathfrak{s}_a^-(x) \leqslant \frac{m-1}{m},$$

т.е. $0 \leqslant \mu\mathfrak{s}_a^-(x) < 1$, что доказывает биекцию (10.18).

Если x, x' – две соседние вершины из $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}}$, то их разность $x' - x = \varepsilon_k^{\pm}$ принадлежит симметризованной единичной звезде $\varepsilon^{\pm}$ из (1.25). Для $x' = x + \varepsilon_k^{\pm}$ находим образ

$$\mathfrak{s}_l^{\max}(x') = -(x + \varepsilon_k^{\pm}) + a = (-x + a) - \varepsilon_k^{\pm} = \mathfrak{s}_a^-(x) - \varepsilon_k^{\pm}.$$

Поэтому разность образов

$$\mathfrak{s}_l^{\max}(x') - \mathfrak{s}_l^{\max}(x) = -\varepsilon_k^{\pm} \tag{10.19}$$

меняет только знак и снова принадлежит симметризованной звезде $\varepsilon^{\pm}$. Это озназает, что образы вершин $\mathfrak{s}_l^{\max}(x)$ и $\mathfrak{s}_l^{\max}(x')$ сохраняют соседство для всех центральных симметрий $\mathfrak{s}_l^{\max}$ из $\mathfrak{s}_L^{\max}$.

Отсюда вытекает общий изоморфизм (10.17), поскольку группа $\mathfrak{s}_L^{\max}$ порождается (10.10) центральными симметриями $\mathfrak{s}_l^{\max}$. □

10.2. Центральные симметрии звездного графа $\overrightarrow{G}$. Пусть pr_π – проекция (2.11). Для максимальной вершины $a^{\max}$ из (10.4) рассмотрим ее образ

$$v^{\max} = \mathrm{pr}_\pi a^{\max} = a^{\max} \circ v, \tag{10.20}$$

являющийся в силу (1.21) и (10.5) вершиной максимально возможного веса

$$\mu v^{\max} = \mu a^{\max} = \frac{m-1}{m} \tag{10.21}$$

вершинного графа $\overrightarrow{G}$. Тогда всем вершинам $a \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}}$ графа $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ максимального веса (10.6), (10.7) будет соответствовать множество

$$V^{\max} = \mathrm{pr}_\pi \mathcal{A}^{\max} = v^{\max} + L. \tag{10.22}$$

Обозначим через

$$\mathbf{s}^{\max} : x \mapsto -x + v^{\max} \tag{10.23}$$

центральную симметрию пространства $\mathbb{R}^d$ с *центром*

$$\mathbf{c}^{\max} = \frac{1}{2}\, v^{\max}. \tag{10.24}$$

Расширим данную симметрию через сдвиги из решетки $L \subset \mathbb{R}^d$ до *группы*

$$\mathbf{s}_L^{\max} = \langle \mathbf{s}^{\max} \circ L \rangle = \langle L \circ \mathbf{s}^{\max} \rangle, \tag{10.25}$$

порождаемой центральными симметриями вида

$$\mathbf{s}^{\max} \circ l : \ x \overset{l}{\mapsto} x + l \overset{\mathbf{s}^{\max}}{\mapsto} -x + (v^{\max} - l) \tag{10.26}$$

или

$$l \circ \mathbf{s}^{\max} : \ x \overset{\mathbf{s}^{\max}}{\mapsto} -x + v^{\max} \overset{l}{\mapsto} -x + (v^{\max} + l) \tag{10.27}$$

и всевозможными их композициями. Центральные симметрии (10.26) и (10.27) имеют соответственно центры

$$\mathbf{c}^{\max} \circ l = \mathbf{c}^{\max} - \frac{1}{2} l, \quad l \circ \mathbf{c}^{\max} = \mathbf{c}^{\max} + \frac{1}{2}\, l. \tag{10.28}$$

Поэтому центры (10.28) образуют *решетку центров*

$$\mathbf{c}_L^{\max} = \mathbf{c}^{\max} + \frac{1}{2} L \tag{10.29}$$

композиций $\mathbf{s}_L^{\max}$. Из формул (10.26)–(10.28) вытекает связь

$$\mathbf{c}_L^{\max} = \frac{1}{2} V^{\max} \tag{10.30}$$

решетки центров (10.29) с максимальными вершинами (10.22).

Лемма 10.2. 1. *Имеет место включение*

$$L \subset \mathbf{s}_L^{\max} \tag{10.31}$$

группы сдвигов L *в группу* (10.25).

2. *Любая симметрия* $\mathbf{s}_l^{\max}$ *из группы* $\mathbf{s}_L^{\max}$ *является изоморфизмом*

$$\mathbf{s}_l^{\max} : \ \overrightarrow{G} \ \overset{\sim}{\rightarrow} \ \overrightarrow{G} \tag{10.32}$$

звездного графа $\overrightarrow{G}$.

Доказательство. Это следует из определения (10.25) группы $\mathbf{s}_L^{\max}$ и диаграммы

$$\begin{array}{cccc} & \overrightarrow{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\mathbf{s}_l^{\max}} & \overrightarrow{\mathcal{G}} & \\ \mathrm{pr}_\pi & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{pr}_\pi, \\ & \overrightarrow{G} & \xrightarrow{\mathbf{s}_l^{\max}} & \overrightarrow{G} & \end{array} \tag{10.33}$$

коммутативной в силу равенства $v^{\max} = \mathrm{pr}_\pi a^{\max}$ из (10.20). □

10.3. Теорема о симметриях $\mathbf{s}_L^{\max}$ разбиений типа III.

Теорема 10.1. *Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v,\mu)$ – ядерное разбиение типа* III*, т.е. периодическое разбиение* (4.11)*, и $\mathbf{s}_l^{\max}$ – любая центральная симметрия из группы $\mathbf{s}_L^{\max}$, определенной в* (10.25)*. Тогда периодическое разбиение $\mathcal{T}$ центрально-симметрично*

$$\mathbf{s}_l^{\max}\mathcal{T} = \mathcal{T} \tag{10.34}$$

относительно симметрии $\mathbf{s}_l^{\max}$.

Доказательство. Это следствие леммы 10.2 и теоремы 3.1. □

§11. Симметрии минимальных сдвигов

11.1. Векторы минимального ненулевого веса. Рассмотрим композиции основной центральной симметрии $\mathbf{s}$ с центральными симметриями $\mathbf{s}_l^{\max}$ из группы $\mathbf{s}_L^{\max}$. По (5.1) и (10.26), (10.27) имеем

$$\mathbf{s}\circ\mathbf{s}_l^{\max}:\ x \overset{\mathbf{s}_l^{\max}}{\mapsto} -x + (v^{\max} - l) \overset{\mathbf{s}}{\mapsto} x - (v^{\max} - l) + v^{\mathrm{sum}}, \tag{11.1}$$

т.е.

$$\mathbf{s}\circ\mathbf{s}_l^{\max}:\ x \mapsto x + (v^{\min} + l), \tag{11.2}$$

где l – произвольный вектор решетки L и

$$v^{\min} = v^{\mathrm{sum}} - v^{\max} \tag{11.3}$$

– *вектор минимального ненулевого веса*

$$\mu v^1 = \mu v^{\mathrm{sum}} - \mu v^{\max} = 1 - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m} \tag{11.4}$$

в силу (5.3) и (10.21). Поскольку, согласно (4.3) и (4.4), векторы l из решетки L – это целые векторы нулевого веса $\mu l = 0$, то все векторы $v^1 + l$ из множества $v^1 + L$ также имеют минимальные ненулевые веса

$$\mu(v^{\min} + l) = \mu v^{\min} + \mu l = \mu v^{\min} = \frac{1}{m}. \tag{11.5}$$

Обозначим через

$$\mathbf{t}_L = \mathbf{s} \circ \mathbf{s}_L^{\max} \tag{11.6}$$

множество *минимальных сдвигов* (*shifts*) (11.2). Все такие сдвиги $\mathbf{t}_l \in \mathbf{t}_L$ характеризуются свойством (11.5).

11.2. Минимальные сдвиги как квазисимметрии разбиений.

Теорема 11.1. *Пусть* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v, \mu)$ *– ядерное разбиение типа* III*, т.е. периодическое разбиение* (4.11)*,* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\circ \cup \mathcal{K}_L$ *– его разложение* (9.5) *два подразбиения* $\mathcal{T}_\circ$ *и* $\mathcal{K}_L$*; кроме того, пусть* $\mathbf{t}_l$ *– любой сдвиг из множества минимальных сдвигов* $\mathbf{t}_L$ *и* $\mathbf{s}$ *– основная центральная симметрия* (5.1)*. Тогда действие сдвига* $\mathbf{t}_l$ *на все разбиение* (9.5) *сводится*

$$\mathbf{t}_l \mathcal{T} = \mathcal{T}_\circ \cup S' \mathcal{K}_L \tag{11.7}$$

к перекладыванию

$$S' : \ \mathcal{K}_L \ \longrightarrow \ S' \mathcal{K}_L \tag{11.8}$$

решетки ядер $\mathcal{K}_L$ *из* (9.2)*, при этом*

$$S' \mathcal{K}_L = S' \mathcal{K} + L, \tag{11.9}$$

где

$$\mathcal{K} \xrightarrow{S'} S' \mathcal{K} \tag{11.10}$$

– перекладывание (7.25) *ядра* $\mathcal{K}$*.*

Подействуем композицией $\mathbf{t}_l = \mathbf{s} \circ \mathbf{s}_l^{\max}$ на разбиение $\mathcal{T}$, последовательно применяя теоремы 10.1 и 9.1. Получаем соответственно изоморфизмы разбиений

$$\mathbf{s}_l^{\max} : \mathcal{T} \ \overrightarrow{\sim} \ \mathcal{T} \tag{11.11}$$

и

$$\mathbf{s} : \ \mathcal{T} \ \overrightarrow{\sim} \ \mathcal{T}_\circ \cup \mathbf{s} \mathcal{K}_L, \tag{11.12}$$

где $\mathbf{s} \mathcal{K}_L = \mathbf{s} \mathcal{K} + L$ – центрально-симметричноое преобразование (9.26)-(9.28) решетки ядер $\mathcal{K}_L$. Согласно (7.34) действие симметрии $\mathbf{s}$ эквивалентно

$$\mathbf{s} \mathcal{K} = S' \mathcal{K} \tag{11.13}$$

перекладыванию S' ядра (7.25). Из (11.11)–(11.13) получаем утверждения (11.7) и (11.8).

§12. Двойственное разбиение: определение, построение, симметрии

12.1. Двойственное разбиение. Возвращаемся к двойственному разбиению
$$\mathcal{T}^* = \mathbf{s}\,\mathcal{T}, \tag{12.1}$$
введенному ранее в (5.6). Если основное разбиение $\mathcal{T}$ представить в виде разложения $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\circ \cup \mathcal{K}_L$ из (9.5) на проколотое разбиение $\mathcal{T}_\circ$ и решетки ядер $\mathcal{K}_L = \mathcal{K} + L$, то двойственное разбиение (12.1) будет допускать соответственно разложение
$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_\circ \cup \mathcal{K}_L^*, \tag{12.2}$$
в котором $\mathcal{K}_L$ заменяется *решеткой двойственных ядер*
$$\mathcal{K}_L^* = \mathcal{K}^* + L, \quad \text{где} \quad \mathcal{K}^* = \mathbf{s}\,\mathcal{K}. \tag{12.3}$$

Замечание 12.1. Названия “основного” и “двойственного” разбиений условны. Можно за основное выбрать разбиение $\mathcal{T}^*$, которое в этом случае придется строить с самого начала, как разбиение $\mathcal{T}$ в основной теореме 1.1, заменив единичный полуинтервал $\mathfrak{I} = [0,1)$ двойственным ему полуинтервалом $\mathfrak{I}^* = (0,1]$. Выбор за основное разбиение $\mathcal{T}$ обусловлен исторически, начиная с разбиений Рози [2, 3].

12.2. Периодичность двойственного разбиения. Поскольку выполняется *формула коммутирования*
$$l \circ \mathbf{s} = \mathbf{s} \circ (-l) \tag{12.4}$$
между трансляциями $l \in L$ и основной центральной симметрией $\mathbf{s}$ из (5.1), то двойственное разбиение $\mathcal{T}^*$ имеет
$$\mathcal{T}^* + L = \mathcal{T}^* \tag{12.5}$$
ту же определенную в (4.12)–(4.14) решетку периодов L, что и исходное разбиение $\mathcal{T}$.

12.3. Действие расширенных основных центральных симметрий. Пусть $\mathbf{s}_l$ – любая центральная симметрия из множества $\mathbf{s}_L$, определенного в (9.7). Тогда из периодичности (12.5) вытекает серия формул связи
$$\mathbf{s}_l \mathcal{T}^* = \mathcal{T} \tag{12.6}$$
между разбиениями $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^*$.

12.4. Действие максимальных центральных симметрий. Обозначим через

$$\mathbf{s}^{*\max} : x \mapsto -x + v^{*\max} \tag{12.7}$$

– центральную симметрию пространства $\mathbb{R}^d$ с *центром*

$$\mathbf{c}^{*\max} = \frac{1}{2}\, v^{*\max}, \tag{12.8}$$

где

$$v^{*\max} = v^{\mathrm{sum}} + v^{\min} \tag{12.9}$$

– вектор веса

$$\mu v^{*\max} = \mu v^{\mathrm{sum}} + \mu v^{\min} = 1 + \frac{1}{m} = \frac{m+1}{m}. \tag{12.10}$$

Расширим симметрию $\mathbf{s}^{*\max}$ через сдвиги из решетки $L \subset \mathbb{R}^d$ до *группы*

$$\mathbf{s}_L^{*\max} = \langle \mathbf{s}^{*\max} \circ L \rangle = \langle L \circ \mathbf{s}^{*\max} \rangle \tag{12.11}$$

аналогично (10.25)-(10.27). Центры симметрий группы $\mathbf{s}_L^{*\max}$ образуют *решетку центров*

$$\mathbf{c}_L^{*\max} = \mathbf{c}^{*\max} + \frac{1}{2} L. \tag{12.12}$$

Теорема 12.1. *Пусть $\mathcal{T}^*$ – двойственное разбиение* (12.1) *для периодического ядерного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v, \mu)$ из* (4.11), *и $\mathbf{s}_l^{*\max}$ – любая центральная симметрия из группы $\mathbf{s}_L^{*\max}$, определенной в* (12.11). *Тогда периодическое разбиение $\mathcal{T}^*$ центрально-симметрично*

$$\mathbf{s}_l^{*\max} \mathcal{T}^* = \mathcal{T}^* \tag{12.13}$$

относительно симметрии $\mathbf{s}_l^{*\max}$.

Доказательство. Рассмотрим композицию $\mathbf{s}\mathbf{s}^{\max}\mathbf{s}$ центральных симметрий из (5.1) и (10.23). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{s}\mathbf{s}^{\max}\mathbf{s}(x) &= \mathbf{s}\mathbf{s}^{\max}(-x + v_{\mathrm{sum}}) = \mathbf{s}(x - v_{\mathrm{sum}} + v^{\max}) \\ &= -x + v_{\mathrm{sum}} + (v_{\mathrm{sum}} - v^{\max}) = -x + v_{\mathrm{sum}} + v^1 \\ &= -x + v^{*\max} = -x + v_{\mathrm{sum}} + v^1 = -x + v^{*\max}, \end{aligned} \tag{12.14}$$

где $v^{*\max}$ – вектор (12.9). В цепочке

$$\mathcal{T}^* \xrightarrow{\mathbf{s}} \mathcal{T} \xrightarrow{\mathbf{s}^{\max}} \mathcal{T} \xrightarrow{\mathbf{s}} \mathcal{T}^* \tag{12.15}$$

крайние отображения являются изоморфизмами разбиений. Таковым же будет и среднее отображение в силу теоремы 10.1. Следовательно, композиция $\mathbf{s}\mathbf{s}^{\max}\mathbf{s}$ задает изоморфизм двойственного разбиения

$\mathcal{T}^*$. Отсюда, периодичности (12.5) и определения (12.11) группы $\mathbf{s}_L^{*\max}$ получаем равенство (12.13). □

12.5. Действие минимальных сдвигов.

Теорема 12.2. *Пусть* $\mathcal{T}^*$ *– двойственное разбиение* (12.1) *для периодического ядерного разбиения* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v, \mu)$ *из* (4.11)*, и* $\mathbf{t}_l$ *– любой сдвиг из множества минимальных сдвигов* $\mathbf{t}_L$ (11.6)*. Тогда через сдвиг* $\mathbf{t}_l$ *основное* $\mathcal{T}$ *и двойственное* $\mathcal{T}^*$ *разбиения связаны изоморфизмами*

$$\mathbf{t}_l\mathcal{T} = \mathcal{T}^*, \quad \mathbf{t}_l^{-1}\mathcal{T}^* = \mathcal{T}. \tag{12.16}$$

Доказательство. Используя равенство (11.7) теоремы 11.1 и диаграмму (7.29), можем записать

$$\mathbf{t}_l\mathcal{T} = \mathcal{T}_\circ \cup \mathbf{s}\,\mathcal{K}_L, \tag{12.17}$$

где

$$\mathbf{s}\,\mathcal{K}_L = \mathcal{K}_L^*. \tag{12.18}$$

Из равенств (12.17), (12.18) и разложения (12.2) получаем первый изоморфизм из (12.16), из которого будет следовать и второй изоморфизм. □

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем. **71**, No. 2 (2007), 89–122.
2. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
3. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
4. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
5. В. Г. Журавлев, *Универсальные ядерные разбиения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **490** (2020), 49–93.
6. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.
7. P. Arnoux, V. Berthé, S. Ito, *Discrete planes, $\mathbb{Z}^2$-actions, Jacobi-Perron algorithm and substitutions.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52**, No. 2 (2002), 305–349.
8. V. Berthé, L. Vuillon, *Tilings and rotations on the torus: a two-dimensional generalization of Sturmian sequences.* — Discrete Math. **223** (2000), 27–53.
9. V. Berthé, A. Siegel, J. Thuswaldner, *Substitutions, Rauzy fractals and tilings.* — Combinatorics, Automata and Number Theory. Encyclopedia Math. Appl., vol. **135**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, 248–323.

10. S. Ito, M. Ohtsuki, *Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms.* — Tokyo J. Math. **16**, No. 2 (1993), 441–472.
11. S. Ito, M. Ohtsuki, *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm.* — Tokyo J. Math. **17**, No. 1 (1994), 33–58.
12. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Послойный рост квазипериодического разбиения Рози.* — Кристаллография **52** (2007), No. 2, 204–210.
13. A. V. Shutov, A. V. Maleev, *Quasiperiodic plane tilings based on stepped surfaces.* — Acta Crystallogr. **A64** (2008), 376–382.
14. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
15. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102.
16. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби.* Владимир, ВлГУ, 2019.
17. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
18. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, М., 1953.
19. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2, Киев, 1952.

Zhuravlev V. G. Symmetries of the universal karyon tilings.

Universal karyon tilings $\mathcal{T}(v,\mu,\rho)$ are generated by the parallelepipeds $T_0, T_1, \dots, T_d$ dividing the real space $\mathbb{R}^d$. The tilings $\mathcal{T}(v,\mu,\rho)$ are parameterized by triples (v,μ,ρ) running through the infinite cylinder $\triangle\times\triangle\times\mathbb{R}$ with the base $\triangle\times\triangle$ that is the direct product of two simplices $\triangle$ of dimension d. The parameter v defines the geometry of the parallelepipeds T_k and the two others μ,ρ define the symmetry of the karyon tiling $\mathcal{T}(v,\mu,\rho)$. We consider the usual and generalized symmetries of tilings $\mathcal{T}(v,\mu,0)$. The generalized symmetries are quasi-symmetries that map the tilings $\mathcal{T}(v,\mu,0)$ to their dual tilings $\mathcal{T}^*(v,\mu,0)$.

Владимирский государственный университет
600024, Владимир, пр. Строителей, 11, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 24 февраля 2022 г.