Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 511, 2022 г.

В. Г. Журавлев

КОМБИНАТОРИКА ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

Введение

Помимо локальных [1] и общих симметрий [2], ядерные разбиения $\mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^d$ размерности d обладают многими комбинаторными свойствами, изучению которых посвящена настоящая статья.

Чтобы сформулировать ее основные результаты, введем необходимые для этого понятия. Любое ядерное разбиение $\mathcal{T}$ содержит ядро $\mathbf{Kr} \subset \mathcal{T}$, образуемое $d+1$ параллелепипедом. Зная только ядро $\mathbf{Kr}$ разбиения $\mathcal{T}$, можно восстановить и все разбиение целиком – причина, по которой такие разбиения $\mathcal{T}$ названы ядерными [3]. Множество, состоящее из самого ядра $\mathbf{Kr}$ и соседних с ним многогранников из разбиения $\mathcal{T}$, образует корону $\mathbf{Cr}$ ядра $\mathbf{Kr}$.

В работе доказаны следующие утверждения.

1) Корона $\mathbf{Cr}$ ядра $\mathbf{Kr} \subset \mathcal{T}$ содержит все типы многогранных звезд St ядерного разбиения $\mathcal{T}$; и все звезды St, образующие корону $\mathbf{Cr}$, имеют различные типы, общее число которых равно $2^{d+1}-1$ (предложение 9.1).

2) Если $\mathbf{m}$ – порядок разбиения $\mathcal{T}$, равный общему количеству параллелепипедов, из которых состоит ядерное разбиение $\mathcal{T}$, то число f_a всех граней размерности a данного разбиения равно произведению m на биномиальный коэффициент – предложение 12.1.

Знание симметрий [1,2] и комбинаторики ядерных разбиений $\mathcal{T}$ позволяет ускорить процесс построения как самих разбиений $\mathcal{T}$, так и соответствующих им бесконечных периодических разбиений $\mathcal{T}_\infty$ всего пространства $\mathbb{R}^d$. Быстрые процессы построения разбиений $\mathcal{T}$ важны для приложений в теории многомерных цепных дробей [3–6], а также в кристаллографии [7,8].

Возникает естественный вопрос о том, что значит построить d-мерное многогранное разбиение $\mathcal{T}$? В настоящей статье мы принимаем следующую точку зрения. Построить разбиение $\mathcal{T}$ – значит уметь вычислять все его вершины x_n и в каждой вершине по ее координатам

Ключевые слова: ядерные разбиения тора, классификация, симметрии, комбинаторика, локальные правила.

уметь находить многогранную звезду $\mathrm{St}(x_n)$, состоящую из всех многогранников разбиения $\mathcal{T}$, имеющих своей вершиной данную точку x_n.

Построение ядерных разбиений $\mathcal{T}$ осуществляется с помощью трех последовательных алгоритмов 1 – 3 (п.п. 9, 10), а для построения бесконечного разбиения $\mathcal{T}_\infty$ добавлен еще алгоритм 4 (п. 10). В основе построения разбиений $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_\infty$ лежат два метода:

1) метод **Cr**-звезд, образующие корону **Cr** ядерного разбиения $\mathcal{T}$;

2) метод послойного роста вершин разбиения $\mathcal{T}$.

§1. Звезды и их производные

1.1. Центрированный унимодулярный симплекс. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_d = (0, \dots, 1) \tag{1.1}$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Пусть, как обычно, $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ обозначает *унимодулярную группу порядка* $d+1$, состоящую из целочисленных квадратных $(d+1) \times (d+1)$-матриц с определителем ± 1. Выделим в группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$, образованную матрицами вида $U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – произвольный целочисленный столбец. Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{1.2}$$

при этом α рассматривается как столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$. Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

Точку $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ назовем *иррациональной*, если выполняется условие:

$$\textit{числа} \quad 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Предложение 1.1. *Если* α *– иррациональная точка, то существует такая матрица* $U \in G_0$*, что выполняется включение*

$$\alpha \in (\triangle_U^d)^{\mathrm{int}}, \tag{1.4}$$

где $(\triangle_U^d)^{\mathrm{int}}$ *обозначает внутреннюю часть симплекса* $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$.

Доказательство. См. [9]. □

1.2. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Пусть $v_0, v_1, \dots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k_1', \dots, k_{d-1}'\} = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетение. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \tag{1.5}$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

Определение 1.1. Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k_1'} v_{k_1'} + \ldots + \lambda_{k_{d-1}'} v_{k_{d-1}'};\ \lambda_{k_1'}, \dots, \lambda_{k_{d-1}'} \in \mathbb{R}\} \tag{1.6}$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k_j'}$ с индексами k_j' из σ'. Тогда такое множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ назовем *звездой*, если для всех дополнительных (1.5) к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости (1.6) и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H_{\sigma'}^+$ и $H_{\sigma'}^-$.

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ будут линейно независимы. Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_d v_d;\ \lambda_0 + \ldots + \lambda_d \leqslant 1,\ \lambda_0, \dots, \lambda_d \geqslant 0\}, \tag{1.7}$$

где коэффициенты $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (1.7). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\mathrm{int}}(v). \tag{1.8}$$

1.3. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \tag{1.9}$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и $X_1^{\text{int}} \cap X_2^{\text{int}} = \emptyset$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k.

Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ не принадлежит плоскости $H_{\sigma'}$ из (1.6), где σ' – дополнительное сочетание (1.5) для σ. Пусть

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \tag{1.10}$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H^{\pm}_{\sigma'}$, и пусть $v(\sigma')$ – дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v. Тогда при этом условии множество векторов

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.11}$$

снова образует звезду.

Если существуют звезды v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *нерывождена*. Таким образом, для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma\}. \tag{1.12}$$

Звезду v^σ из (1.12) назовем *производной* (*σ-производной*) нерывожденой звезды v.

§2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_d] \tag{2.1}$$

– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \ldots, l_d$, т.е. векторы $l_1, \ldots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$, если отображение

$$T \overset{\rightarrow}{\sim} \mathbb{T}^d_L : x \mapsto x \bmod L \tag{2.2}$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d \tag{2.3}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{2.4}$$

на векторы $v_0, v_1, \ldots, v_D$, связанные с базисом (2.1) решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, d. \tag{2.5}$$

В формуле (2.4) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (2.3), где $k = 0, 1, \ldots, d$.

Заметим, что при переходе (2.5) от векторов переклыдывания v_0, $v_1, \ldots, v_d$ к базизу $l_1, \ldots, l_d$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{2.6}$$

В частности, из равенств (2.5) и (2.6) вытекают сравнения $v_k \equiv \alpha' \mod L$ для всех $k = 0, 1, \ldots, d$. Поэтому перекладывание (2.4) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : \ S'(x) \equiv x + \alpha' \mod L \tag{2.7}$$

на вектор $\alpha' \mod L$.

2.2. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \ldots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды

$$\overline{T}_m = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_d} v_{k_d}; \ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{2.8}$$

где $k_1, \ldots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ является звездой (см. определение 1.1), то объединение

$$\overline{T} = \overline{T}_0 \cup \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_d \tag{2.9}$$

параллелепипедов (2.8) образует *параллелоэдр* [10,11] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} \overline{T}[l] \tag{2.10}$$

с помощью параллельных переносов $\overline{T}[l] = \overline{T} + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $\overline{T}[l]$ из (2.10) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (1.9).

Для $d = 2$ параллелоэдр $\overline{T}$ из (2.8) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [12], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [13].

По *i-алгоритму* из [10] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\overline{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d$, имеющее внутреннюю часть $T^{\mathrm{int}} = (\overline{T})^{\mathrm{int}}$ такую же, как и параллелоэдр (2.9), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \coprod_{l \in L} T[l] \tag{2.11}$$

в строгом смысле (1.9), т.е. в (2.11) многогранники $T[l'] \cap T[l^{''}] = \varnothing$, если $l' \neq l^{''}$. Существование разбиения (2.11) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$. В результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ ставится в соответствие *перекладывающийся параллелоэдр*

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d, \tag{2.12}$$

являющийся разверткой тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания v_0, $v_1, \ldots, v_d$ в (2.4).

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^d_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} : \ x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \mod \mathcal{L}. \tag{2.13}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_L$ с изменяющимися решетками L.

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. Перекладывающаяся развертка T из (2.3) *вкладывается*

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.14}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1) Подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$ является *$\mathcal{L}$-различимым*, т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \mod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение

$$T \overset{\longrightarrow}{\sim} T \mod \mathcal{L}: \ x \mapsto x \mod \mathcal{L} \tag{2.15}$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (2.15) можем считать развертку T вложенной как множество

$$T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.16}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$.

2) Векторы перекладывания (2.4) имеют вид

$$v_k \equiv m_k \alpha \mod \mathcal{L} \tag{2.17}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \ldots$, называемыми *порядками* векторов v_k.

3) Пусть

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \{S^j(T_k);\ j = 1, \ldots, m_k - 1\} \tag{2.18}$$

обозначает *орбиту* подмножества $T_k \subset T$. В силу включения (2.16) будем полагать $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. Тогда по определению считается, что орбиты (2.18) удовлетворяют условию

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \varnothing \tag{2.19}$$

для $k = 0, 1, \ldots, d$.

Далее нам потребуется, в дополнение к (2.18), определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k);\ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \tag{2.20}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из (2.13) *иррациональным*, т.е. предполагать, что

$$\textit{числа} \quad 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \tag{2.21}$$

Здесь α_k – координаты α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Сумма

$$m = m_0 + m_1 + \ldots + m_d. \tag{2.22}$$

порядков m_k всех векторов v_k из (2.17) называется *порядком* разбиения тора $\mathcal{T}$.

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 в [3] следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (2.7) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ из (2.13), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \tag{2.23}$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{2.24}$$

соответственно развертку T из (2.3), (2.12) и *индуцированное разбиение* тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [14, 15]) *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ используется обозначение $T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$. Ядро Kr характеризуется следующим свойством: ядро – это такое подмножество $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\mathrm{Kr}}, \tag{2.25}$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (2.13), эквивалентно перекладыванию $D + 1$ подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Kr}_D. \tag{2.26}$$

В определении ядра Kr важно, что количество областей в разбиении (2.26) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}^D_{L}$, а индуцированное отображение (2.25) изоморфно сдвигу этого тора.

2.6. Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 2.1. *Определенная в* (2.12) *развертка тора* $T = T(v)$ *вкладывается* (2.14) *в тор* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) *множество* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d$ *из* (2.24) *является разбиением тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$*;*

2) *внутренняя часть* T^{int} *развертки* $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *не содержит ни одной из точек* x_j *орбиты*

$$\mathrm{Orb}^+(0, m) = \{x_j = S^j(0);\ j = 1, 2, \ldots, m - 1\} \tag{2.27}$$

порядка m*, определенного в* (2.22).

Доказательство. См. [3]. □

Чтобы не вводить новые термины, число m из (2.22) будем также называть и *порядком* развертки тора $T = T(v)$. Саму развертку $T = T(v)$ и порождающую ее звезду v назовем *минимальными*, если выполняется условие 2) из теоремы 2.1

2.7. Производные вкладывающихся звезд.

Определение 2.2. Пусть $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ – звезда и $T = T(v)$ – отвечающая ей развертка (2.24) тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \dots, v_d$. Если данная развертка T вкладывается $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v *вкладывается*

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.28}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига S.

Теорема 2.2. *Пусть невырожденная звезда* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ *вкладывается* (2.28) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ *с иррациональным* (2.21) *вектором* α*. Тогда любая ее* σ*-производная*

$$v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}$$

для $\sigma \in \Sigma$ *также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.29}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S.

Доказательство. См. [3]. □

§3. Производные звезды и производные разбиения тора произвольного порядка

3.1. Тотальная дифференцируемость звезд.

Рассмотрим $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$ – множество всех последовательностей $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$, состоящих из произвольных сочетаний $\xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}\}$ из Σ. Обозначим через

$$[\xi]_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \tag{3.1}$$

первые n членов последовательности ξ_i, при этом считаем, что $[\xi]_0 = \varnothing$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим последовательность $[\xi]_n$-*производных*, полагая

$$v^{[\xi]_n} = (v^{[\xi]_{n-1}})^{\xi_n}, \tag{3.2}$$

где $v^{[\xi]_0} = v$. И более обще

$$v^{\xi} = \{v^{[\xi]_0}, v^{[\xi]_1}, v^{[\xi]_2}, \ldots\} \tag{3.3}$$

– бесконечная последовательность $[\xi]_n$-производных. Скажем, что звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ будет $[\xi]_n$-*дифференцируемой* (соответственно ξ-*дифференцируемой*), если существует ее производная (3.2) порядка n (соответственно – существуют производные из (3.3) всех порядков $n = 0, 1, 2, \ldots$) Если существуют производные v^{ξ} для всех дифференцирований $\xi \in \Xi$, то будем говорить, что такая звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *тотально дифференцируема*.

Далее, чтобы избежать случаев вырождения, сосредоточимся исключительно на иррациональных (1.3) векторах сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Для произвольных торов $\mathbb{T}^d_L$ определение иррациональности вектора сохраняется (2.21). Нужно лишь числа $\alpha_1, \ldots,$ α_d рассматривать как координаты вектора α в произвольном базисе решетки L.

3.2. Производные разбиения $\mathcal{T}^{[\xi]_n}$ тора $\mathbb{T}^d$. Далее будем предполагать вектор α иррациональным (2.21). В предложении 1.1 вместо α выберем вектор $\alpha_- = -\alpha$. Тогда согласно (1.4) имеем

$$\alpha_- \in \triangle^{\mathrm{int}} \tag{3.4}$$

для некоторого унимодулярного симплекса $\triangle = \triangle^d_U = U\triangle^d_e$, центрированного точкой α_-. Выберем $\triangle$ в качестве базисного симплекса.

Обозначим через $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ вершины симплекса $\triangle$. Указанным вектору α_- и симплексу $\triangle$ отвечает звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ с лучами

$$v_k = \varepsilon_k - \alpha_- = \alpha + \varepsilon_k \tag{3.5}$$

для $k = 0, 1, \ldots, d$, причем ε_k – такие точки решетки $\mathbb{Z}^d$, что их разности

$$l_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0, \ \ldots, \ l_d = \varepsilon_d - \varepsilon_0 \tag{3.6}$$

образуют базис решетки $\mathbb{Z}^d$. По теореме 4.1 из [1] звезда v будет бесконечно дифференцируемой.

Фиксируем звезду v с лучами (3.5), произвольную последовательность дифференцирований $\xi \in \Xi$ и порядок $n = 1, 2, 3, \ldots$ Обозначим

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\} = v^{[\xi]_n} = \{v_0^{[\xi]_n}, v_1^{[\xi]_n}, \ldots, v_d^{[\xi]_n}\} \tag{3.7}$$

– $[\xi]_n$-производную звезду для v. Используя определение (2.28) не трудно проверить, что звезда v вкладывается $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$ в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Поэтому по той же теореме 4.1 из [1] производная звезда $\mathbf{v} = v^{[\xi]_n}$ снова вкладывается

$$\mathbf{v} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{3.8}$$

в тор $\mathbb{T}^d$ относительно того же сдвига S.

В силу определения производной звезды (1.12) можем записать

$$\mathbf{v} = U_n v. \tag{3.9}$$

Здесь звезды $\mathbf{v}$ и v представлены в виде столбцов

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

и

$$U_n = U^{[\xi]_n} \tag{3.11}$$

– унимодулярная матрица размера $d + 1$, обладающая свойствами:

1) элементы матрицы U_n неотрицательны;

2) сумма элементов в каждой строке матрицы U_n положительна. Так как согласно (3.5) имеем матричное представление

$$v = m\alpha + \varepsilon = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_d \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

и аналогично –

$$\mathbf{v} = \mathbf{m}\alpha + \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_d \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_d \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

то из (3.9) и иррациональности (1.3) вектора α выводим формулы

$$\mathbf{m} = U_n m, \quad \mathbf{e} = U_n \varepsilon. \tag{3.14}$$

Если воспользоваться поэлементной записью, то из (3.14) следует, что звезда $\mathbf{v}$, определенная в (3.7), имеет лучи

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{m}_k \alpha + \mathbf{e}_k, \tag{3.15}$$

где $\mathbf{m}_k$ – целые положительные коэффициенты и векторы $\mathbf{e}_k$ имеют целые координаты для всех $k = 0, 1, \ldots, d$. Отсюда получаем сравнения

$$\mathbf{v}_k \equiv \mathbf{m}_k \alpha \bmod \mathbb{Z}^d. \tag{3.16}$$

Обозначим общую сумму коэффициентов в (3.15) через

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \ldots + \mathbf{m}_d \tag{3.17}$$

и назовем ее *порядком* звезды $\mathbf{v}$.

3.3. Производная развертка ядра. Звезде $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (3.7) соответствует перекладывающаяся развертка

$$\mathbf{T} = T^{[\xi]_n} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{T}_d \tag{3.18}$$

малого тора

$$\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d / L \subset \mathbb{T}^d \tag{3.19}$$

с векторами перекладывания $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$,…, $\mathbf{v}_d$, где $L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_d]$ – полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом

$$l_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \ \ldots, \ l_d = \mathbf{v}_d - \mathbf{v}_0. \tag{3.20}$$

Напомним, что параллелепипед $\mathbf{T}_k$ в (3.18) порождается векторами $\mathbf{v}_i \in \mathbf{v}$ с номерами i из множества

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}, \tag{3.21}$$

где $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$. Множество векторов

$$\mathrm{Sk}_k = \{\mathbf{v}_i;\ i \in \mathcal{D}_k\} \tag{3.22}$$

назовем *остовом* (skeleton) параллелепипеда $\mathbf{T}_k$. Остов Sk_k порождает параллелепипед $\mathbf{T}_k$ и содержит наименьшее число векторов с указанным свойством.

Рассмотрим $[\xi]_n$-производное разбиение

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}(v^{[\xi]_n}) = \mathcal{T}(\mathbf{v}) \tag{3.23}$$

тора $\mathbb{T}^d$, которое согласно (2.24) можно записать в развернутом виде

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}_0(\mathbf{v}) \sqcup \mathcal{T}_1(\mathbf{v}) \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d(\mathbf{v}). \tag{3.24}$$

Здесь

$$\mathcal{T}_k(\mathbf{v}) = \mathbf{T}_k \sqcup S^1(\mathbf{T}_k) \sqcup \ldots \sqcup S^{\mathbf{m}_k-1}(\mathbf{T}_k) \tag{3.25}$$

– орбитное разбиение, составленное из S-сдвигов параллелепипеда $\mathbf{T}_k$ из развертки (3.18), или *орбита* параллелепипеда $\mathbf{T}_k$.

Производная развертка (3.18) является *ядром* (karyon)

$$\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}(\mathbf{v})) \tag{3.26}$$

$[\xi]_n$-производного разбиения тора (3.23), поэтому такие разбиения называются *ядерными* (примеры других ядерных разбиений см. [15–17]). Само ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ порождается звездой $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (3.7). По этой причине $\mathbf{v}$ будем называть *ядерной звездой.*

Определенное в (3.17) понятие порядка $\mathbf{m}$ звезды $\mathbf{v}$ перенесем как на само ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$, так и на порождаемое звездой $\mathbf{v}$ разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$. Наконец, определим еще конечную орбиту

$$\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d;\ j = 0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\} \tag{3.27}$$

начальной точки $x_0 = 0$ на торе $\mathbb{T}^d$.

§4. ОРБИТЫ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ И ЗВЕДЫ

4.1. Вершины параллелепипедов. Согласно определениям (2.8) и (3.7) параллелепипед $\mathbf{T}_k$ имеет следующие *вершины*

$$\mathrm{Ver}_k = \mathrm{Ver}\, \mathbf{T}_k = \{\mathbf{v}_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k\}. \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ – *мультииндекс*, являющийся произвольным подмножеством индексов из множества (3.21), и

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = \mathbf{v}_{i_1} + \ldots + \mathbf{v}_{i_\iota}. \tag{4.2}$$

При этом в (4.1) допускается пустое подмножество $\mathbf{i} = \varnothing$, когда $\iota = 0$. В данном случае полагаем $\mathbf{v}_\varnothing = 0$. Таким образом, по определению $\iota = 0, 1, \ldots, d$. Поэтому каждый параллелепипед $\mathbf{T}_k$ в (3.18) имеет число вершин

$$\sharp \mathrm{Ver}_k = 2^d. \tag{4.3}$$

Далее нам потребуется понятие *отмеченного параллелепипеда* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ – это параллелепипед $\mathbf{T}_k$ с некоторой выделенной фиксированной его вершиной $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} \in \mathrm{Ver}_k$.

Аналогично (2.20) определим *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(\mathrm{Ver}_k) = \{S^j(\mathrm{Ver}_k);\ j \in \mathcal{M}_k\}. \tag{4.4}$$

всех вершин (4.1) параллелепипеда $\mathbf{T}_k$, где $\mathcal{M}_k = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m}_k - 1\}$. Согласно (4.2) вершина $\mathbf{v_i} \in \mathrm{Ver}_k$ с мультииндексом $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ имеет *порядок*

$$\mu_{\mathbf{i}} = \operatorname{ord} \mathbf{v_i} = \mathbf{m}_{i_1} + \ldots + \mathbf{m}_{i_\iota}. \tag{4.5}$$

Если $\mathbf{i} = \varnothing$, то по соглашению порядок равен $\mu_\varnothing = \operatorname{ord} \mathbf{v}_\varnothing = 0$. Из (4.5) следует, что вершина

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}}^j = S^j(\mathbf{v_i}) \ \in \ \mathrm{Orb}(\mathrm{Ver}_k) \tag{4.6}$$

будет иметь порядок

$$\mu_{\mathbf{i}}^j = \operatorname{ord} \mathbf{v}_{\mathbf{i}}^j = \operatorname{ord} \mathbf{v_i} + j = \mu_{\mathbf{i}} + j, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$ и $j \in \mathcal{M}_k$.

4.2. Многогранные звезды. Для любого порядка $n \in \mathcal{M}$, где

$$\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}, \tag{4.8}$$

обозначим через

$$\mathrm{St}(n) = \{\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j;\ \mathbf{v}_{\mathbf{i}}^j = x_n\} \tag{4.9}$$

многогранную звезду в точке $x_n = S^n(0)$ орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (3.27). Здесь

$$\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}), \tag{4.10}$$

$\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$, $j \in \mathcal{M}_k$ и $k = 0, 1, \ldots, d$. Таким образом, звезда $\mathrm{St}(n)$ состоит из всех параллелепипедов

$$\mathbf{T}_k^j = S^j(\mathbf{T}_k), \tag{4.11}$$

входящих в разбиение тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (3.24) и имеющих общую вершину $x_n \in \mathbb{T}^d$. В этом смысле ядро $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (3.26) является *ядерной многогранной звездой*

$$\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{St}(0). \tag{4.12}$$

Используя обозначение (4.7), многогранную звезду (4.9) можно также определить следующим эквивалентным образом

$$\mathrm{St}(n) = \{\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}^j;\ \mu_{\mathbf{i}}^j = n\}. \tag{4.13}$$

§5. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ ТОРА

5.1. Спектр разбиения. Для любого подмножества $\mathbf{i}$ из множества индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$ определим *критическое значение*

$$\lambda_{\mathbf{i}} = \mathbf{m}_{i_1} + \ldots + \mathbf{m}_{i_\iota}. \tag{5.1}$$

В частности, если $\mathbf{i} = \mathcal{D}$, то $\lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \ldots + \mathbf{m}_d$, и, следовательно,

$$\lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m} = \sharp\,\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m}) \tag{5.2}$$

равно (3.17) – порядку орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (3.27). Множество

$$\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}\} \tag{5.3}$$

назовем *спектром* разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ из (3.24). Скажем, что спектр Λ и само разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ *невырождены*, если

$$\lambda_{\mathbf{i}} \neq \lambda_{\mathbf{j}} \quad \text{при условии} \quad \mathbf{i} \neq \mathbf{j}. \tag{5.4}$$

5.2. Невырожденные разбиения. Предположим, что спектр Λ разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ невырожден, т.е. выполнено условие (5.4). Таким образом, в невырожденном случае имеет место взаимно однозначное соответствие

$$\mathcal{D} \supset \mathbf{i} \Leftrightarrow \lambda_{\mathbf{i}} \in \Lambda \tag{5.5}$$

и, значит, в спектре Λ число различных элементов $\sharp\Lambda = 2^{d+1}$. Поэтому для существования невырожденного разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ необходимо, чтобы его порядок $\mathbf{m}$ удовлетворял неравенству $\mathbf{m} \geqslant 2^{d+1}$.

Введем на подмножествах $\mathbf{i}$ из $\mathcal{D}$ *линейный порядок*

$$\mathbf{i} \prec \mathbf{j}, \quad \text{если} \quad \lambda_{\mathbf{i}} < \lambda_{\mathbf{j}}. \tag{5.6}$$

Расположим критические значения $\lambda_{\mathbf{i}}$ из спектра Λ в порядке их возрастания

$$\lambda_{\varnothing} = 0 \ < \ \ldots \ < \ \lambda_{\mathbf{i}} < \lambda_{\mathbf{i}'} \ < \ \ldots \ < \ \lambda_{\mathcal{D}} = \mathbf{m}. \tag{5.7}$$

Здесь через $\mathbf{i}^{'}$ обозначено подмножество из $\mathcal{D}$, непосредственно следующее за $\mathbf{i}$ относительно упорядочения (5.6). Последовательности (5.7) соответствует упорядоченная последовательность подмножеств $\mathbf{i}$ из $\mathcal{D}$:

$$\varnothing \prec \ldots \prec \mathbf{i} \prec \mathbf{i}^{'} \prec \ldots \prec \mathcal{D}. \tag{5.8}$$

В соответствии с упорядочением (5.7) спектра Λ множество $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ можно разбить

$$\mathcal{M}_{\mathrm{St}} = \Lambda_{\varnothing} \sqcup \ldots \sqcup \Lambda_{\mathbf{i}} \sqcup \Lambda_{\mathbf{i}'} \sqcup \ldots \tag{5.9}$$

на последовательные *координационные интервалы*

$$\Lambda_{\mathbf{i}} = \{\lambda_{\mathbf{i}}, \lambda_{\mathbf{i}} + 1, \dots, \lambda_{\mathbf{i}'} - 1\} \tag{5.10}$$

с мультииндексами $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$. Укажем, что в разбиении (5.9) условие строгого включения $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$ равносильно ограничению $\mathbf{i} \prec \mathcal{D}$. Поэтому количество интервалов в разбиении (5.9) равно $\sharp\, \mathcal{M}_{\mathrm{St}} = \sharp\Lambda - 1 = 2^{d+1} - 1$.

Теорема 5.1. *Определенные в* (3.24) *невырожденные разбиения тора* $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ *обладают следующими свойствами.*

1) *Для любой вершины* $x_n = S^n(0)$ *орбиты* $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ *с номером* n *из* $\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1\}$ *многогранная звезда* $\mathrm{St}(n)$ *с вершиной* x_n*, определенная в* (4.9)*, состоит*

$$\mathrm{St}(n) = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant d} \; \bigcup_{\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k} \; \bigcup_{\substack{j \in \mathcal{M}_k \\ \mu^j_{\mathbf{i}} = n}} \mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}} \tag{5.11}$$

из многогранников $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}} = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$*, получающихся* S*-сдвигами отмеченных параллелепипедов* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$*, т.е. параллелепипедов* $\mathbf{T}_k$ *из* (3.18) *с выделенной вершиной* $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} \in \mathrm{Ver}_k$*. Различные многогранники* $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}$ *в разбиении* (5.11) *не имеют общих внутренних точек.*

2) *Если номера* n, $m \in \mathcal{M}$ *принадлежат одному координационному интервалу* $\Lambda_{\mathbf{i}}$ *из* (5.10)*, то соответствующие многогранные звезды* $\mathrm{St}(n)$, $\mathrm{St}(m)$ *эквивалентны*

$$\mathrm{St}(n) \;\sim\; \mathrm{St}(m), \tag{5.12}$$

т.е. одна звезда получается из другой параллельным сдвигом.

3) *Если же* $n \in \Lambda_{\mathbf{i}}$, $m \in \Lambda_{\mathbf{j}}$ *принадлежат различным координационным интервалам* $\Lambda_{\mathbf{i}} \neq \Lambda_{\mathbf{j}}$*, то отвечающие им звезды* $\mathrm{St}(n)$, $\mathrm{St}(m)$ *неэквивалентны*

$$\mathrm{St}(n) \;\nsim\; \mathrm{St}(m). \tag{5.13}$$

Доказательство. См. [1]. ☐

§6. СИММЕТРИИ МНОГОГРАННЫХ ЗВЕЗД И КООРДИНАЦИОННЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

6.1. Типы многогранных звезд. Скажем, что многогранные звезды $\mathrm{St}(n)$ и $\mathrm{St}(m)$ принадлежат одному *типу*, если они эквивалентны (5.12). По теореме 5.1 невырожденные разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ содержат

$$\sharp\, \mathrm{St}_d = 2^{d+1} - 1 \tag{6.1}$$

различных типов многогранных звезд, где через St_d обозначено множество всех типов. Каждому типу звезд отвечает свой интервал $\Lambda_{\mathbf{i}}$ в разбиении (5.9). Поэтому типы звезд разбиения тора $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ допускают следующую *параметризацию*

$$\mathrm{St}(\varnothing),\ \ldots,\ \mathrm{St}(\mathbf{i}),\ \mathrm{St}(\mathbf{i}'),\ \ldots \tag{6.2}$$

собственными подмножествами $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$ из множества индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$.

6.2. Симметрии многогранных звезд. На множестве многогранных звезд $\mathrm{St}(n)$, определенных в (4.9), с номерами n из $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ зададим отображение

$$s : \mathrm{St}(n) \longrightarrow \mathrm{St}(\overline{n}), \tag{6.3}$$

полагая $\overline{n} = \mathbf{m} - 1 - n$.

Пусть $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}} = S^j(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ – многогранники, получающихся S-сдвигами отмеченных параллелепипедов $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$. Здесь k пробегает множество индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$, j принадлежит $\mathcal{M}_k = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m}_k - 1\}$ и $\mathbf{i}$ – произвольное подмножество из множества $\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}$. На указанном множестве многогранников определим еще одно отображение

$$\mathfrak{s} : \mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}} \longrightarrow \mathbf{T}^{\overline{j}^k}_{k,\overline{\mathbf{i}}^k}, \tag{6.4}$$

где $\overline{j}^k = \mathbf{m}_k - 1 - j$ и $\overline{\mathbf{i}}^k = \mathcal{D}_k \setminus \{\mathbf{i}\}$.

Используя теорему 5.1, распространим отображение (6.4) на многогранные звезды $\mathrm{St}(n)$. Согласно формуле (5.11) каждая звезда $\mathrm{St}(n)$ разбивается

$$\mathrm{St}(n) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}} \tag{6.5}$$

определенным образом на многогранники $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}$. Положим

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathfrak{s}\,(\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}) \tag{6.6}$$

с k, $\mathbf{i}$, j, пробегающими те же множества, что и в разбиении (6.5).

Теорема 6.1. 1) *Отображение* (6.6) *определено корректно. Это означает, что* $\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n))$ *– снова многогранная звезда, а правая часть в равенстве* (6.6) *– ее разбиение на образующие многогранники* $\mathfrak{s}\,(\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}})$.

2) *Для всех* $n \in \mathcal{M}$ *выполняется равенство*

$$\mathfrak{s}\,(\mathrm{St}(n)) = s(\mathrm{St}(n)), \tag{6.7}$$

где s *– отображение* (6.3).

3) *Многогранная звезда* $\mathrm{St}(\overline{n}) = s\,(\mathrm{St}(n))$ *имеет разбиение*

$$\mathrm{St}(\overline{n}) = \bigcup_{k,\,\mathbf{i},\,j} \mathbf{T}^{\overline{j}}_{k,\overline{\mathbf{i}}} \tag{6.8}$$

с такими же индексами k, $\mathbf{i}$, j, *как и в разбиении* (6.5) *или более конкретно – в разбиении* (5.11). *Здесь дополнения* $\overline{j}$, $\overline{\mathbf{i}}$ *определены в* (6.4).

Доказательство. См. [1]. ☐

6.3. Центральная симметрия многогранных звезд. Пусть $\mathrm{St}(n)$ – многогранная звезда (4.9) с центром в точке $x_n = S^n(0)$. Обозначим через $o(\mathrm{St}(n))$ звезду, получающуюся из звезды $\mathrm{St}(n)$ с помощью центральной симметрии с центром x_n.

Предложение 6.1. 1) *Для любого* $n \in \mathcal{M}$ *многогранные звезды* $\mathrm{St}(\overline{n})$, *где* $\overline{n} = \mathbf{m} - 1 - n$, *и* $o(\mathrm{St}(n))$ *принадлежат одному типу:*

$$\mathrm{St}(\overline{n}) \sim o(\mathrm{St}(n)). \tag{6.9}$$

2) *Если* n *принадлежит инвариантному интервалу* $\Lambda_{\mathbf{i}} = \overline{\Lambda}_{\mathbf{i}}$ *из* (5.10), *то*

$$o(\mathrm{St}(n)) = \mathrm{St}(n), \tag{6.10}$$

т.е. звезды $\mathrm{St}(n)$ *являются центрально симметричными для всех* $n \in \Lambda_{\mathbf{i}}$.

Доказательство. См. [1]. ☐

§7. ЛУЧЕВЫЕ ЗВЕЗДЫ

7.1. Правило максимума для лучей. Каждой определенной (4.9) многогранной звезде $\mathrm{St}(n)$ с вершиной в точке x_n можно поставить в соответствие

$$\mathrm{cst} : \mathrm{St}(n) \longrightarrow \mathrm{st}(n) \tag{7.1}$$

лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$. Назовем cst *отображением сужения* (constriction map) многогранной звезды $\mathrm{St}(n)$ на лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$. Определение отображения cst состоит в следующем. Рассмотрим все ребра параллелепипедов $\mathbf{T}^{j}_{k,\mathbf{i}} \in \mathrm{St}(n)$, выходящие из вершины x_n звезды

$\mathrm{St}(n)$. Если за начало ребер выбрать точку x_n, то ребра принимают направления и становятся векторами $\mathbf{w}_k = \pm\mathbf{v}_k$ из *симметризованной ядерной звезды*

$$\mathbf{w} = \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \ldots, \pm\mathbf{v}_d\}, \tag{7.2}$$

где $\mathbf{v}_k$ – лучи звезды $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ из (3.7). Множество отмеченных векторов $\mathbf{w}_k$ образует лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ в (7.1).

Далее нам потребуется понятие *допустимого луча* $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$, где $k = 0, 1, \ldots, d$, в точке x_n орбиты $\mathrm{Orb}(0, \mathbf{m})$ из (3.27) – это такой луч $\mathbf{w}_k$, что выполняются неравенства

$$0 \leqslant \; n + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\, \mathbf{m}_k \; \leqslant \mathbf{m} - 1. \tag{7.3}$$

Здесь $\mathrm{sign}(\mathbf{w}_k) = \pm 1$ – *знак* луча $\mathbf{w}_k = \pm\mathbf{v}_k$.

Теорема 7.1. *Лучевая звезда* $\mathrm{st}(n)$ *из* (7.1) *состоит из всех допустимых* (7.3) *лучей* $\mathbf{w}_k$ *симметризованной звезды* $\mathbf{w}$.

Доказательство. См. [1]. □

По теореме 7.1, чтобы построить определенную в (7.1) лучевую звезду $\mathrm{st}(n)$ с вершиной в точке x_n достаточно знать номер этой звезды n и порядки $\mathbf{m}_0$, $\mathbf{m}_1, \ldots$, $\mathbf{m}_d$ всех лучей $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ ядра $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ из (3.26). Напомним (4.12), что само ядро является многогранной звездой $\mathbf{T} = \mathbf{Kr} = \mathrm{St}(0)$ с вершиной $x_0 = 0$. Лучи же ядра $\mathbf{T} = \mathbf{Kr}$ образуют

$$\mathbf{t} = \mathbf{kr} = \mathrm{st}(0) \tag{7.4}$$

– *ядерную лучевую звезду*. Итак, зная ядерную звезду (7.4) можно построить все лучевые звезды $\mathrm{st}(n)$, используя *правило максимума* – способе построения, представленном в теореме 7.1. В следующих разделах мы обсудим более детально указанное правило.

7.2. Симметрии лучевых звезд. Для лучевых звезд сохраним обозначение $o(\mathrm{st}(n))$ за звездой, получающейся из звезды $\mathrm{st}(n)$ с помощью центральной симметрии относительно ее центра $x_n = S^n(0)$.

Предложение 7.1. *Для любого* $n \in \mathcal{M}$ *лучевые звезды* $\mathrm{st}(\overline{n})$, *где* $\overline{n} = \mathbf{m} - 1 - n$, *и* $o(\mathrm{st}(n))$ *принадлежат одному типу:*

$$\mathrm{st}(\overline{n}) \sim o(\mathrm{st}(n)). \tag{7.5}$$

Доказательство. См. [1]. □

7.3. Вложение звезд. Скажем, что лучевая звезда $\mathrm{st}(n)$ *вкладывается* в многогранную звезду $\mathrm{St}(m)$:

$$\mathrm{em} : \mathrm{st}(n) \hookrightarrow \mathrm{St}(m), \tag{7.6}$$

если выполняется эквивалентность $\mathrm{st}(n) \sim \mathrm{st}(m)$, где лучевая звезда $\mathrm{st}(m) = \mathrm{cst}(\mathrm{St}(m))$ является сужением (7.1) многогранной звезды $\mathrm{St}(m)$. Отображение вложения em можно рассматривать как многозначный аналог обратного отображения для отображения сужения cst.

§8. Локальные графы и многогранные звезды

8.1. Обратная задача. В отличие от графа, само разбиение тора $\mathcal{T}$ состоит (3.24), (3.25) из параллелепипедов $\mathbf{T}_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$, и их S-сдвигов $S^j(\mathbf{T}_k)$, т.е. из d-мерных многогранников. Но тогда граф $G(\mathcal{T})$ можно интерпретировать как *скелет* разбиения $\mathcal{T}$, образованный из вершин и ребер многогранников.

Возникает *обратная задача*:

$$G \Rightarrow \mathcal{T} \tag{8.1}$$

– по графу G построить само разбиение $\mathcal{T}$. В случае размерностей $d = 1, 2$ разбиение $\mathcal{T}$ однозначно восстанавливается по его графу G. Однако, если $d \geqslant 3$, то задача становится значительно сложнее. Так, при обсуждении *подъема*

$$\mathrm{em} : \mathrm{st}(n) \hookrightarrow \mathrm{St}(n) \tag{8.2}$$

в (7.6) мы отмечали, что лучевая звезда $\mathrm{st}(n)$ однозначно определяет свою многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$ только, если $\mathrm{st}(n)$ – *жесткая звезда*, а это – явление крайне редкое [1]. Чтобы решить задачу (8.1), попробуем с помощью правила максимума к лучевой звезде $\mathrm{st}(n)$ добавлять окружающие ее соседние лучевые звезды и уже по всей этой совокупности определять многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$ в (8.2).

8.2. Правило максимума для ядерных параллелепипедов. Пусть $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ – произвольный отмеченный параллелепипед , т.е. ядерный параллелепипед $\mathbf{T}_k$, в котором выделена его вершина $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in \mathrm{Ver}_k$. Поставим такому $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ в соответствие *граф параллелепипеда* $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$, чьи вершины $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})^{\mathrm{ver}}$ – это вершины параллелепипеда $\mathbf{T}_k$, а выделенная вершина $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})^{\mathrm{ver}}$ считается *начальной*. Две вершины графа соединены ребром, если данные вершины соседние в параллелепипеде $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$. Как и сам параллелепипед $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$, его граф $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ являются отмеченными.

Для такого графа определим *отмеченное вложение*

$$G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} G(x_n, j) \tag{8.3}$$

в локальные графы $G(x_n, j)$ радиуса j. Вложение (8.3) означает, что сдвиг тора $\mathbb{T}^d$, переводящий выделенную вершину $\mathbf{v}_\mathbf{i} \in G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})^{\mathrm{ver}}$ в центр x_n графа $G(x_n, j)$, одновременно вкладывает граф $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ в граф $G(x_n, j)$, т.е. переводит вершины в вершины и сохраняет их смежность. Таким образом, из определения следует, что $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ является подграфом $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \subset G$ графа разбиения G всего тора $\mathbb{T}^d$. Ясно, что отмеченное вложение возможно только при выполнении условия $j \geqslant d$, так как граф параллелепипеда $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$ с центром в вершине $\mathbf{v}_\mathbf{i}$ имеет радиус d.

Далее нам потребуется еще одно *отмеченное вложение*

$$\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \overset{\cdot}{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n) \tag{8.4}$$

параллелепипеда $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ в многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$ из (4.9), имеющую центр в той же самой вершине x_n, что и у графа $G(x_n, j)$. Здесь снова предполагается, что сдвиг тора, отображающий вершину $\mathbf{v}_\mathbf{i}$ в центр x_n звезды $\mathrm{St}(n)$, переводит параллелепипед $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ в один из параллелепипедов, входящих в звезду $\mathrm{St}(n)$.

Лемма 8.1. *Отмеченные вложения* (8.3) *и* (8.4) *связаны отношением эквивалентности*

$$G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} G(x_n, j) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \overset{\cdot}{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n) \tag{8.5}$$

для радиусов $j \geqslant d$*, где* d *– размерность тора* $\mathbb{T}^d$.

Доказательство. Используя изоморфизм из предложения 8.1 [2] между графами разбиения тора и их координационными проекциями, вместо (8.5) будем рассматривать эквивалентность

$$\mathcal{G}(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} \mathcal{G}(x_n, j) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \overset{\cdot}{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n) \tag{8.6}$$

для соответствующих $G(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$, $G(x_n, j)$ координационных графов $\mathcal{G}(\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}})$, $\mathcal{G}(x_n, j)$. Согласно (4.4) и (4.9) левая и правая части (8.6) каждая по отдельности равносильны выполнению неравенств

$$\mu_\mathbf{i} \leqslant n \leqslant \mu_\mathbf{i} + \mathbf{m}_k - 1, \tag{8.7}$$

где значения $\mu_{\mathbf{i}} = \mathbf{m}_{i_1} + \ldots + \mathbf{m}_{i_\iota}$ были определены в (4.5), что доказывает требуемую эквивалентность (8.6). ☐

Замечание 8.1. Утверждение о том, что условие вложимости $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} \overset{\cdot}{\hookrightarrow} \mathrm{St}(n)$ отмеченного параллелепипеда $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ в многогранную звезду $\mathrm{St}(n)$ эквивалентно выполнимости неравенств (8.7), есть не что иное, как *правило максимума* для параллелепипедов $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}}$ – аналоге правила максимума (7.3) для ядерных лучей $\mathbf{w}_k$, сформулированном в теореме 7.1.

§9. Корона ядра разбиения тора

9.1. Корона и типы многогранных звезд. Согласно (3.26) ядро $\mathbf{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$ производного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора $\mathbb{T}^d$ совпадает

$$\mathbf{Kr} = \mathrm{St}(0) = \mathbf{T}_0 \sqcup \mathbf{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbf{T}_d \tag{9.1}$$

с многогранной звездой с центром в точке $x_0 = 0$. В правой части (9.1) записаны параллелепипеды $\mathbf{T}_k$, являющиеся отмеченными параллелепипедами $\mathbf{T}_{k,\varnothing}$. Чтобы не вводить дополнительного обозначения, будем считать ядро в (9.1) замкнутым $\mathbf{Kr} = \overline{\mathbf{Kr}}$.

Обозначим через $\mathbf{Cr}$ множество, состоящее из самого ядра $\mathbf{Kr}$ и соседних с ним многогранников P из разбиения тора $\mathcal{T}$. Причем *соседними* считаются любые пересекающиеся многогранники. Множество $\mathbf{Cr}$ назовем *короной* ядра $\mathbf{Kr}$. По определению корона $\mathbf{Cr}$ содержит $d+1$ многогранник $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\ldots$, $\mathbf{T}_d$ ядра (9.1) и еще окружающие его многогранники $P \in \mathcal{T}$. Согласно (4.1) корона $\mathbf{Cr}$ содержит

$$\sharp \mathrm{Ver}\, \mathbf{Cr}^{\mathrm{int}} = 2^{d+1} - 1 \tag{9.2}$$

внутренних вершин

$$\mathrm{Ver}\, \mathbf{Cr}^{\mathrm{int}} = \{\mathbf{v}_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subset \mathcal{D}\}, \tag{9.3}$$

где мультииндекс $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ пробегает собственные подмножества из $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$ и $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = \mathbf{v}_{i_1} + \ldots + \mathbf{v}_{i_\iota}$, при этом полагаем $\mathbf{v}_{\varnothing} = 0$. Здесь $\mathbf{v}_k$ – лучи ядерной звезды $\mathbf{v}$ из (3.7), являющейся в то же время лучевой звездой

$$\mathbf{v} = \mathrm{st}(0) \tag{9.4}$$

в вершине x_0. Все вершины короны $\mathrm{Ver}\, \mathbf{Cr}$ разобъем

$$\mathrm{Ver}\, \mathbf{Cr} = \mathrm{Ver}\, \mathbf{Cr}^{\mathrm{int}} \sqcup \mathrm{Ver}\, \mathbf{Cr}^{\mathrm{ext}} \tag{9.5}$$

соответственно на внутренние (9.3) и внешние вершины $\mathrm{Ver}\, \mathbf{Cr}^{\mathrm{ext}}$.

По определению корона **Cr** состоит

$$\mathbf{Cr} = \bigcup_{\mathbf{i}\subset\mathcal{D}} \mathrm{St}(\mathbf{i}) \tag{9.6}$$

из многогранных звезд $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ с вершинами $\mathbf{v_i}$. Звезды вида $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ назовем *коронными* или сокращенно – **Cr**-*звездами*. Скажем, что произвольная многогранная звезда $\mathrm{St}(n)$ *вкладывается*

$$\mathrm{St}(n) \hookrightarrow \mathbf{Cr} \tag{9.7}$$

в корону **Cr**, если найдется такая вершина $\mathbf{v_i}$ из (9.3), что сдвиг тора $\mathbb{T}^d$, переводящий центр x_n звезды $\mathrm{St}(n)$ в $\mathbf{v_i}$, одновременно переводит $\mathrm{St}(n)$ в звезду $\mathrm{St}(\mathbf{i})$. Обозначим через

$$\mathrm{St}(n) \overset{\mathbf{i}}{\hookrightarrow} \mathbf{Cr} \tag{9.8}$$

фиксированное вложение, когда вершина $\mathbf{v_i}$ в (9.7) заранее фиксирована.

Напомним, что многогранные звезды $\mathrm{St}(n)$, $\mathrm{St}(n')$ эквивалентны $\mathrm{St}(n) \sim \mathrm{St}(n')$, если одна звезда получается из другой параллельным сдвигом тора. Эквивалентные звезды образуют один тип звезд.

Предложение 9.1. *Если определенное в* (3.24) *разбиение тора* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ *невырожденo* (5.4)*, то многогранные звезды* $\mathrm{St}(n)$ *такого разбиения обладают следующими свойствами.*

1) *Для любой многогранной звезды* $\mathrm{St}(n)$ *разбиения тора* $\mathcal{T}$ *существует единственная вершина* $\mathbf{v_i}$ *из* $\mathrm{Ver}\,\mathbf{Cr}^{\mathrm{int}}$*, допускающая фиксированное вложение* (9.8).

2) *Если звезды* $\mathrm{St}(n)$ *и* $\mathrm{St}(n')$ *вкладываются*

$$\mathrm{St}(n) \overset{\mathbf{i}}{\hookrightarrow} \mathbf{Cr}, \quad \mathrm{St}(n') \overset{\mathbf{i}'}{\hookrightarrow} \mathbf{Cr} \tag{9.9}$$

в корону **Cr** *и при этом* $\mathbf{i} \neq \mathbf{i}'$*, то такие звезды неэквивалентны*

$$\mathrm{St}(n) \nsim \mathrm{St}(n'). \tag{9.10}$$

3) *Многогранные звезды* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$*, где* $\mathbf{i}$ *пробегает собственные подмножества из* $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$*, представляют все* $\sharp\,\mathrm{St}_d = 2^{d+1} - 1$ *различные типы* St_d *многогранных звезд разбиения тора* $\mathcal{T}$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 5.1 и параметризации типов многогранных звезд (6.2) звездами вида $\mathrm{St}(\mathbf{i})$. ☐

9.2. Построение Cr-звезд. Аналогично (8.3) определим *отмеченное вложение*

$$\mathbf{T}_{k,\mathbf{j}} \hookrightarrow \mathrm{St}(\mathbf{i}) \tag{9.11}$$

параллелепипеда $\mathbf{T}_{k,\mathbf{j}}$ в звезду $\mathrm{St}(\mathbf{i})$. Вложение (9.11) означает, что сдвиг тора $\mathbb{T}^d$, переводящий выделенную вершину $\mathbf{v}_\mathbf{j} \in \mathbf{T}^{\mathrm{ver}}_{k,\mathbf{j}}$ в центр $\mathbf{v}_\mathbf{i}$ звезды $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ одновременно совмещает параллелепипед $\mathbf{T}_{k,\mathbf{j}}$ с одним из параллелепипедов, образующих звезду $\mathrm{St}(\mathbf{i})$.

Согласно (4.9) для звезды $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ справедлива формула

$$\mathrm{St}(\mathbf{i}) = \{\mathbf{T}^l_{k,\mathbf{j}}; \mathbf{v}^l_\mathbf{j} = \mathbf{v}_\mathbf{i}\}, \tag{9.12}$$

в которой

$$k = 0, 1, \ldots, d, \quad 0 \leqslant l \leqslant \mathbf{m}_k - 1, \quad \mathbf{j} \subseteq \mathcal{D}_k, \tag{9.13}$$

где $\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}$. Если ввести новое обозначение

$$|\mathbf{i}| = \mathbf{m}_{i_1} + \ldots + \mathbf{m}_{i_\iota}, \tag{9.14}$$

то в силу формулы (9.12) *правило максимума* (8.7) для вхождения параллелепипедов $\mathbf{T}_{k,\mathbf{j}}$ в звезду $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ принимает вид

$$|\mathbf{j}| \leqslant |\mathbf{i}| \leqslant |\mathbf{j}| + \mathbf{m}_k - 1. \tag{9.15}$$

Поскольку разбиение тора $\mathcal{T}$ невырождено (5.4), то имеет место равносильность

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| \Leftrightarrow \mathbf{i} = \mathbf{j}. \tag{9.16}$$

Поэтому по правилу максимума (9.15) вкладывающимися в звезду $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ параллелепипедами $\mathbf{T}_{k,\mathbf{j}}$ с максимально допустимым значением $|\mathbf{j}| = |\mathbf{i}|$ будут параллелепипеды

$$\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} = \mathbf{T}^0_{k,\mathbf{i}} \quad \text{для всех} \quad k \notin \mathbf{i}. \tag{9.17}$$

Все такие параллелепипеды входят в ядро **Kr** из (9.1). Остальными вкладывающимися параллелепипедами будут $\mathbf{T}^l_{k,\mathbf{j}}$ с индексом $l > 0$. Они уже не содержатся в ядре **Kr** и для них выполняются условия

$$|\mathbf{j}| < |\mathbf{i}| \leqslant |\mathbf{j}| + \mathbf{m}_k - 1. \tag{9.18}$$

Пусть **Cr**-звезды $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ с мультииндексами

$$|\mathbf{i}| \leqslant \frac{1}{2}(\mathbf{m} - 1) \tag{9.19}$$

построены. Для мультииндексов (9.19) воспользуемся отображением (6.3), задающим симметрию многогранных звезд и которое в данном случае принимает вид

$$s : \mathrm{St}(\mathbf{i}) \longrightarrow \mathrm{St}(\bar{\mathbf{i}}), \tag{9.20}$$

где через $\bar{\mathbf{i}}$ обозначили такое подмножество $\mathbf{i}_{\max} \subset \mathcal{D}$, для которого порядок $|\mathbf{i}_{\max}|$ принимает максимально возможное значение с условием, что $|\mathbf{i}_{\max}| \leqslant \mathbf{m} - 1 - |\mathbf{i}|$. Из определения следует, что если $\mathbf{i}$ удовлетворяет неравенству (9.19), то ему симметричный мультииндекс $\bar{\mathbf{i}}$ соответственно – неравенству

$$|\bar{\mathbf{i}}| \geqslant \frac{1}{2}(\mathbf{m} - 1). \tag{9.21}$$

Если звезда $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ состоит из многогранников

$$\mathrm{St}(\mathbf{i}) = \bigcup_{k,\,\mathbf{j},\,l} \mathbf{T}^{l}_{k,\mathbf{j}}, \tag{9.22}$$

то ее образом в (9.20) будет $\mathbf{Cr}$-звезда

$$\mathrm{St}(\bar{\mathbf{i}}) = \bigcup_{k,\,\mathbf{j},\,l} \mathbf{T}^{\bar{l}^{k}}_{k,\bar{\mathbf{j}}^{k}} \tag{9.23}$$

с теми же индексами k, $\mathbf{j}$, l, что и в разбиении (9.22), и при этом

$$\bar{\mathbf{j}}^{k} = \mathcal{D}_k \setminus \{\mathbf{j}\},\ \bar{l}^{k} = \mathbf{m}_k - 1 - l. \tag{9.24}$$

Предложение 9.2. 1) *Отображение* $s : \mathrm{St}(\mathbf{i}) \longrightarrow \mathrm{St}(\bar{\mathbf{i}})$ *из* (9.20) *задает биекцию на множестве* $\mathbf{Cr}$*-звезд.*

2) *Имеет место эквивалентность*

$$\mathrm{St}(\bar{\mathbf{i}}) \sim o(\mathrm{St}(\mathbf{i})), \tag{9.25}$$

где $o(\mathrm{St}(\mathbf{i}))$ *обозначает звезду, получающуюся из звезды* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ *с помощью центральной симметрии относительно* $\mathbf{v}_{\mathbf{i}}$ *– центра* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$.

3) *Если мультииндекс* $\mathbf{i}$ *удовлетворяет условию* $|\mathbf{i}| = |\bar{\mathbf{i}}|$, *то звезда* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ *будет центрально симметричной:*

$$\mathrm{St}(\mathbf{i}) \sim o(\mathrm{St}(\mathbf{i})). \tag{9.26}$$

Доказательство. Нам достаточно, согласно теореме 6.1 и предложению 6.1, убедиться, что отображение (9.20) связано с отображением $s : \mathrm{St}(n) \longrightarrow \mathrm{St}(\overline{n})$, где $\overline{n} = \mathbf{m} - 1 - n$, отношением эквивалентности

$$\mathrm{St}(\bar{\mathbf{i}}) \sim \mathrm{St}(\overline{n}), \tag{9.27}$$

в котором выбрано $n = |\mathbf{i}|$.

Заметим, что из определений (9.14) и (5.1) следует равенство

$$|\mathbf{i}| = \lambda_{\mathbf{i}} \tag{9.28}$$

между порядком $|\mathbf{i}|$ и критическим значением $\lambda_{\mathbf{i}}$, принадлежащим спектру $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}\}$ разбиения тора $\mathcal{T}$. Используя равенство (9.28) спектральный интервал $\Lambda_{\bar{\mathbf{i}}} = \{\lambda_{\bar{\mathbf{i}}}, \lambda_{\bar{\mathbf{i}}} + 1, \ldots, \lambda_{\bar{\mathbf{i}}'} - 1\}$ из (5.10), где $\lambda_{\bar{\mathbf{i}}'}$ – следующее за $\lambda_{\bar{\mathbf{i}}}$ критическое значение относительно упорядочения (5.7), можем переписать в виде

$$\Lambda_{\bar{\mathbf{i}}} = \{|\bar{\mathbf{i}}|, |\bar{\mathbf{i}}| + 1, \ldots, |\bar{\mathbf{i}}^{'}| - 1\}. \tag{9.29}$$

Далее вспоминая определение (9.20) подмножества $\bar{\mathbf{i}}$ и формулу $\overline{n} = \mathbf{m} - 1 - n$, из (9.29) выводим включение

$$n \in \Lambda_{\bar{\mathbf{i}}}. \tag{9.30}$$

Из (9.30) и теоремы 5.1 получаем эквивалентность (9.27). □

Из (9.17)–(9.21) и предложения 9.2 вытекает следующий способ построения звезд короны $\mathbf{Cr}$.

Алгоритм 1: построение Cr-звезд.

Шаг 1. *Строим* $\mathbf{Cr}$*-звезды* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ *короны* $\mathbf{Cr}$ *с мультииндексами* $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$, *удовлетворяющими неравенству* (9.19). *Указанные звезды* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ *состоят из отмеченных параллелепипедов* $\mathbf{T}^l_{k,\mathbf{j}}$ *двух видов:*

1) *Входящих в ядро* $\mathbf{Kr}$ *параллелепипедов* $\mathbf{T}_{k,\mathbf{i}} = \mathbf{T}^0_{k,\mathbf{i}}$ *из* (9.17) *для всех* $k \notin \mathbf{i}$.

2) *Параллелепипедов* $\mathbf{T}^l_{k,\mathbf{j}}$ *с индексом* $l > 0$, *не входящих в ядро* $\mathbf{Kr}$ *и удовлетворяющих условиям* (9.18).

Шаг 2. *Затем на основе предложения* 9.2 *из построенных* $\mathbf{Cr}$*-звезд* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ *с помощью центральной симметрии получаем звезды*

$$\mathrm{St}(\bar{\mathbf{i}}) \sim o(\mathrm{St}(\mathbf{i})) \tag{9.31}$$

с двойственным к (9.19) *условием* (9.21).

§10. ПОСТРОЕНИЕ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

10.1. Послойный рост вершин разбиения тора. Будем строить вершины разбиения тора $\mathcal{T}$ методом послойного роста, изложенного в п. 13.1. Кратко изложим в чем суть данного метода в несколько измененном и более удобном для нас варианте.

Среди вершин G^{ver} графа разбиения G выделим *эквидистантный шар*

$$Eq(x_n, i) = \{v \in G^{\mathrm{ver}};\ \varrho(v, x_n) \leqslant i\} \tag{10.1}$$

радиуса $i = 0, 1, 2, \ldots$ с центром в вершине графа x_n. Здесь $\varrho(v, x_n)$ обозначает *геодезическое расстояние* между вершиной v и центром x_n. Таким образом, множество $Eq(x_n, i)$ состоит из всех вершин графа G, которые можно соединить с центром x_n маршрутом, состоящим не более чем из i смежных ребер.

Поскольку в дальнейшем мы будем связывать шар $Eq(x_n, i)$ с короной $\mathbf{Cr}$, то в качестве центра x_n выберем точку $x_0 = 0$. Строить шар $Eq(x_0, i)$ будем *послойно*

$$Eq(x_0, 0) \subset Eq(x_0, 1) \subset \ldots \subset Eq(x_0, i) \subset \ldots \subset G^{\mathrm{ver}}, \tag{10.2}$$

используя формулу

$$Eq(x_0, i) = Eq(x_0, i-1) \sqcup eq(x_0, i), \tag{10.3}$$

где

$$eq(x_0, i) = \{v \in G^{\mathrm{ver}};\ \varrho(v, x_0) = i\} \tag{10.4}$$

– *эквидистантная сфера* радиуса i с центром в точке $x_0 = 0$.

При построении последовательности (10.2) будем опираться на *правило максимума* для ядерных лучей, установленное в теореме 7.1:

1) из каждой вершины графа G может выходить только ребро-луч вида $\mathbf{w}_k$, где $k = 0, 1, \ldots, d$, принадлежащий симметризованной ядерной звезде $\mathbf{w}$ из (7.2);

2) из вершины x_n выходит луч $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$0 \leqslant\ n + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k\ \leqslant \mathbf{m} - 1, \tag{10.5}$$

где $\mathrm{sign}(\mathbf{w}_k) = \pm 1$ обозначает знак луча $\mathbf{w}_k = \pm \mathbf{v}_k$, $\mathbf{m}_k$ – порядок (3.15) ядерного луча $\mathbf{v}_k$ и $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \ldots + \mathbf{m}_d$;

3) ребро $\mathbf{w}_k$ с условием (10.5) соединяет x_n и вершину $x_{n'}$ с номером

$$n' = n + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k. \tag{10.6}$$

Из теоремы 7.1 вытекает способ построения вершин графа G.

Алгоритм 2: построение вершин графа разбиения G.

Шаг 0. *Построение начинаем с вершины* $x_0 = 0$, *образующей эквидистантный шар* $Eq(x_0, 0) = \{x_0\}$ *радиуса* $i = 0$.

Шаг 1. *С помощью правила максимума находим все смежные с* $x_0 = 0$ *вершины, составляющие эквидистантную сферу* $eq(x_0, 1)$ *радиуса* $i = 1$, *и по формуле* (10.3) *получаем шар* $Eq(x_0, 1) = Eq(x_0, 0) \sqcup eq(x_0, 1)$.

Шаг 2. *Снова применяя правило максимума и перебирая все вершины из* $eq(x_0, 1)$, *находим для них смежные вершины* v, *не входящие в шар* $Eq(x_0, 1)$ *и образующие сферу* $eq(x_0, 2)$ *радиуса* $i = 2$. *Затем по формуле* (10.3) *получаем эквидистантный шар* $Eq(x_0, 2) = Eq(x_0, 1) \sqcup eq(x_0, 2)$.

Шаг 3.

....

Шаг $i_{\max}$**.** *Продолжая описанный процесс и добавляя слой за слоем, строим последовательность* (10.2) *эквидистантных шаров* $Eq(x_0, i)$ *радиусов* $i = 0, 1, 2, \ldots, i_{\max}$, *где радиус остановки алгоритма* $i_{\max}$ *определяется из условия, что шар* $Eq(x_0, i_{\max})$ *содержит вершины* x_n, *объединение номеров которых* n *покрывает множество всех возможных номеров* $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ *вершин графа* G. *Таким образом,*

$$Eq(x_0, i_{\max}) = G^{\mathrm{ver}} \tag{10.7}$$

и поэтому на шаге $i = i_{\max}$ *рост шаров* $Eq(x_0, i)$ *в последовательности* (10.2) *стабилизируется.*

10.2. Построение ядерных разбиений тора $\mathcal{T}$**.** Согласно предложению 9.1 многогранные $\mathbf{Cr}$-звезды $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ короны $\mathbf{Cr}$ с мультииндексами $\mathbf{i}$, пробегающими собственные подмножества из $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$, представляют все $\sharp\,\mathrm{St}_d = 2^{d+1} - 1$ различные типы St_d многогранных звезд разбиения тора $\mathcal{T}$. Номера n многогранных звезд $\mathrm{St}(n)$ разбиения тора $\mathcal{T}$ могут принимать значения только из множества $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$. По теореме 5.1 номера n, $m \in \mathcal{M}$ произвольных звезд $\mathrm{St}(n)$, $\mathrm{St}(m)$ принадлежат одному координационному интервалу $\Lambda_{\mathbf{i}}$ из разбиения

$$\mathcal{M}_{\mathrm{St}} = \Lambda_{\varnothing} \sqcup \ldots \sqcup \Lambda_{\mathbf{i}} \sqcup \Lambda_{\mathbf{i}'} \sqcup \ldots, \tag{10.8}$$

где $\Lambda_{\mathbf{i}} = \{\lambda_{\mathbf{i}}, \lambda_{\mathbf{i}} + 1, \ldots, \lambda_{\mathbf{i}'} - 1\}$, тогда и только тогда, когда звезды $\mathrm{St}(n)$, $\mathrm{St}(m)$ эквивалентны $\mathrm{St}(n) \sim \mathrm{St}(m)$ или, по-другому, принадлежат одному типу звезд из St_d, когда одна звезда получается из другой некоторым сдвигом тора $\mathbb{T}^d$. Поскольку $|\mathbf{i}| = \lambda_{\mathbf{i}}$ в силу (9.28), то интервалы $\Lambda_{\mathbf{i}}$ в разбиении (10.8) можно представить в более удобном для применений виде

$$\Lambda_{\mathbf{i}} = \{|\mathbf{i}|, |\mathbf{i}|+1, \dots, |\mathbf{i}^{'}|-1\}. \tag{10.9}$$

Зададим следующее отображение

$$\mathcal{M} \ni n \mapsto \mathbf{i}_n \subset \mathcal{D} \tag{10.10}$$

из множества номеров $\mathcal{M}$ вершин разбиения тора $\mathcal{T}$ в множество собственных подмножеств из $\mathcal{D}$. Согласно (10.8) множество $\mathcal{M}$ разбито $\mathcal{M}_{\mathrm{St}}$ на непересекающиеся интервалы $\Lambda_{\mathbf{i}}$ вида (10.9). Поэтому для любого номера $n \in \mathcal{M}$ существует единственный интервал $\Lambda_{\mathbf{i}_n}$ из разбиения $\mathcal{M}_{\mathrm{St}}$, в который номер n попадает. Данное свойство и определяет отображение (10.10). Одно из свойств отображения (10.10) состоит в том, что оно в явном виде определяет допустимое фиксированное вложение

$$\mathrm{St}(n) \overset{\mathbf{i}_n}{\hookrightarrow} \mathbf{Cr}, \tag{10.11}$$

о котором говорится в предложении 9.1.

Теперь мы готовы сконструировать алгоритм построения ядерных разбиений $\mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^d$.

Алгоритм 3: построение разбиения $\mathcal{T}$.

Шаг 1. *С помощью алгоритма* 1 *строим все* $\mathbf{Cr}$*-звезды* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$*, образующие корону* $\mathbf{Cr}$*.*

Шаг 2. *Затем по алгоритму* 2 *строим все вершины* x_n*, где* $n \in \mathcal{M}$*, графа разбиения* G*, которые также представляют все вершины разбиения тора* $\mathcal{T}$*.*

Шаг 3. *Используя отображение* (10.10)*, для каждой найденной вершины* x_n *определяем* $\mathbf{Cr}$*-звезду* $\mathrm{St}(\mathbf{i}_n)$*, имеющую тот же тип многогранных звезд из* St_d*, что и звезда* $\mathrm{St}(x_n)$ *из разбиения* $\mathcal{T}$ *с центром в вершине* x_n*. Наконец, производя сдвиг*

$$\mathrm{St}(x_n) \equiv \mathrm{St}(\mathbf{i}_n) + \Delta n\, \alpha \mod \mathbb{Z}^d, \tag{10.12}$$

получаем многогранную звезду $\mathrm{St}(x_n)$*. В* (10.12) *использованы обозначения:* $\Delta n = n - |\mathbf{i}_n|$ *– целое неотрицательное число;* α *– вектор сдвига* (2.13) *тора* $\mathbb{T}^d$*, относительно которого определяется рассматриваемое разбиение тора* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ *из* (3.23)*.*

Замечание 10.1. $\mathbf{Cr}$-звезда $\mathrm{St}(\mathbf{i}_n)$ определяет состав отмеченных параллелепипедов $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}$, образующих многогранную звезду $\mathrm{St}(x_n)$, но не дает информации о сдвиге j. Значение формулы (10.12) состоит в том, что она позволяет вычислить координаты параллелепипедов $\mathbf{T}^j_{k,\mathbf{i}}$ и, тем самым, для каждого вида параллелепипедов найти сдвиг j.

10.3. Построение бесконечных ядерных разбиений. Производное разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{v})$ тора $\mathbb{T}^d$ строится с помощью ядерной звезды $\mathbf{v}$, являющейся производной $\mathbf{v} = v^{[\xi]_n}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ с лучами v_k из пространства $\mathbb{R}^d$ в силу (3.5). Поэтому используя определение производной (1.12) и (3.7), можем считать, что производная звезда $\mathbf{v} = v^{[\xi]_n}$ вложена в $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{v} \hookrightarrow \mathbb{R}^d. \tag{10.13}$$

Перенесем вложение (10.13) на ядро $\mathbf{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$ из (3.18) и образующие его параллелепипеды $\mathbf{T}_k$:

$$\mathbf{Kr} = \mathbf{T}_0 \cup \mathbf{T}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{T}_d \hookrightarrow \mathbb{R}^d. \tag{10.14}$$

Избегая усложнения обозначений, условимся далее параллелепипеды $\mathbf{T}_k$ и само ядро $\mathbf{Kr}$ считать замкнутыми. С учетом данного соглашения знаки объединения $\sqcup$ из (3.18) заменены на $\cup$ в (10.14), при этом у разных параллелепипедов $\mathbf{T}_k$ в (10.14) отсутствуют общие внутренние точки.

Наконец, используя вложение (10.14) корону $\mathbf{Cr}$ ядра $\mathbf{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$ из (9.6) также вложем в $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{Cr} = \bigcup_{\mathbf{i} \subset \mathcal{D}} \mathrm{St}(\mathbf{i}) \quad \hookrightarrow \quad \mathbb{R}^d. \tag{10.15}$$

Здесь $\mathbf{Cr}$-звезды $\mathrm{St}(\mathbf{i})$ составлены из параллелепипедов $\mathbf{T}_k$, входящих в разбиене (10.14).

Строить бесконечное разбиение $\mathcal{T}_\infty \subset \mathbb{R}^d$ будем снова методом послойного роста его вершин $x_n \in \mathbb{R}^d$, используя для этого правило максимума (10.5), (10.6). Начальной вершиной выберем $x_0 = 0$. По правилу максимума к ней добавляем смежные вершины $x_n = x_0 + \mathbf{w}_k$, где $\mathbf{w}_k$ пробегает все лучи симметризованной ядерной звезды $\mathbf{w} = \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \ldots, \pm\mathbf{v}_d\}$, которая согласно (10.13) считается вложенной в $\mathbb{R}^d$. По формуле (10.6) такие вершины вершины x_n имеют номер $n = 0 + \mathrm{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k$. Получаем эквидистантный шар $Eq(x_0, 1)$ радиуса 1. Исходная вершина x_0 образует шар $Eq(x_0, 0)$ нулевого радиуса. Хотя теперь по определению эквидистантные шары $Eq(x_0, i)$ содержатся в пространстве $\mathbb{R}^d$, обозначение за ними оставляем прежнее (10.1), как и в случае построения разбиения тора $\mathcal{T}$. Указанным способом окружая шар $Eq(x_0, 1)$ смежными вершинами $x_{n'} = x_n + \mathbf{w}_k$, где

$\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$, $x_n \in Eq(x_0, 1)$ и следя за тем, чтобы новые вершины $x_{n'}$ не попадали в $Eq(x_0, 1)$, по формулам (10.3), (10.4) вычисляем все вешины шара $Eq(x_0, 2)$. Согласно (10.6) вершины $x_{n'}$ имеют номера $n' = n + \operatorname{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k$.

Повторяя процесс послойного роста, приходим к бесконечной последовательности расширяющихся эквидистантных шаров

$$Eq(x_0, 0) \subset Eq(x_0, 1) \subset \ldots \subset Eq(x_0, i) \subset \ldots \subset \mathbb{R}^d, \tag{10.16}$$

состоящих из вершин $x_n \in \mathcal{T}_\infty^{\mathrm{ver}}$ разбиения $\mathcal{T}_\infty$. Отметим, что предложенный метод позволяет вычислять координаты вершин x_n в $\mathbb{R}^d$ и их номера n.

В отличие от (10.2) процесс роста шаров (10.16) не стабилизируется. При достаточно большом радиусе i шар $Eq(x_0, i)$ будет содержать любую наперед заданную вершину x_n разбиения $\mathcal{T}_\infty$. Однако разбиение $\mathcal{T}_\infty$ периодическое по модулю решетки $\mathbb{Z}^d$. Поэтому нам достаточно знать шар минимального радиуса $i_{\max}$, для которого $Eq(x_0, i_{\max})$ содержит вершины x_n с номерами n, среди которых содержатся все возможные номера $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ вершин разбиения $\mathcal{T}_\infty$.

Среди вершин шара $Eq(x_0, i_{\max})$ могут существовать разные вершины $x_n \neq x'_n$ с одним и тем же номером n. Выделим из данного шара *фундаментальный шар*

$$Eq^*(x_0, i_{\max}) \subseteq Eq(x_0, i_{\max}), \tag{10.17}$$

содержащий для каждого номера $n \in \mathcal{M}$ только одну вершину x_n с номером n. Параллельными переносами фундаментального шара (10.17) получаются все вершины

$$\mathcal{T}_\infty^{\mathrm{ver}} = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^d} Eq^*(x_0, i_{\max})\,[l] \tag{10.18}$$

бесконечного ядерного разбиения $\mathcal{T}_\infty$. При этом шары $Eq^*(x_0, i_{\max})\,[l]$ и $Eq^*(x_0, i_{\max})\,[l']$ в (10.18) для разных векторов $l \neq l'$ не пересекаются. Отсюда получаем *параметризацию*

$$x_{n,l} = x_n^* + l \tag{10.19}$$

вершин $x_n = x_{n,l}$ из множества $\mathcal{T}_\infty^{\mathrm{ver}}$ с произвольными пераметрами $n \in \mathcal{M}$ и $l \in \mathbb{Z}^d$. Если вершина x_n задана, то вектор l в разложении (10.19) определяется равенством $l = x_n - x_n^*$.

Используя алгоритм 1 и вложение (10.15) короны **Cr** в пространство $\mathbb{R}^d$, приходим к следующему алгоритму построения бесконечного ядерного разбиения $\mathcal{T}_\infty$.

Алгоритм 4: построение разбиения $\mathcal{T}_\infty$.

Шаг 1. *С помощью алгоритма* 1 *строим все* **Cr***-звезды* $\mathrm{St}(\mathbf{i})$, *образующие корону* **Cr**, *вложенную* (10.15) *в пространство* $\mathbb{R}^d$.

Шаг 2. *Методом послойного роста* (10.16) *строим эквидистантный шар* $Eq(x_0, i_{\max})$ *и из него выделяем фундаментальный шар* $Eq^*(x_0, i_{\max})$.

Шаг 3. *Для каждой вершины* x_n^* *из* $Eq^*(x_0, i_{\max})$ *находим многогранную звезду*

$$\mathrm{St}(x_n^*) = \mathrm{St}(\mathbf{i}_n) + \Delta x_n^* \tag{10.20}$$

с центром в вершине x_n^*. *Здесь* **Cr***-звезды* $\mathrm{St}(\mathbf{i}_n)$ *берутся из короны* **Cr** *и подмножество* $\mathbf{i}_n \subset \mathcal{D}$ *определено с помощью отображения* (10.10); $\Delta x_n^* = x_n^* - \mathbf{v}_{\mathbf{i}_n}$, *где* $\mathbf{v}_{\mathbf{i}_n}$ *– внутренняя вершина короны* **Cr**, *опреледеленная в* (9.3).

Шаг 4. *Выбираем произвольную вершину* $x_n = x_{n,l} = x_n^* + l$ *из множества* $\mathcal{T}_\infty^{\mathrm{ver}}$ *с пераметрами* $n \in \mathcal{M}$ *и* $l \in \mathbb{Z}^d$ *из разложения* (10.19) *и строим для нее многогранную звезду*

$$\mathrm{St}(x_n) = \mathrm{St}(x_n^*) + l. \tag{10.21}$$

§11. ПРАВИЛО МАКСИМУМА ДЛЯ a-ГРАНЕЙ

11.1. Грани ядерных разбиений тора. Пусть $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_a\}$ – любое собственное подмножество из $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$, включая $\mathbf{i} = \varnothing$.

Рассмотрим *a-грани*

$$\mathbf{F}_\mathbf{i} = \{\lambda_1 \mathbf{v}_{i_1} + \ldots + \lambda_a \mathbf{v}_{i_a};\ 0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1\}, \tag{11.1}$$

имеющие размерности $a = 0, 1, \ldots, d$ и являющиеся гранями параллелепипедов $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1, \ldots$, $\mathbf{T}_d$ ядра (3.18). Если $\mathbf{i} = \varnothing$, то

$$\mathbf{F}_\varnothing = \{0\} \tag{11.2}$$

– нулевая вершина.

Далее для любого подмножества $\mathbf{j} = \{j_1, \ldots, j_b\}$ из $\mathbf{i}$ определим *отмеченную грань* $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ как такую грань $\mathbf{F}_\mathbf{i}$, у которой выделена одна из ее вершин

$$\mathbf{v}_\mathbf{j} = \mathbf{v}_{j_1} + \ldots + \mathbf{v}_{j_b} \ \in\ \mathbf{F}_\mathbf{i}^{\mathrm{ver}}, \tag{11.3}$$

при этом считаем $\mathbf{v}_{\varnothing} = 0$. Полагая

$$\mathbf{w}_{i_k} = \begin{cases} \mathbf{v}_{i_k}, & \text{если} \quad i_k \notin \mathbf{j}, \\ -\mathbf{v}_{i_k}, & \text{если} \quad i_k \in \mathbf{j}, \end{cases} \tag{11.4}$$

можем отмеченную грань $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ записать в виде (11.1):

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \{\lambda_1 \mathbf{w}_{i_1} + \ldots + \lambda_a \mathbf{w}_{i_a};\ 0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1\} + \mathbf{v}_{\mathbf{j}}. \tag{11.5}$$

Таким образом, по определению (11.5) имеем

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \mathbf{F}_{\mathbf{i}} \tag{11.6}$$

для любого подмножества $\mathbf{j} \subseteq \mathbf{i}$.

Отметим, что рассмотренные ранее вершины, лучи $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$ и отмеченные параллелепипеды $\mathbf{T}_{k,\mathbf{j}}$ представляют собою частные случаи понятий a-граней $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}$ и отмеченных граней $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ соответственно размерностей $a = 0, 1$ и d.

11.2. Орбиты a-граней. Для произвольной грани $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}$ рассмотрим ее *орбиту*

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^0 = \mathbf{F}_{\mathbf{i}},\ \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^1 = S\mathbf{F}_{\mathbf{i}}, \ldots,\ \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l = S^l \mathbf{F}_{\mathbf{i}}, \ldots, \tag{11.7}$$

где S – сдвиг (2.13) тора $\mathbb{T}^d$ и $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Скажем, что грань $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l$ *содержится*

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l \hookrightarrow \mathcal{T} \tag{11.8}$$

в разбиении $\mathcal{T}$, если в многогранную звезду $\mathrm{St}(l)$ с центром в вершине x_l входит некоторый параллелепипед $\mathbf{T}_k^i = S^i \mathbf{T}_k$, одной из граней которого является $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l$. Заметим, что из определения (11.8) следует, что x_l будет вершиной и грани $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l$, и указанного параллелепипеда $\mathbf{T}_k^i$.

Предложение 11.1. *Вхождение* (11.8) *грани* $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l$ *в ядерное разбиение* $\mathcal{T}$ *равносильно выполнению неравенств*

$$0 \leqslant l \leqslant \mathbf{m} - 1 - |\mathbf{i}|. \tag{11.9}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{m}_* = \mathbf{m}_{k^*}$ – наибольший порядок среди всех $\mathbf{m}_k$ с индексами k из множества $\mathcal{D} \setminus \mathbf{i} = \{k_1, \ldots, k_b\}$, где $b = d + 1 - a$; и пусть $\mathbf{T}_{k^*}$ – соответствующий ядерный параллелепипед (3.18) разбиения $\mathcal{T}$.

Согласно (3.24), (3.25) разбиение $\mathcal{T}$ содержит всю орбиту

$$\mathbf{T}_{k^*}^0 = \mathbf{T}_{k^*},\ \mathbf{T}_{k^*}^1, \ldots,\ \mathbf{T}_{k^*}^{\mathbf{m}_*-1} \tag{11.10}$$

параллелепипеда $\mathbf{T}_{k^*}$ и по (2.8)

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^0 = \mathbf{F}_{\mathbf{i}},\ \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}},\ \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\mathbf{m}_{k_2}}, \dots,\ \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\ldots+\mathbf{m}_{k_b}} \tag{11.11}$$

являются гранями параллелепипеда $\mathbf{T}_{k^*}$, который в данном случае можем считать замкнутым. Тогда из (11.10) и (11.11) вытекает, что все многогранники $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l$ из орбит

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^0 = \mathbf{F}_{\mathbf{i}}, & \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^1, & \dots, & \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_*-1} \\
\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}}, & \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+1}, & \dots, & \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\mathbf{m}_*-1} \\
\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\mathbf{m}_{k_2}}, & \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\mathbf{m}_{k_2}+1}, & \dots, & \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\mathbf{m}_{k_2}+\mathbf{m}_*-1} \\
\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\ldots+\mathbf{m}_{k_b}}, & \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\ldots+\mathbf{m}_{k_b}+1}, & \dots, & \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}_{k_1}+\ldots+\mathbf{m}_{k_b}+\mathbf{m}_*-1}
\end{array} \tag{11.12}$$

также являются гранями параллелепипедов $\mathbf{T}_{k^*}^0, \mathbf{T}_{k^*}^1, \dots, \mathbf{T}_{k^*}^{\mathbf{m}_*-1}$ из орбиты (11.10) параллелепипеда $\mathbf{T}_{k^*}$.

Из определения порядка $\mathbf{m}_* = \mathbf{m}_{k^*}$ следует, что степени l у многогранников $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l$ из орбит в (11.12) образуют все числа от 0 до

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{k_1} + \ldots + \mathbf{m}_{k_b} + \mathbf{m}_* - 1 &= \mathbf{m}_{k_1} + \ldots + \mathbf{m}_{k_b} + \mathbf{m}_{k^*} - 1 \\
&= \mathbf{m} - 1 - |\mathbf{i}|.
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Это доказывает вхождение в ядерное разбиение $\mathcal{T}$ всех граней $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l$ со степенями l, удовлетворяющими неравенствам (11.9).

Обратно, пусть грань $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l$ для $l = 0, 1, 2, \dots$ содержится $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^l \hookrightarrow \mathcal{T}$ в разбиении $\mathcal{T}$. Поскольку у грани $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}$ наибольший порядок ее вершин равен $|\mathbf{i}|$ – такой вершиной является $\mathbf{v}_{\mathbf{i}} \in \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathrm{ver}}$, то из определения вложения (11.8) должно выполнятся условие $l+|\mathbf{i}| \leqslant \mathbf{m}-1$, что доказывает неравенства (11.9). □

11.3. Правило максимума для a-граней. В вершине $x_n \in \mathcal{T}^{\mathrm{ver}}$ разбиения $\mathcal{T}$ *содержится*

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \overset{n}{\hookrightarrow} \mathcal{T} \tag{11.14}$$

отмеченная грань $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ по определению означает, что грань $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{n-|\mathbf{j}|}$, где $|\mathbf{j}|$ определено в (9.14), содержится (11.8) в разбиении $\mathcal{T}$. Из определения (11.14) следует, что если имеет место вложение $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \overset{n}{\hookrightarrow} \mathcal{T}$, то должно выполняться неравенство

$$|\mathbf{j}| \leqslant n. \tag{11.15}$$

Теорема 11.1. *Отмеченная грань* $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ *содержится* (11.14) *в вершине* x_n *ядерного разбиения* $\mathcal{T}$ *тогда и только тогда, когда выполняются* *неравенства*

$$|\mathbf{j}| \leqslant n \leqslant |\mathbf{j}| + \mathbf{m} - 1 - |\mathbf{i}|. \tag{11.16}$$

Доказательство. Пусть имеет место вложение $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \overset{n}{\hookrightarrow} \mathcal{T}$. Тогда, используя предложение 11.1 и определение вложения (11.14), должны выполняються неравенства

$$0 \leqslant n - |\mathbf{j}| \leqslant \mathbf{m} - 1 - |\mathbf{i}|, \tag{11.17}$$

из которых и (11.15) следуют неравенства (11.16).

Поскольку системы неравенств (11.16) и (11.17) эквивалентны, то приведенное рассуждение проходит и в обратную сторону. □

Утверждение доказанной теоремы 11.1 представляет собою *правило максимума* для определения вхождения в ядерное разбиение $\mathcal{T}$ отмеченных a-граней $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ произвольных размерностей $a = 1, 2, \ldots, d$. Ранее в (7.3) и (8.7) правило максимума было доказано для крайних размерностей $a = 1$ и d, т.е. для лучей и ядерных отмеченных параллелепипедов $\mathbf{T}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$. Покажем, как из общего правила максимума (теорема 11.1) получаются указанные случаи.

Размерность $a = 1$. В этом случае $\mathbf{i} = \{k\}$, где k может быть любым номером из множества $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$, а подмножество $\mathbf{j} \subseteq \mathbf{i}$ будет $\mathbf{j} = \varnothing$ или $\mathbf{j} = \{k\}$. Отмеченную 1-грань

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \begin{cases} \mathbf{v}_k, & \text{если} \quad \mathbf{j} = \varnothing, \\ -\mathbf{v}_k, & \text{если} \quad \mathbf{j} = \{k\} \end{cases} \tag{11.18}$$

отождествим с лучом $\mathbf{w}_k = \pm\mathbf{v}_k$ из симметризованной ядерной звезды

$$\mathbf{w} = \{\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \ldots, \pm\mathbf{v}_d\}.$$

В терминах (11.18) *вложение* (11.14) луча

$$\mathbf{w}_k \overset{n}{\hookrightarrow} \mathcal{T} \tag{11.19}$$

в ядерное разбиение $\mathcal{T}$ будет означать, что из вершины $x_n \in \mathcal{T}^{\mathrm{ver}}$ разбиения $\mathcal{T}$ выходит луч $\mathbf{w}_k$, являющийся ребром некоторого параллелепипеда $\mathbf{T}_k^i = S^i\mathbf{T}_k$ из разбиения $\mathcal{T}$.

Следствие 11.1. *Луч* $\mathbf{w}_k \in \mathbf{w}$ *вкладывается* (11.19) *в вершине* $x_n \in \mathcal{T}^{\mathrm{ver}}$ *ядерного разбиения* $\mathcal{T}$*, только и если только выполняются неравенства*

$$0 \leqslant\ n + \operatorname{sign}(\mathbf{w}_k)\, \mathbf{m}_k\ \leqslant \mathbf{m} - 1, \tag{11.20}$$

где

$$\operatorname{sign}(\mathbf{w}_k) = \begin{cases} +1, & \textit{если} \quad \mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k, \\ -1, & \textit{если} \quad \mathbf{w}_k = -\mathbf{v}_k, \end{cases} \tag{11.21}$$

– знак луча $\mathbf{w}_k$*.*

Доказательство. Имеем $\mathbf{i} = \{k\}$ для некоторого $k \in \mathcal{D}$, $|\mathbf{i}| = \mathbf{m}_k$ и $\mathbf{j} \subseteq \mathbf{i}$. Если $\mathbf{j} = \varnothing$, то $|\mathbf{j}| = 0$ и неравенства (11.16) принимают вид

$$0 \leqslant n \leqslant \mathbf{m} - 1 - \mathbf{m}_k,$$

откуда и (11.21) следуют неравенства (11.20).

Если же $\mathbf{j} = \mathbf{i}$, то $|\mathbf{j}| = \mathbf{m}_k$ и тогда (11.16) преобразуются в неравенства

$$\mathbf{m}_i \leqslant n \leqslant \mathbf{m}_i + \mathbf{m} - 1 - \mathbf{m}_i,$$

из которых и (11.21) снова вытекают неравенства (11.20). □

Замечание 11.1. На примере 1-грани $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$, передсталющей собою луч $\mathbf{w}_k$ из симметризованной звезды $\mathbf{w}$, объясним название “правило максимума” для системы неравенств (11.16) из теоремы 11.1. Пусть в ядерном разбиении $\mathcal{T}$ из вершины $x_n \in \mathcal{T}^{\mathrm{ver}}$ выходит (11.19) луч $\mathbf{w}_k$. Тогда конечная вершина $x_n + \mathbf{w}_k$, имеющая порядок $n + \operatorname{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k$, должна быть снова вершиной разбиения $\mathcal{T}$. Порядки всех вершин разбиения $\mathcal{T}$ составляют множество $\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, \mathbf{m} - 1\}$ и, значит, порядок $n + \operatorname{sign}(\mathbf{w}_k)\,\mathbf{m}_k$ будет удовлетворять неравенствам (11.20). Правило максимума (следствие 11.1) утверждает, что верно и обратное утверждение: если выполняются неравенства (11.20), то в разбиении $\mathcal{T}$ из вершины x_n выходит луч $\mathbf{w}_k$. Таким образом, правило максимума можно кратко сформулировать: разрешено все, что не запрещено.

Размерность $a = d$**.** В этом случае $\mathbf{i} = \mathcal{D}_k$, где $\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}$, и $\mathbf{j} = \{j_1, \ldots, j_\kappa\}$ – любое подмножество $\mathbf{i}$. Теперь отмеченная d-грань $\mathbf{F}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ – это ядерный параллелепипед $\mathbf{T}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ с отмеченной вершиной

$$\mathbf{v}_{\mathbf{j}} = \mathbf{v}_{j_1} + \ldots + \mathbf{v}_{j_\kappa}. \tag{11.22}$$

Следствие 11.2. *Отмеченный параллелепипед* $\mathbf{T}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ *содержится* (11.14) *в вершине* $x_n \in \mathcal{T}^{\mathrm{ver}}$ *ядерного разбиения* $\mathcal{T}$*, тогда и только тогда, когда имеют место неравенства*

$$|\mathbf{j}| \leqslant n \leqslant |\mathbf{j}| + \mathbf{m}_k - 1. \tag{11.23}$$

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 11.1, если заметить, что в рассматриваемом случае $\mathbf{m} - |\mathbf{i}| = \mathbf{m}_k$. □

§12. Комбинаторика многогранных разбиений

12.1. Комбинаторика ядерных разбиений тора. Рассмотрим в ядерном разбиении $\mathcal{T}$ все его грани размерности $a = 0, 1, \ldots, d$. Они порождаются S-сдвигами $\mathbf{F}^l_{\mathbf{i}}$ a-граней вида $\mathbf{F}_{\mathbf{i}}$, где $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_a\}$ – любое подмножество из $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$.

Предложение 12.1. *Пусть* $\mathcal{T}$ *– ядерное разбиение тора* $\mathbb{T}^d$ *размерности* d, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \ldots + \mathbf{m}_d$ *– порядок* (3.17) *разбиения* $\mathcal{T}$*; и пусть* f_a *- количество всех* a*-граней, содержащихся в* $\mathcal{T}$*. Тогда для* f_a *имеет место следующая явная формула*

$$f_a = \mathbf{m}\binom{d}{a}, \tag{12.1}$$

где $\binom{d}{a} = \dfrac{d!}{a!(d-a)!}$ *обозначает биномиальный коэффициент.*

Доказательство. Нужно для всех подмножеств $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_a\}$ из $\mathcal{D}$ подсчитать общее количество a-граней $\mathbf{F}^l_{\mathbf{i}}$, содержащихся (11.8) в разбиении $\mathcal{T}$. С этой целью используя предложение 11.1, можем f_a записать в виде суммы

$$f_a = \sum_{\mathbf{i}\subset\mathcal{D}} (\mathbf{m} - |\mathbf{i}|) = \mathbf{m} \sum_{\mathbf{i}\subset\mathcal{D}} 1 - \sum_{\mathbf{i}\subset\mathcal{D}} |\mathbf{i}|. \tag{12.2}$$

Здесь

$$\sum_{\mathbf{i}\subset\mathcal{D}} 1 = \binom{d+1}{a}. \tag{12.3}$$

По определению (9.14) имеем $|\mathbf{i}| = \mathbf{m}_{i_1} + \ldots + \mathbf{m}_{i_a}$. Поэтому вторая сумма справа в (12.2) равна

$$\sum_{\mathbf{i}\subset\mathcal{D}} |\mathbf{i}| = \sum_{\mathbf{i}\subset\mathcal{D}} \sum_{1\leqslant b\leqslant a} \mathbf{m}_{i_b} = \sum_{0\leqslant c\leqslant d} \mathbf{m}_c \sum_{\mathbf{i}'\subset\mathcal{D}\setminus\{c\}} 1, \tag{12.4}$$

где $\mathbf{i}'$ – подмножества из $a-1$ элемента и, значит,

$$\sum_{\mathbf{i}'\subset\mathcal{D}\setminus\{c\}} 1 = \binom{d}{a-1}.$$

Отсюда и (12.4) получаем

$$\sum_{\mathbf{i}\subset\mathcal{D}} |\mathbf{i}| = \binom{d}{a-1} \sum_{0\leqslant c\leqslant d} \mathbf{m}_c = \mathbf{m}\binom{d}{a-1}. \tag{12.5}$$

Теперь подставляя значения (12.3) и (12.5) в (12.2), находим

$$f_a = \mathbf{m}\left(\binom{d+1}{a} - \binom{d}{a-1}\right), \tag{12.6}$$

откуда и следует требуемая формула (12.1). □

Замечание 12.1. Доказанная формула (12.1) показывет следующее:

1) количества a-граней f_a в ядерном разбиении $\mathcal{T}$ представляют собою, с точностью до постоянного множителя $\mathbf{m}$, последовательные биноминальные коэффициенты $\binom{d}{a}$ для $a = 0, 1, \ldots, d$;

2) значения f_a зависят только от размерности d и порядка $\mathbf{m}$ разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}^d$, но не зависят от порядков $\mathbf{m}_k$ отдельных лучей $\mathbf{v}_k$ ядерной звезды $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$, определенной в (3.7). Поэтому мы можем определить *векторный инвариант*

$$f(\mathcal{T}^d) = \frac{1}{\mathbf{m}}(f_0, f_1, \ldots, f_d) = \left(\binom{d}{0}, \binom{d}{1}, \ldots, \binom{d}{d}\right) \tag{12.7}$$

множества $\mathcal{KR}^d$ всех ядерных разбиений $\mathcal{T}^d$ тора $\mathbb{T}^d$ размерности d:

$$f(\mathcal{T}_1^d) = f(\mathcal{T}_2^d) \tag{12.8}$$

для любых двух разбиений $f(\mathcal{T}_1^d)$ и $f(\mathcal{T}_2^d)$ из $\mathcal{KR}^d$.

Следствие 12.1. *Для чисел a-граней f_a в ядерном разбиении $\mathcal{T}$ выполняется следующие формулы.*

1) *Формула двойственности*

$$f_a = f_{d-a} \tag{12.9}$$

для всех $0 \leqslant a \leqslant d$.

2) *Формула Эйлера*

$$f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^d f_d = \chi(\mathbb{T}^d) \tag{12.10}$$

для разбиений тора $\mathbb{T}^d$. Здесь $\chi(\mathbb{T}^d)$ обозначает эйлерову характеристику тора $\mathbb{T}^d$, равную

$$\chi(\mathbb{T}^d) = 0 \tag{12.11}$$

для любой размерности $d = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. 1) Формула (12.9) вытекает из (12.1) и формулы двойственности для биноминальных коэффициентов

$$\binom{d}{a} = \binom{d}{d-a}.$$

2) По поводу доказательства равенства (12.11) см., например, [18]. С учетом (12.11) и (12.1), равенство (12.10) предствляет собою известную формулу для знакопеременной суммы биноминальных коэффициентов. □

12.2. Биномиальные разбиения. Многогранное разбиение B тора $\mathbb{T}^d$ назовем *биномиальным*, если выполняется условие

$$f_a(B) = \mathbf{m}(B) \cdot \binom{d}{a} \tag{12.12}$$

для всех размерностей $0 \leqslant a \leqslant d$, где $f_a(B)$ – число всех a-граней, содержащихся в разбиении B и $\mathbf{m}(B) \neq 0$ – некоторый множитель, не зависящий от a.

Предложение 12.2. *Следующие разбиения биномиальны.*

1) *Все разбиения $B = \mathcal{C}$ окружности $\mathbb{T}^1$ на конечное число отрезков.*

2) *Любое ядерное разбиение $B = \mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^d$ произвольной размерности d.*

3) *Прямое произведение*

$$B = B_1 \times B_2 \tag{12.13}$$

биномиальных разбиений B_1 и B_2.

Доказательство. 1) Окружность $\mathbb{T}^1$ с отмеченной точкой можно рассматривать как разбиение $\mathcal{C}$ с одной вершиной и одним отрезком. Такое разбиение удовлетворяет условию (12.12). При добавлении новой точки количество вершин и отрезков увеличивается на единицу и, значит, сохраняется свойство (12.12). Легко видеть, что указанным способом можно получить любое разбиение $\mathcal{C}$ окружности $\mathbb{T}^1$ на конечное число отрезков.

2) Относительно ядерных разбиений $B = \mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^d$ утверждение доказано в предложении 12.1.

3) Из определения прямого произведения $B = B_1 \times B_2$ следует формула

$$f_a(B) = \sum_{a_1+a_2=a} f_{a_1}(B_1)f_{a_2}(B_2). \tag{12.14}$$

Пусть разбиения B, B_1 и B_2 имеют соответственно размерности d, d_1 и d_2. Тогда используя определение (12.12) и (12.14) получаем

$$f_a(B) = \mathbf{m}(B_1)\mathbf{m}(B_2) \sum_{a_1+a_2=a} \binom{d_1}{a_1}\binom{d_2}{a_2}. \tag{12.15}$$

Поскольку в (12.15) суммирование ведется по всем $0 \leqslant a_1 \leqslant d_1$ и $0 \leqslant a_2 \leqslant d_2$, можем записать

$$\sum_{a_1+a_2=a} \binom{d_1}{a_1}\binom{d_2}{a_2} = \binom{d}{a}, \tag{12.16}$$

где $d = d_1 + d_2$. Из (12.15) и (12.16) для значений $f_a(B)$ вытекают равенства (12.12) с множителем $\mathbf{m}(B)$, равным

$$\mathbf{m}(B_1 \times B_2) = \mathbf{m}(B_1)\mathbf{m}(B_2). \qquad \square$$

Рассмотрим два семейства разбиений:

$$\mathcal{KR} \subset \mathcal{B}. \tag{12.17}$$

Здесь $\mathcal{KR}$ обозначает множество всех ядерных разбиений $\mathcal{T}$, определенных в (3.23), (3.24), и $\mathcal{B}$ – множество всех биномиальных разбиений B, удовлетворяющих условиям (12.12). Относительно включения (12.17) заметим, что оно вытекает из предложения 12.2. Из этого же предложения получается

Следствие 12.2. *Множество биномиальных разбиений $\mathcal{B}$ образует коммутативную полугруппу относительно операции прямого произведения* (12.13). *Нейтральным элементом e в полугруппе $\mathcal{B}$ будет одноточечное разбиение $\mathbb{T}^0$.*

Элемент B из $\mathcal{B}$ называется *примитивным*, если из любого разложения $B = B_1 \times B_2$ следует, что какой-то из сомножителей B_i, $i = 1, 2$, равен нейтральному элементу e. Очевидно, что все разбиения $\mathcal{C}$ окружности $\mathbb{T}^1$ на конечное число отрезков являются примитивными. Далее условимся разбиения $\mathcal{C}$ называть *циклическими.*

Примитивными являются так же ядерные разбиения $\mathcal{T}$. Это можно увидеть на примере двумерных разбиений $\mathcal{T}^2$. Действительно, если дано нетривиальное разложение $\mathcal{T}^2 = B_1 \times B_2$, то разбиения B_i могут быть только одномерными. Следовательно, получаем

$$\mathcal{T}^2 = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \tag{12.18}$$

где $\mathcal{C}_i$ – циклические разбиения окружности $\mathbb{T}^1$. Но тогда из разложения (12.18) будет следовать, что все входящие в разбиение $\mathcal{T}$ многоугольники будут прямоугольниками. Это противоречит определению (3.26) ядра **Kr** разбиения $\mathcal{T}^2$ – ядро не может состоять из одних прямоугольников.

Заметим, что по приведенным выше аргументам подмножество $\mathcal{KR} \subset \mathcal{B}$ ядерных разбиений $\mathcal{T}$ незамкнуто относительно операции прямого произведения (12.13): для одномерных разбиений $\mathcal{T}_1^1$, $\mathcal{T}_2^1 \in \mathcal{KR}$ их произведение $\mathcal{T}_1^1 \times \mathcal{T}_2^1$ не будет ядерным разбиением. Однако, на каждом подмножестве $\mathcal{KR}^d \subset \mathcal{KR}$, состоящим из d-мерных разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}^d$, можно определить богатую некоммутативную *полугруппу операторов* $\mathbf{\Sigma}^d$, порождаемую производными $\sigma \in \Sigma^d$, определенными в (3.23):

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{T}^\sigma \tag{12.19}$$

Выделим из $\mathcal{B}$ полугруппу

$$\mathcal{CL} = \langle \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_s;\ s = 0, 1, 2, \ldots \rangle \subset \mathcal{B}, \tag{12.20}$$

порождаемую всеми циклическими разбиениями $\mathcal{C}_*$. Затем расширим (12.20) до полугруппы

$$\langle \mathcal{CL}, \mathcal{KR} \rangle \subseteq \mathcal{B}, \tag{12.21}$$

порождаемой разбиениями из $\mathcal{CL}$ и $\mathcal{KR}$.

Следствие 12.3. *Полугруппа $\langle \mathcal{CL}, \mathcal{KR} \rangle$ состоит из биномиальных разбиений, определенных в* (12.12).

Доказательство. Непосредственно вытекает из определений (12.20), (12.21) и предложения 12.2. ☐

Итак, из (12.17), (12.20) и (12.21) получаем следующую последовательность расширений множеств биномиальных разбиений:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{CL} \arrow[dr] & & \\
& \langle \mathcal{CL}, \mathcal{KR} \rangle & \subseteq \ \mathcal{B}. \\
\mathcal{KR} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd} \tag{12.22}$$

Здесь

$$\mathcal{CL} \cap \mathcal{KR} = \mathcal{KR}^1, \tag{12.23}$$

где $\mathcal{KR}^1$ – множество одномерных ядерных разбиений $\mathcal{T}^1$ окружности $\mathbb{T}^1$. Биномиальные разбиения из полугруппы $\langle \mathcal{CL}, \mathcal{KR} \rangle$ *конструктивны*: они получаются прямыми произведениями 1) произвольных циклических разбиений $\mathcal{C}$ и 2) ядерных разбиений $\mathcal{T}$. В свою очередь, последние получаются из базисных ядерных разбиений методом дифференцирования (12.19). Остается открытой проблема: проверить равенство

$$\langle \mathcal{CL}, \mathcal{KR} \rangle = \mathcal{B}. \tag{12.24}$$

12.3. Автодуальные разбиения. Множество биномиальных разбиений $\mathcal{B}$ допускает расширение, если вместо торов $\mathbb{T}^\delta$ выбрать некоторое другое компактное многообразие $\mathbb{M}$. Например, многообразие

$$\mathbb{M} = \mathbb{T}^\delta \times \mathbb{S}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{S}^{d_s}, \tag{12.25}$$

получающееся прямым произведением тора $\mathbb{T}^\delta$ и *сфер* $\mathbb{S}^{d_i}$ различных размерностей d_i.

Многогранное разбиение A многообразия $\mathbb{M}$ размерности d назовем *автодуальным*, если для него выполняется формула двойственности

$$f_a(A) = f_{d-a}(A) \tag{12.26}$$

для всех $0 \leqslant a \leqslant d$, где $f_a(A)$ – число a-граней, содержащихся в разбиении A. Обозначим множество автодуальных разбиений через $\mathcal{AD}$.

Предложение 12.3. *Если разбиения* A_1 *и* A_2 *являются автодуальными* (12.26)*, то их прямое произведение*

$$A = A_1 \times A_2 \tag{12.27}$$

также будет автодуальным разбиением.

Доказательство. Снова воспользовавшись формулой (12.14), записываем

$$f_a(A) = \sum_{a_1+a_2=a} f_{a_1}(A_1) f_{a_2}(A_2). \tag{12.28}$$

Пусть разбиения A, A_1 и A_2 имеют соответственно размерности d, d_1 и d_2. Тогда из определения автодуальности (12.26) видим, что сумма в (12.28) равна

$$\sum_{a_1+a_2=a} f_{d_1-a_1}(A_1) f_{d_2-a_2}(A_2). \tag{12.29}$$

Введем новые индексы суммирования $a_1' = d_1 - a_1$ и $a_2' = d_2 - a_2$. Тогда $a_1' + a_2' = d - a$ и, следовательно, согласно формуле (12.28) сумма (12.29) равна

$$\sum_{a_1'+a_2'=d-a} f_{a_1'}(A_1) f_{a_2'}(A_2) = f_{d-a}(A). \tag{12.30}$$

Отсюда и (12.28) выводим равенство $f_a(A) = f_{d-a}(A)$ или формулу двойственности (12.26) для прямого произведения $A = A_1 \times A_2$. $\square$

Предложение 12.3 позволяет из произвольных двух автодуальных разбиений A_1 и A_2 получать новое разбиение $A = A_1 \times A_2$, также являющееся автодуальным. Таким образом, чтобы применять данное предложение нужны базисные автодуальные разбиения. Согласно следствию 12.1, биномиальные разбиения $B \in \mathcal{B}$ будут автодуальными. Поэтому в качестве базисных разбиений можно выбирать биномиальные разбиения $A_i = B_i$.

Существует еще один большой класс автодуальных разбиений – это *симплициальные разбиения* S^d размерностей $d = 1, 2, 3, \ldots$ Они получаются проекцией

$$\pi : \triangle^{d+1} \longrightarrow S^d \tag{12.31}$$

вписанного в шар $\mathbb{B}^{d+1}$ правильного $(d+1)$-мерного симплекса $\triangle^{d+1}$. Проекция π происходит из центра шара $\mathbb{B}^{d+1}$ на его границу – сферу $\mathbb{S}^d$. Таким образом, по определению (12.31) разбиение S^d – это разбиение сферы $\mathbb{S}^d$ на сферические симплексы, гомеоморфные d-мерному симплексу $\triangle^d$. Например, S^1 – разбиение окружности на три равные дуги, а S^2 – разбиение обычной сферы на четыре равные сферические треугольника.

Предложение 12.4. 1) *Симплициальные разбиения S^d являются автодуальными* (12.26).

2) *Количество a-граней в симплициальном разбиении S^d находится по формуле*

$$f_a(S^d) = \binom{d+1}{a+2} \tag{12.32}$$

для $a = 0, 1, \ldots, d$.

Доказательство. Сначала докажем формулу (12.32). Для этого, заметим, что $(d+1)$-мерный симплекс $\triangle^{d+1}$ содержит $d+2$ вершины, из которых любые $a+1$ вершины являются вершинами некоторой a-грани симплекса $\triangle^{d+1}$. При этом имеется взаимно однозначное соответствие между a-гранями и наборами из $a+1$ вершины. Отсюда вытекает формула (12.32).

Теперь для $f_a(S^d)$ проверим выполнение формулы двойственности (12.26). Используя (12.32) получаем

$$f_{d-a}(S^d) = \binom{d+2}{(d-a)+1} = \binom{d+2}{(d+2)-(a+1)} = \binom{d+2}{a+1}$$

и, таким образом, приходим к равенству

$$f_{d-a}(S^d) = f_a(S^d). \qquad \square$$

Как следствие из предложения 12.4, получаем соотношение

$$f_0(S^d) - f_1(S^d) + \ldots + (-1)^d f_d(S^d) = 1 + (-1)^d, \tag{12.33}$$

также вытекающее из формулы Пуанкаре [19] для $(d+1)$-мерных многогранников. Кроме того заметим, что с помощью соотношения (12.33) можем вычислить эйлерову характеристику

$$\chi(\mathbb{S}^d) = 1 + (-1)^d \tag{12.34}$$

d-мерной сферы $\mathbb{S}^d$.

Множество симплициальных разбиений S^d обозначим через $\mathcal{S}$. Используя явные формулы (12.32) и (12.1) не трудно убедиться, что симплициальные разбиения S^d размерностей $d \geqslant 2$ не являются биномиальными (12.12). Поэтому для построения автодуальных разбиений $\mathcal{AD}$ мы, помимо биномиальных разбиений $\mathcal{B}$, дополнительно имеем еще и симплициальные разбиения $\mathcal{S}$. Данные разбиения можно выбирать, как базовые, из которых через посредство прямого разбиения далее получать новые автодуальные разбиения $A \in \mathcal{AD}$. На этом пути приходим к следующей последовательности расширений множеств автодуальных разбиений:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[dr] & & \\
& \langle \mathcal{S}, \mathcal{B} \rangle \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathcal{AD}. \\
\mathcal{B} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd} \tag{12.35}$$

Какие еще разбиения можно добавить в диаграмму (12.35)? Оказывается, на множестве двумерных автодуальных разбиений $\mathcal{AD}^2$ существует полугруппа Δ операторов

$$A \xrightarrow{\partial} A^{\partial}, \tag{12.36}$$

аналогичных операторам дифференцирования (12.19). Действие операторов (12.36) описывается следующим образом. В разбиении $A \in \mathcal{AD}^2$ выбирается произвольная двумерная грань – многоугольник P, а в нем некоторая его вершина v. Из нее проводим диагональ, делящую $P = P_1 \cup P_2$ на два многоугольника P_1, P_2. При этом должно выполняться условие: вторая вершина диагонали v' не должна быть вершиной многоугольника P, т.е. долна лежать на его стороне. Итак, в результате действия оператора ∂ на разбиение A получается разбиение A^{∂}, у которого становится на одну вершину и одну двумерную грань больше, чем это было у начального разбиения A. Значит, если разбиение $A \in \mathcal{AD}^2$ автодуальное (12.26), то у его образа A^{∂} свойство (12.26) сохраняется.

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Локальная структура ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **1** (2021), 32–73.
2. В. Г. Журавлев, *Симметрии ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **1** (2021), 74–121.
3. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
4. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
5. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 283–303.
6. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби.* Владимир, ВлГУ, 2019.
7. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Послойный рост квазипериодического разбиения Рози.* — Кристаллография **52**, No. 2 (2007), 204–210.
8. В. Г. Журавлев, *Параметризация двумерного квазипериодического разбиения Рози.* — Алгебра и анализ **22**, No. 4 (2010), 21–56.
9. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
10. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
11. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., МИАН, М., **16** (2012), 82–102.
12. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, М., 1953.
13. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, **2**, Киев, 1952.
14. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.

15. V. G. Zhuravlev, *On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling.* — Anal. Probab. Methods Number Theory, E. Manstavicius et al. (Eds), TEV, Vilnius (2007), 240–254.
16. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Функция сложности и форсинг в двумерном квазипериодическом разбиении Рози.* — Кристаллография **52**, No. 4 (2007), 610–616.
17. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
18. О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов, *Элементарная топология*, Изд-во МЦНМО, 2010.
19. H. Poincare, *Sur la generalisation d'un theoreme d'Euler relatif aux polyedres.* — Compt. Rend. Acad. Sci., **117** (1893), 144–145.

Zhuravlev V. G. Combinatoric of the karyon tilings.

In this article, we study the combinatorial properties of the karyon tilings $\mathcal{T}$ of the torus $\mathbb{T}^d$ of an arbitrary dimension d. Our main results are the following statements: 1) the karyon corona $\mathbf{Cr}$ contains all types of polyhedral stars of the $\mathcal{T}$ tilings; 2) the number of all faces of dimension a of the tiling $\mathcal{T}$ is equal to $md!/((d-a)!a!)$, where m is the order of tilling.

Владимирский государственный
университет, 600024, Владимир,
пр. Строителей, 11, Россия
E-mail: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 06 января 2021 г.