Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 511, 2022 г.

В. Г. Журавлев

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

Введение

Универсальные ядерные разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ d-мерного пространства $\mathbb{R}^d$ были построены в [1]. Их параметры, весовой вектор $\mathbf{m}$ и звезда v, принадлежат дуальному пространству модулей $\triangle^d \times \triangle^d$ – прямому произведению двух d-мерных симплексов. Звезда v определяет геометрию параллелепипедов $T_0, T_1, \ldots, T_d$, из которых состоит разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, а весовой вектор $\mathbf{m}$ задает локальные правила и частотное распределение данных параллелепипедов в разбиении. Зная параметры $\mathbf{m}, v$, по локальному алгоритму $\mathcal{A}$ (3.40) можно построить все разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. Разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ содержат в себе ядро

$$\mathrm{Kr} = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_d \tag{0.1}$$

– центрально-симметричный многогранник, представляющий собою параллелоэдр. Отсюда происходит название *ядерные* для разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$.

В [2] для периодических разбиених $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ было определено инвариантное дифференцирование (измельчение) разбиений

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma), \tag{0.2}$$

где $\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma$ – производные параметры, и доказано существование производных разбиений (0.2). В работе вводится новая параметризация

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) \tag{0.3}$$

через внешние (скрытые) параметры $\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi$, возникающие из внешнего накрывающего пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, хотя сами ядерные разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ содержатся в пространстве $\mathbb{R}^d = \mathrm{pr}_\Pi \mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n}}$ – проекции вдоль луча Π на гиперплоскость с нормалью $\mathbf{n}$, определяющую периодичность разбиения (0.3).

В теореме 5.2 для произвольных ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ доказывается формула

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}^\sigma_\Pi, \Pi), \tag{0.4}$$

Ключевые слова: полиэдральные ядерные разбиения, ступенчатые поверхности (stepped surfaces), звездные графы.

где $\mathbf{u}^{\sigma}_{\Pi}$ – производная унимодулярного бозиса $\mathbf{u}$, центрированного лучом П. Приведенная формула позволяет выявить геометрический смысл

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}^{\sigma}_{\Pi} \tag{0.5}$$

операции дифференцирования (0.2): *дифференцирование ядерного разбиения* $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \to \mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{m}, v)$ *эквивалентно некоторому явно определяемому элементарному преобразованию* (0.5) *центрированного унимодулярного базиса* $\mathbf{u}$*.*

Преобразования унимодулярных базисов типа (0.5) были использованы при построении теории многомерных цепных дробей в [2], [3].

Внешняя параметризация (0.3) также позволяет сравнивать ядерные разбиения с разными параметрами

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi),\ \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}', \Pi'). \tag{0.6}$$

На этом пути удается построить одновершинные разбиения в п. 7.1 и конечно изоморфные разбиения (предложение 7.1), а также выявить частотную инвариантность $\nu_{k,\Pi} = \nu_k$ $(k = 0, 1, \dots, d)$ распределения параллелепипедов $T_0, T_1, \dots, T_d$ в разбиениях $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ при изменении параметра П (предложение 7.2).

Название *ядро*, по-видимому, появилось впервые в [4] при изучении одномерных разбиений Фибоначчи. Однако роль ядер была осознана после открытия и исследования фрактального разбиения Рози [5, 6].

К построению ядерных разбиений произвольной размерности d ведут два пути: 1) метод дифференцирования индуцированных торических разбиений [2] и 2) метод локальных правил [1, 7]. Другой подход, не связанный с ядерными разбиениями и использующий ступенчатые поверхности (stepped surfaces), предложен в [8–12].

Кроме множества интересных арифметических, геометрических и комбинаторных свойств [13–16], которыми обладают ядерные разбиения, они уже нашли применения в кристаллографии [17–19], в изучении множеств ограниченного остатка [6, 20, 21] и многомерных цепных дробей [2, 3, 22–24].

§1. Универсальные ядерные разбиения. Основные определения

1.1. Универсальные ядерные разбиения. Общая конструкция. Будут рассматриваться разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon)$ пространства $\mathbb{R}^{d+1}$ с параметрами:

$$\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_d) \tag{1.1}$$

– *нормаль* с условием

$$|\mathbf{n}|_1 = |n_0| + |n_1| + \ldots + |n_d| = 1; \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\} \tag{1.3}$$

– *базис* пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, состоящий из векторов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$;

$$\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi \tag{1.4}$$

– *центрирующий луч*, порождаемый некоторым нормированным

$$|\pi|_1 = 1 \tag{1.5}$$

направляющим вектором $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ из $\mathbb{R}^{d+1}$, где $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных вещественных чисел;

$$\Upsilon \subset \mathbb{R} \tag{1.6}$$

– непустое подмножество.

1.2. Условия согласования параметров разбиения.
Условие 1. *Весовой вектор*

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = (m_0, m_1, \dots, m_d) \tag{1.7}$$

с координатами

$$m_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_k, \tag{1.8}$$

где $k = 0, 1, \dots, d$, содержится

$$\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^{d+1} \tag{1.9}$$

в *положительном конусе* $\mathbb{R}_+^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ векторов с положительными координатами. Число

$$m = |\mathbf{m}|_1 = m_0 + m_1 + \ldots + m_d \tag{1.10}$$

назовем *порядком* весового вектора (1.7). Из условия (1.9) вытекает неравенство

$$m > 0. \tag{1.11}$$

Условие 2. Направляющий луч (1.4) принадлежит

$$\Pi \subset \angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u} \tag{1.12}$$

внутренности $\angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u}$ *конуса*

$$\angle\mathbf{u} = \{\lambda_0\mathbf{u}_0 + \lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_d\mathbf{u}_d;\ \lambda_k \geqslant 0\}, \tag{1.13}$$

порождаемого векторами базиса (1.3).

1.3. Ограничение на параметры разбиения. Мы сосредоточимся на разбиениях вида

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon), \tag{1.14}$$

где в качестве параметра $\mathbf{u}$ будет выбираться *унимодулярный базис*, т.е. базис из целочисленных векторов

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d \ \in \ \mathbb{Z}^{d+1} \tag{1.15}$$

с определителем

$$\det U = \pm 1 \tag{1.16}$$

матрицы

$$U = (\mathbf{u}_0\, \mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_d), \tag{1.17}$$

столбцы которой – это координаты векторов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$. Условия (1.15), (1.16) эквивалентны *унимодулярности*

$$U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}) \tag{1.18}$$

матрицы (1.18).

Параметр Υ будет *полуинтервалом*

$$\Upsilon = [0, m) \tag{1.19}$$

с правым концом (1.10). Из (1.11) вытекает, что полуинтервал (1.19) имеет длину $|\Upsilon| = m > 0$.

Замечание 1.1. Далее будет показано, что ограничения (1.15), (1.16) на базис $\mathbf{u}$ не являются существенными. Выбор же полуинтервала (1.19) в качестве параметра Υ более обоснован.

§2. Пространственный граф

2.1. Ориентированный граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}$. В пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ выделим $(d+1)$-мерный *слой*

$$\mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n}} = \{\widehat{x} \in \mathbb{R}^{d+1};\, \mathbf{n} \cdot \widehat{x} \in \Upsilon\}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{n} \cdot \widehat{x}$ – скалярное произведение нормали $\mathbf{n}$ из (1.1) и $\widehat{x}$; Υ – полуинтервал (1.19). В свою очередь, в слое $\mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n}}$ выделим *решетку*

$$\mathbb{Z}^{d+1}_{\mathbf{n}} = \mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n}} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{a \in \mathbb{Z}^{d+1};\, \mathbf{n} \cdot a \in \Upsilon\} \tag{2.2}$$

точек $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ с целыми координатами a_k. Число

$$\mu\widehat{x} = \mathbf{n} \cdot \widehat{x} \tag{2.3}$$

будем называть *весом* произвольной вещественной точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Используя решетку (2.2), можем определить *ориентированный граф* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ с *вершинами*

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}} = \mathbb{Z}^{d+1}_{\mathbf{n}}. \tag{2.4}$$

Его вершины $a, a' \in \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\,\mathrm{ver}}$ соединим *дугой* $\mathbf{u}^{\pm}_k$, если выполнено условие

$$a' - a = \mathbf{u}^{\pm}_k, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{u}^{\pm}_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$, принадлежит *симметризованной* $\mathbf{u}$-*звезде*

$$\mathbf{u}^{\pm} = \{\mathbf{u}^{\pm}_0, \mathbf{u}^{\pm}_1, \ldots, \mathbf{u}^{\pm}_d\}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{u}^{\pm}_k = \pm\mathbf{u}$, получающейся симметризацией базиса (1.3). Определенный в (2.4) и (2.5) граф $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ назовем $\mathbf{u}$-*графом.*

Замечание 2.1. Если в качестве $\mathbf{u}$ выбрать не унимодулярный базис (1.15), (1.16), а произвольный базис $\mathbf{u}$, то целочистенную решетку $\mathbb{Z}^{d+1}$ в определении (2.4) нужно заменить решеткой

$$\mathbb{Z}^{d+1}_{\mathbf{u}} = \mathbb{Z}[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d] \ \subset\ \mathbb{R}^{d+1} \tag{2.7}$$

векторов с целыми координатами в базисе $\mathbf{u}$. В случае унимодулярного базиса выполняется равенство решеток

$$\mathbb{Z}^{d+1}_{\mathbf{u}} = \mathbb{Z}^{d+1}. \tag{2.8}$$

2.2. Проекция. Зададим *проекцию*

$$\mathrm{pr}_{\Pi} : \mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n}} \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0} \tag{2.9}$$

вдоль луча Π из (1.4), отображающую слой (2.10) на его нижнюю граничную *гиперплоскость*

$$\mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0} = \{\widehat{x} \in \mathbb{R}^{d+1};\ \mathbf{n}\cdot\widehat{x} = 0\}. \tag{2.10}$$

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (1.9) *и* (1.12), *то проекция* (2.9) *задает изоморфизм*

$$\mathrm{pr}_{\Pi} : \overrightarrow{\mathcal{G}} \ \overrightarrow{\sim}\ \overrightarrow{G} \tag{2.11}$$

$\mathbf{u}$-*графа* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, *определенного в* (2.4), (2.5), *и его проекции*

$$\overrightarrow{G} = \mathrm{pr}_{\Pi}\overrightarrow{\mathcal{G}} \tag{2.12}$$

– *графа из* d-*мерного пространства* $\mathbb{R}^d$, *отождествляемого*

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0} \tag{2.13}$$

с гиперплоскостью (2.10).

Доказательство. См. [1], теорема 2.1. □

Аналогично [3] можно доказать, что проекция

$$v = \mathrm{pr}_\Pi \mathbf{u} \tag{2.14}$$

базиса $\mathbf{u}$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0} = \mathbb{R}^d$ образует *звезду*

$$v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}, \tag{2.15}$$

где $v_k = \mathrm{pr}_\Pi \mathbf{u}_k$ для $k = 0, 1, \ldots, d$.

Определение 2.1. *Пусть любые $d-1$ вектора из множества* (2.15) *линейно независимы и пусть любые его два вектора v_{k_1}, v_{k_2} не принадлежат гиперплоскости, порождаемой остальными векторами из v, и лежат по отношению к ней в разных полупространствах. Такое множество векторов v назовем звездой.*

§3. Звездный граф

3.1. Звездный граф. Дополнительно к (2.15) введем *симметризованную звезду*

$$w = \{w_0, w_1, \ldots, w_d\}, \tag{3.1}$$

состоящую из лучей $w_k = \pm v_k$, где v_k принадлежат звезде v, и имеющих соответственно *веса*

$$\mu w_k = \mathrm{sign}(w_k)\, m_k, \tag{3.2}$$

где *знаки* $\mathrm{sign}(w_k)$ звезд w_k определены условиями $\mathrm{sign}(w_k) = +1$ или -1 для $w_k = +v_k$ или $w_k = -v_k$, и

$$m_k = \mu \mathbf{u}_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_k \tag{3.3}$$

– *веса* (1.8) базисных векторов $\mathbf{u}_k$. По определению числа m_k также считаются *весами*

$$m_k = \mu v_k, \tag{3.4}$$

где $k = 0, 1, \ldots, d$, *лучей* $v_k \in v$ звезды (2.15).

Определенный в (2.12) ориентированный граф $\overrightarrow{G}$ имеет *вершины*

$$\overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}} = \{x = x(a);\ a \in \mathbb{Z}^{d+1},\ \mu x \in \Upsilon\}, \tag{3.5}$$

при этом

$$x = x(a) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \ldots + a_d v_d \tag{3.6}$$

– точка из пространства $\mathbb{R}^d$ с *индексом* $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ из решетки Z^{d+1}; *вес* μx точки $x = x(a)$ определен равенством

$$\mu x = a_0\, \mu v_0 + a_1\, \mu v_1 + \ldots + a_d\, \mu v_d = \mu a, \tag{3.7}$$

где справа

$$\mu a = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_d m_d \tag{3.8}$$

– *вес* индекса a, определяемый через веса (3.4) лучей v_k звезды v; Υ – полуинтервал (1.19).

Вершины x, $x' \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$ соединены *дугой* w_k – ориентированным ребром с номером $k = 0, 1, \dots, d$, если

$$x' - x = w_k \quad \in \quad w. \tag{3.9}$$

Здесь справа указана симметризованная звезда (3.1). Если же вершины $x = x(a)$, $x' = x'(a')$ записать в терминах индексов (3.6), то (3.9) будет эквивалентно условию

$$a' - a = \varepsilon_k^{\pm} \quad \in \quad \varepsilon^{\pm}, \tag{3.10}$$

при этом

$$\varepsilon^{\pm} = \{\varepsilon_0^{\pm}, \varepsilon_1^{\pm}, \dots, \varepsilon_d^{\pm}\}, \tag{3.11}$$

где $\varepsilon_k^{\pm} = \pm\varepsilon_k$, – *симметризованная единичная звезда*, получающаяся симметризацией *единичного базиса*

$$\varepsilon_0 = (0, \dots, 0, 1),\ \varepsilon_1 = (1, \dots, 0, 0),\ \varepsilon_d = (0, \dots, 1, 0) \tag{3.12}$$

пространства $\mathbb{R}^{d+1}$. Если единичным векторам ε_k придать *веса*

$$\mu\varepsilon_k = m_k \tag{3.13}$$

для $k = 0, 1, \dots, d$, то вес (3.8) индекса a запишется

$$\mu a = a_0\, \mu\varepsilon_0 + a_1\, \mu\varepsilon_1 + \ldots + a_d\, \mu\varepsilon_d \tag{3.14}$$

аналогично весу (3.7) вершины $x = x(a)$.

Ориентированный граф $\overrightarrow{G}$ назовем *звездным графом*. В (2.12) было приведено его глобальное определение. Локально же граф $\overrightarrow{G}$ задается условиями (3.5) и (3.9).

3.2. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d-мерные *параллелепипеды*

$$T_k = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_d} v_{k_d};\ 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{3.15}$$

где $k_1, \ldots, k_d$ – дополнительные к k индексы в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Множество лучей $v_{k_1}, \ldots, v_{k_d}$ назовем *скелетом* параллелепипеда T_k из (3.15). Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ является звездой (2.15), то объединение

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_d \tag{3.16}$$

параллелепипедов (3.15) образует *параллелоэдр* [20, 21] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} T[l] \tag{3.17}$$

с помощью параллельных переносов $T[l] = T + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $T[l]$ из (3.17) не имеют общих внутренних точек. Здесь

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_d] \tag{3.18}$$

– *полная решетка* в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \ldots, l_d$, т.е. векторы $l_1, \ldots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, при этом векторы l_k определяются

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, d \tag{3.19}$$

через лучи $v_0, v_1, \ldots, v_d$ звезды v.

3.3. Вершины базисных параллелепипедов. Напомним, что параллелепипед T_k в (3.15) порождается векторами $v_i \in v$ с номерами i из множества

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}, \tag{3.20}$$

где $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, d\}$. Множество векторов

$$\mathrm{Sk}_k = \{v_i;\ i \in \mathcal{D}_k\} \tag{3.21}$$

назовем *остовом* (skeleton) параллелепипеда T_k. Остов Sk_k порождает параллелепипед T_k и содержит наименьшее число векторов с указанным свойством.

Согласно определению (3.15) параллелепипед T_k имеет следующие *вершины*

$$T_k^{\mathrm{ver}} = \{v_{\mathbf{i}};\ \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k\}. \tag{3.22}$$

Здесь $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_\iota\}$ – *мультииндекс*, являющийся произвольным подмножеством индексов из множества (3.20), и

$$v_{\mathbf{i}} = v_{i_1} + \ldots + v_{i_\iota}. \tag{3.23}$$

При этом в (3.22) допускается пустое подмножество $\mathbf{i} = \varnothing$, когда $\iota = 0$. В данном случае полагаем

$$v_{\varnothing} = 0. \tag{3.24}$$

Далее нам потребуется понятие *отмеченного параллелепипеда* $T_{k,\mathbf{i}}$ – это параллелепипед T_k с некоторой выделенной фиксированной его вершиной $v_{\mathbf{i}} \in T_k^{\mathrm{ver}}$.

3.4. Графы базисных параллелепипедов. *Граф* $\overrightarrow{G}(T_k)$ параллелепипеда T_k – это ориентированный граф, имеющий вершины

$$\overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}(T_k) = T_k^{\mathrm{ver}}. \tag{3.25}$$

По аналогии с (3.9) вершины $v_{\mathbf{i}}$, $v_{\mathbf{i}'} \in T_k^{\mathrm{ver}}$ считаются соединенными дугой w_k, если

$$v_{\mathbf{i}'} - v_{\mathbf{i}} = w_k \quad \in \quad w. \tag{3.26}$$

Отмеченному параллелепипеду $T_{k,\mathbf{i}}$ отвечает граф $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$, в котором выделена та же самая вершина $v_{\mathbf{i}} \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}(T_k)$, что и у параллелепипеда $T_{k,\mathbf{i}}$.

3.5. Вложения графов. Заметим, согласно определениям (3.15) и (3.5), (3.9) имеют место включения

$$T_{k,\mathbf{i}} \subset \mathbb{R}^d,\ \overrightarrow{G} \subset \mathbb{R}^d. \tag{3.27}$$

Учитывая (3.27), будем говорить, что граф $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ отмеченного параллелепипеда $T_{k,\mathbf{i}}$ *вкладывается*

$$x : \overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}}) \hookrightarrow \overrightarrow{G} \tag{3.28}$$

в граф $\overrightarrow{G}$ в его вершине $x \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$, если выполняется включение графов

$$\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}}) + (x - v_{\mathbf{i}}) \subset \overrightarrow{G}. \tag{3.29}$$

Последнее означает, что $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ является подграфом графа $\overrightarrow{G}$ при условии, если выделенную вершину $v_{\mathbf{i}}$ графа $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ параллельным сдвигом совместить с вершиной x графа $\overrightarrow{G}$.

3.6. Универсальные ядерные разбиения пространства $\mathbb{R}^d$. Общая конструкция. Обозначим через

$$X_{k,\mathbf{i}} = \{x \in \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}};\ \overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}}) \overset{x}{\hookrightarrow} \overrightarrow{G}\} \tag{3.30}$$

подмножество тех вершин x графа $\overrightarrow{G}$, в которых имеет место вложение (3.28). Пусть

$$xT_{k,\mathbf{i}} = T_{k,\mathbf{i}} + (x - v_{\mathbf{i}}) \quad \subset \quad \mathbb{R}^d \tag{3.31}$$

обозначает параллелепипед, получающийся сдвигом $T_{k,\mathbf{i}}$ на вектор $x - v_{\mathbf{i}}$, где x принадлежит множеству вершин $X_{k,\mathbf{i}} \subset \overrightarrow{G}^{\,\mathrm{ver}}$ и $v_{\mathbf{i}} \in T_k^{\mathrm{ver}}$ – вершина базисного параллелепипеда T_k с мультииндексом $\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$.

Теорема 3.1. *При выполнении условий* (1.9) *и* (1.12) *имеет место разбиение*

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) \;=\; \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant d} \; \bigcup_{\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k} \; \bigcup_{x \in X_{k,\mathbf{i}}} xT_{k,\mathbf{i}} \tag{3.32}$$

пространства $\mathbb{R}^d$ *любой размерности* d. *Здесь* $\mathcal{D}_k$ *– множество индексов* (3.20) *и* $X_{k,\mathbf{i}}$ *– подмножество (3.30) вершин* x *графа* $\overrightarrow{G}$, *определенного в* (3.5), (3.9). *В объединении* (3.32) *любые два параллелепипеда* $xT_{k,\mathbf{i}}$ *и* $x'T_{k',\mathbf{i}'}$ *совпадают*

$$xT_{k,\mathbf{i}} = x'T_{k',\mathbf{i}'} \tag{3.33}$$

или не имеют общих внутренних точек.

Доказательство. В [1] было доказано существование разбиения $\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{e}, \widehat{\Pi})$ для случая единичного базиса $\mathbf{e} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d\}$ (3.12) пространства $\mathbb{R}^{d+1}$. Нормаль $\widehat{\mathbf{n}}$ и направляющий луч $\widehat{\Pi}$ могут выбираться любыми, также удовлетворяющими условиям (1.9) и (1.12).

По леммам 8.1 и 8.2 из [1] луч $\widehat{\Pi}$ можно выбрать так, чтобы звезда v (2.15) разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ и аналогичная звезда $\widehat{v}$ разбиения $\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{e}, \widehat{\Pi})$ были аффинно подобны

$$v = A\widehat{v}, \tag{3.34}$$

где A – аффинное невырожденное преобразование пространства разбиений $\mathbb{R}^d$. В силу (1.7) и (1.10) вектор

$$\frac{1}{m}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_1}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \tag{3.35}$$

имеет единичную $|\cdot|_1$-норму (1.2). Учитывая равенство

$$\widehat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e} = \widehat{\mathbf{n}} \tag{3.36}$$

убеждаемся, что нормаль

$$\widehat{\mathbf{n}} = \frac{1}{m}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \tag{3.37}$$

является допустимой (1.9), (1.12) для разбиений $\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{e}, \widehat{\Pi})$ с единичным базисом $\mathbf{e}$. Если выбрать нормаль (3.37), то звездные графы $\overrightarrow{G}$ и $\widehat{\overrightarrow{G}}$ разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ и $\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{e}, \widehat{\Pi})$ будут аффинно подобны

$$\overrightarrow{G} = A\widehat{\overrightarrow{G}}, \tag{3.38}$$

так как графы $\overrightarrow{G}$, $\widehat{\overrightarrow{G}}$ имеют одну и ту же звезду $v = A\widehat{v}$ по (3.34) и локальные правила по определению (3.9).

По лемме 5.1 [1] из совпадения графов (3.38) следует также и совпадение соответствующих разбиений

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = A\,\mathcal{T}(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{e}, \widehat{\Pi}), \tag{3.39}$$

что доказывает существование разбиения (3.32). □

Замечание 3.1. Звездный граф $\overrightarrow{G}$ строится локально по двум параметрам $\mathbf{m}, v$. По теореме 3.1 данный граф определяет все ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$. Тем самым, мы получаем локальный алгоритм

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbf{m},v} \tag{3.40}$$

построения разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ по двум его внутренним параметрам $\mathbf{m}, v$.

Замечание 3.2. Далее будем пространство $\mathbb{R}^d$ называть *внутренним*, а пространство $\mathbb{R}^{d+1}$ – *внешним*. При этом внутреннее пространство $\mathbb{R}^d$ отождествляется (2.13) с гиперплоскостью (2.10):

$$\mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0} \subset \mathbb{R}^{d+1}. \tag{3.41}$$

§4. Дифференцирование звезд и центрированных унимодулярных базисов

4.1. Производные звезды. Обозначим Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежит

$$v_\sigma \notin H_{\sigma'} \tag{4.1}$$

гиперплоскости $H_{\sigma'}$, проходящей через оставшиеся $d-1$ векторы звезды v с индексами из дополнения $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$ к сочетению σ. Тогда при этом условии только одно из множеств

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{4.2}$$

будет звездой (2.15). Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \tag{4.3}$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H^{\pm}_{\sigma'}$, и $v(\sigma')$ – дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v.

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (4.3) гарантирована ограничением (4.1) на сумму векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$.

Определение 4.1. *Обозначим через*

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma'), \tag{4.4}$$

то множество векторов из (4.2)*, которое является звездой. Если существуют звезды* v^σ *для всех сочетаний* $\sigma \in \Sigma$*, то будем говорить, что звезда* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *нерывождена.*

Таким образом, согласно определению 4.1 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma\}, \tag{4.5}$$

где

$$v_{k_1}^\sigma = v_{k_1},\ v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$$

или

$$v_{k_1}^\sigma = v_\sigma,\ v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$$

в зависимости от выполнения условия из (4.3), и

$$v_{k'}^\sigma = v_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' \in \sigma'.$$

Звезду v^σ из (4.5) назовем *σ-производной* нерывожденой звезды v. Если нужно выделит индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ-производной использовать еще и другое развернутое обозначение

$$v^\sigma = v^{\{k_1, k_2\}}. \tag{4.6}$$

По определению (4.5) имеет место формула коммутирования

$$v^{\{k_1, k_2\}} = v^{\{k_2, k_1\}}.$$

Поэтому для нерывожденной звезды v существуют

$$C_{d+1}^2 = \frac{(d+1)d}{2} \tag{4.7}$$

ее производных звезд v^σ.

4.2. Центрированный унимодулярный базис. Введем новое обозначение

$$\mathbf{u}_\Pi = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}_\Pi \tag{4.8}$$

для унимодулярного базиса $\mathbf{u}$ (1.15), (1.16), внутри конуса которого содержится $\Pi \subset \angle^{\rm int}\mathbf{u}$ направляющий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ (1.4). Базис $\mathbf{u}_\Pi$ назовем *центрированным унимодулярным базисом* или кратко – *CU-базисом*, а луч Π – *центририрующим лучом*.

4.3. Дифференцирования центрированных базисов. Используя проекцию pr_Π из (2.9), с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u}_\Pi & \xrightarrow{\mathrm{pr}_\Pi} & v \\ \downarrow\sigma & & \downarrow\sigma \\ \mathbf{u}_\Pi^\sigma & \xrightarrow{\mathrm{pr}_\Pi} & v^\sigma \end{array} \tag{4.9}$$

можно перенести операции $\sigma \in \Sigma$ дифференцирования звезд $v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma$ (4.5) на дифференцирования CU-базисов $\mathbf{u}_\Pi$.

Выясним *геометрический смысл* дифференцирований CU-базисов $\mathbf{u}_\Pi$. Пусть σ' – дополнительное сочетание к $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через $\widehat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$, содержащую векторы $\mathbf{u}_{k'_j} \in \mathbf{u}_\Pi$ с индексами k'_j из σ' и луч Π. Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор $\widehat{v}_{k_1}$ и сумма векторов $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\widehat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\mathbf{u}_\Pi \xrightarrow{\sigma} \mathbf{u}_\Pi^\sigma \tag{4.10}$$

сводится к замене вектора $\mathbf{u}_{k_2}$ на сумму $\mathbf{u}_{k_1} + \mathbf{u}_{k_2}$.

Центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ (1.4), направленный вдоль нормированного вектора $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ из $\mathbb{R}^{d+1}$, назовем *иррациональным*, если выполняется условие:

$$\textit{координаты}\ \ \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d\ \textit{линейно независимы над}\ \mathbb{Z}, \tag{4.11}$$

где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых рациональных чисел. В определении (4.11) кольцо $\mathbb{Z}$ можно заменить полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В [3] доказаны следующие утверждения.

Предложение 4.1. 1) *Если центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ иррациональный* (4.11), *то любой центрированный унимодулярный базис $\mathbf{u}_\Pi$* (4.8), *центрированный лучом Π, является бесконечно дифференцируемым* (4.10). 2) *При том же условии на луч Π, звезда*

$$v = v_\Pi = \mathrm{pr}_\Pi\, \mathbf{u}_\Pi, \tag{4.12}$$

где pr_Π *– проекция* (2.9)*, также будет бесконечно дифференцируемой* (4.5)*.*

Предложение 4.2. *Если* Π *– иррациональный луч, то для любого* $\sigma \in \Sigma$ *производное множество векторов* $\mathbf{u}^\sigma_\Pi$*, определенное в* (4.9) *и* (4.10)*, снова образует* CU*-базис, т.е. унимодулярный базис, центрированный лучом* Π*.*

§5. Дифференцирование ядерных разбиений

5.1. Первое определение производного разбиения. Для ядерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$ из (3.32) и любого сочетения $\sigma \in \Sigma$ полагаем

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u}^\sigma_\Pi,\Pi), \tag{5.1}$$

где $\mathbf{u}^\sigma_\Pi$ – CU-базис (4.9), (4.10).

Теорема 5.1. *Если центрирующий луч* $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ *является иррациональным* (4.11)*, то определенное в* (5.1) *множество* $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$ *снова образует ядерное разбиение вида* (3.32)*.*

Доказательство. Следует из теоремы 3.1, если для новых параметров

$$\mathbf{n},\ \mathbf{u}^\sigma_\Pi,\ \Pi \tag{5.2}$$

сохраняются условия согласования параметров ядерного разбиения (1.9) и (1.12).

По предложению 4.2 множество векторов $\mathbf{u}^\sigma_\Pi$ из (5.2) образует унимодулярный базис, центрированный лучом Π, т.е. луч Π принадлежит

$$\Pi \ \subset\ \angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u}^\sigma_\Pi \tag{5.3}$$

внутренности конуса $\angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u}^\sigma_\Pi$, порождаемого векторами производного базиса $\mathbf{u}^\sigma_\Pi$.

Весовой вектор (1.7):

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^\sigma_\Pi = (m^\sigma_0, m^\sigma_1, \ldots, m^\sigma_d) \tag{5.4}$$

содержится

$$\mathbf{m}^\sigma \ \in\ \mathbb{R}^{d+1}_+ \tag{5.5}$$

в положительном конусе $\mathbb{R}^{d+1}_+$, если, согласно определению производной (4.10), свойством $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{d+1}_+$ обладал (1.9) начальный базис $\mathbf{u}$. $\square$

Множество $\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$ из (5.1) называется *производным ядерным разбиением.*

5.2. Внешние и внутренние параметры разбиений. Параметры $\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi$ ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$ являются *внешними.* Они возникают из пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, хотя сами разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$ содержатся в пространстве $\mathbb{R}^{d}$.

Введем *внутренние параметры* $\mathbf{m}, v$, полагая

$$\mathcal{T}(\mathbf{m},v)=\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi), \tag{5.6}$$

где

$$\mathbf{m}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{u},\ \ v=\mathrm{pr}_{\Pi}\mathbf{u} \tag{5.7}$$

– весовой вектор (1.7) и звезда (2.14) соответственно. Согласно *локальному алгоритму* $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{\mathbf{m},v}$ из (3.40) для построения ядерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$ достаточно знать его внутренние параметры $\mathbf{m}, v$, т.е. параметры $\mathbf{m}, v$ полностью задают разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m},v)$.

Обратный переход от внутренних параметров к внешними удобно проводить посредством *канонического подъема*:

$$\mathcal{T}(\mathbf{m},v)\ \uparrow\ \mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{e},\Pi). \tag{5.8}$$

Здесь $\mathbf{n}=\frac{1}{m}\mathbf{m}$ – нормаль, $\mathbf{e}=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d\}$ – единичный базис (3.12) пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, $\Pi=\mathbb{R}_{+}\cdot\pi_{\mathbf{e}}$ – центрирующий луч с направляющим вектором $\pi_{\mathbf{e}}=(\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_d)$, определяемым типом $\mathbf{0}_v=(\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_d)$ (5.23) звезды v.

Замечание 5.1. Не углубляясь, отметим, что если ядерные разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m},v)$ рассматривать с точностью до аффинной эквивалентности, то от параметризации $\mathbf{m}, v$ нужно переходить к *пространству модулей* $\triangle^d\times\triangle^d$ – прямому произведению двух d-мерных симплексов. После этого становится очевидной симметрия между параметрами $\mathbf{m}$ и v.

5.3. Второе определение производного разбиения. Используя определение производного разбиения $\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$, обозначим

$$\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{m},v)=\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi) \tag{5.9}$$

или, согласно (5.1), –

$$\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{m},v)=\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u}^{\sigma}_{\Pi},\Pi). \tag{5.10}$$

Теорема 5.2. *В предположениях теоремы* 5.1 *и обозначении* (5.6) *имеем*

$$\mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{m},v)=\mathcal{T}(\mathbf{m}^{\sigma},v^{\sigma}). \tag{5.11}$$

Здесь $\mathbf{m}^\sigma$ *– весовой вектор* (5.4) *и* v^σ *– производная звезда* (4.5).

Доказательство. Утверждение следует из равенства (5.1), определения (5.4) весового вектора $\mathbf{m}^\sigma$ и формулы связи

$$v^\sigma = \mathrm{pr}_\Pi\ \mathbf{u}^\sigma_\Pi \tag{5.12}$$

между производным базисом $\mathbf{u}^\sigma_\Pi$, определенном в (4.9), (4.10), и соответствующей ему звездой. □

5.4. Производные внутренних параметров. Зная только весовой вектор $\mathbf{m}$ и сочетение $\sigma \in \Sigma$, нельзя определить производный вектор $\mathbf{m}^\sigma$. Ранее, в (5.4), было приведено внешнее определение вектора $\mathbf{m}^\sigma$ через нормаль $\mathbf{n}$ и центрированный базис $\mathbf{u}_\Pi$ из *внешнего пространства* $\mathbb{R}^{d+1}$. Однако можно определить производные

$$(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\sigma} (\mathbf{m}, v)^\sigma = (\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma) \tag{5.13}$$

сразу для пар $(\mathbf{m}, v)$, где производный весовой вектор $\mathbf{m}^\sigma$ определяется

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}^\sigma_v = (m^\sigma_0, m^\sigma_1, \ldots, m^\sigma_d) \tag{5.14}$$

через производную звезду v^σ (4.5):

$$m^\sigma_{k_1} = m_{k_1},\ m^\sigma_{k_2} = m_\sigma$$

или

$$m^\sigma_{k_1} = m_\sigma,\ m^\sigma_{k_2} = m_{k_2}$$

в зависимости от выполнения условия из (4.3), и

$$m^\sigma_{k'} = m_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' \in \sigma'.$$

5.5. Барицентрические координаты. Согласно условию (1.12), центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ принадлежит внутренности конуса $\angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u}$. Поэтому его можно записать в виде

$$\pi = \pi'_0\mathbf{u}_0 + \pi'_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \pi'_d\mathbf{u} \tag{5.15}$$

с коэффициентами $\pi'_k > 0$ для $k = 0, 1, \ldots, d$. Удобно в качестве π выбрать вектор

$$\pi = \pi_0\mathbf{u}_0 + \pi_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \pi_d\mathbf{u} \tag{5.16}$$

с коэффициентами

$$\pi_k = \frac{1}{\pi'_0 + \pi'_1 + \ldots + \pi'_d}\ \pi'_k \tag{5.17}$$

и вектор отождествлять с его конечной точкой.

Пусть

$$\triangle_{\mathbf{u}} = \triangle\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d\} \tag{5.18}$$

– замкнутый d-мерный симплекс, вершины которого есть концы векторов унимодулярного базиса $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d\}$ из (1.15), (1.16). Из (5.16), (5.17) следует, что точка π принадлежит

$$\pi \in \triangle_{\mathbf{u}} \tag{5.19}$$

симплексу (5.18) и

$$\pi_{\mathbf{u}} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d) \tag{5.20}$$

– ее *барицентрические координаты* относительно вершин симплекса, удовлетворяющие условию нормирования

$$|\pi_{\mathbf{u}}|_1 = \pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_d = 1, \quad \text{где} \quad \pi_k > 0. \tag{5.21}$$

Как мы увидим далее, представление направляющего вектора π луча $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ через барицентрические координаты (5.20) более инвариантно, чем его представление через координаты в единичном базисе пространства $\mathbb{R}_{d+1}$, использованного ранее в (1.5).

5.6. Типы звезд и их эквивалентность. Действуя проекцией pr_Π из (2.9) на представление (5.16), получаем представление

$$\mathbf{0} = \pi_0 v_0 + \pi_1 v_1 + \ldots + \pi_d v_d \tag{5.22}$$

для точки $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ – центра звезды v и, значит, она имеет те же барицентрические координаты

$$\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d), \tag{5.23}$$

что и точка π, но уже относительно звезды v или, точнее, – относительно замкнутого d-мерного симплекса

$$\triangle_v = \triangle\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}. \tag{5.24}$$

Барицентрические координаты $\mathbf{0}_v$ центра звезды v назовем *типом* звезды.

Будем говорить, что две звезды v и v' *аффинно эквивалентны* или, просто, – *эквивалентны*

$$v \sim v', \tag{5.25}$$

если $v' = Av$ для некоторого преобразования A из вещественной группы аффинных преобразования $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ размерности d.

В [1] доказана следующая

Лемма 5.1. *Имеет место следующая равносильность*

$$v \sim v' \Leftrightarrow \mathbf{0}_v = \mathbf{0}_{v'}. \tag{5.26}$$

5.7. Иррациональность луча и звезды. Скажем, что звезда v имеет *иррациональный* тип, если барицентрические координаты $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d$ ее центра (5.23) удовлетворяют условию:

$$\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d \quad \text{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}. \tag{5.27}$$

Лемма 5.2. *Пусть звезда v и луч* Π *связаны соотношением* $v = \mathrm{pr}_\Pi \mathbf{u}$ (2.14). *Тогда свойства иррациональности звезды v и луча* Π *равносильны.*

Доказательство. Это следует из определений иррациональности звезды (5.27) и луча (4.11) и равенства их барицентрических координат, вытекающего из представлений (5.16), (5.22). □

Теорема 5.3. *Если звезда v иррациональнальна* (5.27), *то ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ бесконечно дифференцируемо*; *при этом выполняется формула*:

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma). \tag{5.28}$$

Доказательство. Это следует из теоремы 5.2 и леммы 5.2. □

Замечание 5.2. Доказанная формула (5.28) интересна тем, что дифференцирование ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, определяемых своими внутренними параметрами – весовым вектором $\mathbf{m}$ и звездой v –, полностью осуществляется на языке тех же внутренних параметраметров.

§6. Периодические ядерные разбиения

6.1. Периодические ядерные разбиения. Способом (3.32) периодические ядерные разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ получаются, когда нормаль (1.1) имеет положительные рациональные координаты

$$\mathbf{n} = \left(\frac{m_0}{m}, \frac{m_1}{m}, \ldots, \frac{m_d}{m}\right), \tag{6.1}$$

где m_k и m определены в (1.8), (1.10). Поскольку базис $\mathbf{u}$ унимодулярный (1.15), (1.16), то m_k, m являются натуральными числами, имеющими наибольший общий делитель

$$\text{g.c.d.}(m_0, m_1, \ldots, m_d, m) = 1 \tag{6.2}$$

и удовлетворяющими нормирующему условию (1.2), принимающему вид

$$m_0 + m_1 + \ldots + m_d = m. \tag{6.3}$$

Таким образом, весовой вектор (1.7) имеет целые положительные координаты

$$\mathbf{m} = (m_0, m_1, \ldots, m_d), \quad \text{где} \quad m_k \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.4}$$

Множество точек $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ из решетки $\mathbb{Z}^{d+1}$ с условием

$$\mu a = \mathbf{n} \cdot a = 0 \tag{6.5}$$

образует подрешетку

$$L = L_{\mathbf{n}} \subset \mathbb{Z}^{d+1}, \tag{6.6}$$

являющеюся, как и сама $\mathbb{Z}^{d+1}$, *$\mathbb{Z}$-решеткой*, т.е. модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. В силу (6.5), (6.6) и (2.10) получаем

$$L = \mathbb{Z}^{d+1} \cap \mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0} \tag{6.7}$$

и, значит, решетка $L = L_{\mathbf{n}}$ образуется целыми точками, лежащими на гиперплоскости $\mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0}$ (2.10). Из (6.1) и (6.5) следует, что $L \subset \mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0}$ – *полная* $\mathbb{Z}$-решетка размерности d, состоящая из целых решений уравнения

$$a_0 m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_d m_d = 0. \tag{6.8}$$

Указанная решетка имеет *базис*

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_d] \tag{6.9}$$

из векторов $l_k = (a_{k0}, a_{k1}, \ldots, a_{kd}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ с весами (2.3):

$$\mu l_k = 0 \quad \text{с} \quad k = 0, 1, \ldots, d. \tag{6.10}$$

Если принять во внимание связь (3.39) между ядерными разбиениями с базисами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}$, то из [1] будет следовать периодичность

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) + l = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) \tag{6.11}$$

разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ относительно сдвигов на векторы l решетки L, а в силу (6.7) и (6.10) L будет решеткой всех периодов разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$.

Теорема 6.1. *Для любого сочетания $\sigma \in \Sigma$ производное разбиение $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$, как и исходное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$, периодично*

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) + l = \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) \tag{6.12}$$

относительно сдвигов на векторы l решетки L. При этом других периодов, кроме $l \in L$, производное разбиение $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ не имеет.

Доказательство. Утверждение вытекает из (6.7), (6.10) и формулы (5.1), показывающей, что при дифференцировании разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)\to\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$ сохраняется нормаль $\mathbf{n}$. □

Следствие 6.1. *Если ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m},v)$ имеет решетку периодов L, то его производное разбиение $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m},v)$, определенное в* (5.11)*, имеет ту же решетку периодов L.*

Доказательство. Это следует из теоремы 6.1 и формулы (5.6). □

6.2. Торические ядерные разбиения. Включение $\mathbb{Z}$-решетки L в гиперплоскость $L\subset\mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0}$ и то, что L является полной $\mathbb{Z}$-решеткой размерности d, позволяют определить d-мерный *тор*

$$\mathbb{T}^d_{\mathbf{n}}=\mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n},0}/L. \tag{6.13}$$

Следовательно, учитывая периодичность (6.11) разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$, ему будет соответствовать разбиение

$$\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)=\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)/L \tag{6.14}$$

тора $\mathbb{T}^d_{\mathbf{n}}$. Разбиения (6.14) называются *торическими ядерными разбиениями.*

По теореме 6.1 производное разбиение $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)$ сохраняет ту же решетку периодов L. Поэтому для него можно определить разбиение

$$\mathcal{T}^\sigma_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)=\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n},\mathbf{u},\Pi)/L \tag{6.15}$$

того же тора $\mathbb{T}^d_{\mathbf{n}}$, что и в (6.14).

На языке внутренних параметров $\mathbf{m},v$ *торические разбиения*

$$\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{m},v)=\mathcal{T}(\mathbf{m},v)/L \tag{6.16}$$

впервые были построены в [20]. Их развернутое изложение приведено в [2]. Разбиения $\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{m},v)$ обладают богатыми локальными [13], симметрийными [14] и комбинаторными [15] структурами. В [2] для разбиений (6.16) были определены производные разбиения

$$\mathcal{T}^\sigma_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{m},v)\ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ \mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{m}^\sigma,v^\sigma), \tag{6.17}$$

при этом производные параметры $\mathbf{m}^\sigma,v^\sigma$ имели тот же смысл, что и в определениях (4.5) и (5.14). Производные разбиения $\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{m}^\sigma,v^\sigma)$ были названы *индуцированными разбиениями* тора $\mathbb{T}^d_{\mathbf{n}}$. Из (5.1) следует формула

$$\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{m}^\sigma,v^\sigma)=\mathcal{T}(\mathbf{n},\mathbf{u}^\sigma_\Pi,\Pi)/L, \tag{6.18}$$

проясняющая геометрический смысл операции дифференцирования $\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{m}, v) \to \mathcal{T}^{\sigma}_{\mathrm{Tor}}(\mathbf{m}, v)$ торических разбиений (6.16).

§7. Сравнение ядерных разбиений

7.1. Случай $m = m'$. Введение (5.6) внешних параметров $\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi$ для ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ позволяет сравнивать ядерные разбиения с разными параметрами. Сначала сравним разбиения

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi), \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}', \Pi), \quad \text{если} \quad m = m'. \tag{7.1}$$

Здесь m, m' – порядки (1.10) весовых векторов $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}'$. В развернутой форме (1.14) разбиения (7.1) запишутся в виде

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon), \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}', \Pi, \Upsilon), \tag{7.2}$$

так как по (1.19) интервалы $\Upsilon = \Upsilon'$. Тогда из определения (1.19) будет следовать, что данные разбиения имеют одно и то же множество вершин

$$\mathcal{T}^{\,\mathrm{ver}}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon) = \mathcal{T}^{\,\mathrm{ver}}(\mathbf{n}, \mathbf{u}', \Pi, \Upsilon). \tag{7.3}$$

Значит, (7.1) являются *одновершинными* разбиениями.

Согласованно (1.12) варьируя параметр $\mathbf{u}$ с постоянным значением длины

$$|\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_1 = \mathrm{const}, \tag{7.4}$$

мы будем получать континуум многогранных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon)$ пространства $\mathbb{R}^d$ с фиксированным набором вершин.

7.2. Случай $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$. Теперь сравним разбиения

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi), \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi') \quad \text{для} \quad \Pi, \Pi' \subset \angle^{\,\mathrm{int}}\mathbf{u}. \tag{7.5}$$

Итак, имеем случай разбиений с одним и тем же базисом $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ и, следовательно, с одним весовым вектором $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ (1.7).

Отображение

$$v(a) = \mathrm{pr}_{\Pi}(a) \ \ \overrightarrow{\sim} \ \ v'(a) = \mathrm{pr}_{\Pi'}(a) \tag{7.6}$$

задает взаимно однозначное соответствие межу вершинами $v(a)$ и $v'(a)$ разбиений (7.5) с одними и теми же индексами $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d)$ из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^{d+1}_{\mathbf{n}}$ (2.2). Данная решетка содержится $\mathbb{Z}^{d+1}_{\mathbf{n}} \subset \mathbb{R}^{d+1}_{\mathbf{n}}$ в слое (2.10) толщины m, равной длине $|\Upsilon| = |\Upsilon'| = m$ интервала $\Upsilon = \Upsilon'$. Поэтому расстояние $r(v(a), v'(a))$ между соответствующими вершинами $v(a)$, $v'(a)$ ограничено

$$r(v(a), v'(a)) \leqslant r \tag{7.7}$$

константой $r = r(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$, определяемой разбиениями (7.5) и не зависящей от выбора самих вершин $v(a)$, $v'(a)$.

Рассмотрим звезды (2.14):

$$v = \mathrm{pr}_\Pi \mathbf{u}, \quad v' = \mathrm{pr}_{\Pi'} \mathbf{u}, \tag{7.8}$$

где $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ и $v' = \{v'_0, v'_1, \ldots, v'_d\}$. С помощью их лучей зададим биекцию

$$T_k \overrightarrow{\sim} T'_k \tag{7.9}$$

между параллелепипедами (3.15) с соответствующими скелетами $v_{k_1}, \ldots, v_{k_d}$ и $v'_{k_1}, \ldots, v'_{k_d}$. Биекцию (7.9) продолжим

$$T_{k,\mathbf{i}} \overrightarrow{\sim} T'_{k,\mathbf{i}} \tag{7.10}$$

на отмеченные параллелепипеды $T_{k,\mathbf{i}}$ и $T'_{k,\mathbf{i}}$ с выделенными фиксированными вершинами $v_\mathbf{i} \in T_k^{\mathrm{ver}}$ и $v'_\mathbf{i} \in T_k^{'\,\mathrm{ver}}$ одного мультииндекса $\mathbf{i} \in \mathcal{D}_k$ из множества (3.20).

Скажем, что отмеченный параллелепипед $T_{k,\mathbf{i}}$ *вкладывается*

$$v(a) : T_{k,\mathbf{i}} \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) \tag{7.11}$$

в разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ в его вершине $v(a) \in \mathcal{T}^{\mathrm{ver}}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$, если выполняется включение

$$T_{k,\mathbf{i}} + (v(a) - v_\mathbf{i}) \subset \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi). \tag{7.12}$$

Обозначим $\mathrm{St}(v(a))$ совокупность параллелепипедов $T_{k,\mathbf{i}}$ для всех $k = 0, 1, \ldots, d$, $\mathbf{i} \in \mathcal{D}_k$, вкладывающихся (7.11) в разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ в вершине $v(a)$. Назовем $\mathrm{St}(v(a))$ *многогранной звездой* вершины $v(a)$.

Пусть $v(a)$ и $v'(a)$ – эквивалентные вершины (7.17). Будем говорить, что многогранные звезды $\mathrm{St}(v(a))$ и $\mathrm{St}'(v'(a))$ соответственно разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ и $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi')$ *эквивалентны*

$$\mathrm{St}(v(a)) \sim \mathrm{St}'(v'(a)), \tag{7.13}$$

если звезда $\mathrm{St}'(v'(a))$ получается из звезды $\mathrm{St}(v(a))$ заменой (7.10) параллелепипедов $T_{k,\mathbf{i}} \in \mathrm{St}(v(a))$ на параллелепипеды $T'_{k,\mathbf{i}} \in \mathrm{St}'(v'(a))$.

Предложение 7.1. *Ядерные разбиения* $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ *и* $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi')$ *в эквивалентных вершинах* $v(a) \sim v'(a)$ (7.17) *имеют эквивалентные* $\mathrm{St}(v(a)) \sim \mathrm{St}'(v'(a))$ *многогранные звезды* $\mathrm{St}(v(a))$ *и* $\mathrm{St}'(v'(a))$. *При этом расстояния* $r(v(a), v'(a))$ *между вершинами* $v(a)$, $v'(a)$ *ограничены* (7.7) *некоторой константой* $r = r(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$, *не зависящей от выбора вершин* $v(a)$, $v'(a)$.

Доказательство. Осталось проверить согласованность вложений (7.11) с аналогичными вложениями

$$v'(a) : T'_{k,\mathbf{i}} \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi') \tag{7.14}$$

отмеченных параллелепипедов $T'_{k,\mathbf{i}}$ из (7.10) в разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)'$.

Сначала проверяем согласованность вложений

$$\begin{array}{llll} v(a): & \overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}}) & \hookrightarrow & \overrightarrow{G} \\ v'(a): & \overrightarrow{G}(T'_{k,\mathbf{i}}) & \hookrightarrow & \overrightarrow{G}' \end{array} \tag{7.15}$$

графов $\overrightarrow{G}(T_{k,\mathbf{i}})$, $\overrightarrow{G}(T'_{k,\mathbf{i}})$ параллелепипедов (3.25), (3.26). Она вытекает из равенства весов $m_k = \mu\mathbf{u}_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_k$ (1.8) базисных векторов $\mathbf{u}_k \in \mathbf{u}$ и, согласно (3.7), равенства

$$\mu v(a) = \mu v'(a) = \mu a \tag{7.16}$$

весов эквивалентных вершин $v(a)$, $v'(a)$.

По лемме 5.1 из [1] вложения графов (7.15) равносильны вложениям параллелепипедов (7.11), (7.14). □

Ядерные разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ и $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi')$ из предложения 7.1 назовем *конечно изоморфными.*

7.3. Веса и частоты. Равенство весовых векторов $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ двух ядерных разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ и $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\mathbf{n}', \mathbf{u}', \Pi')$ устанавливает достаточно сильную связь между ними. При некоторых дополнительных ограничениях (7.5) мы видели в предложении 7.1, что такие разбиения $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ будут конечно изоморфными

$$\mathcal{T} \overset{\xrightarrow{r}}{\sim} \mathcal{T}', \tag{7.17}$$

т.е. одним и тем же разбиением с точностью до ограниченных радиусом $r = r(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ (7.7) локальных деформаций.

Вернемся к периодическим разбиениям $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$, когда весовой вектор $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \ldots, m_d)$ имеет целые положительные координаты (6.4). Такие разбиения $\mathcal{T}$ будут периодическими (6.11). Им отвечают (6.14) конечные разбиения $\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}} = \mathcal{T}/L$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathbf{n}}$, в которых координата m_k – это количество параллелепипедов T_k, содержащихся в разбиении $\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}$ [1], или символически –

$$m_k = \sharp\{T_k \in \mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}\}. \tag{7.18}$$

Возвращаясь обратно от торического разбиения $\mathcal{T}_{\mathrm{Tor}}$ к исходному $\mathcal{T}$, видим, что величина

$$\nu_k = \frac{m_k}{m} \quad (k = 0, 1, \ldots, d), \tag{7.19}$$

где $m = m_0 + m_1 + \ldots + m_d$, – это *частота* появления параллелепипеда T_k в бесконечном разбиении $\mathcal{T}$.

Используя предельный переход из [1], можно показать, что и для произвольного ядерного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ величины (7.19) остаются быть частотами появления параллелепипедов T_k $(k = 0, 1, \ldots, d)$ в разбиении $\mathcal{T}$. В отличие от периодического случая с рациональными частотами $\nu_k = \frac{m_k}{m}$, для произвольных ядерных разбиений $\mathcal{T}$ частоты ν_k могуть быть иррациональными.

Предложение 7.2. *Пусть $T_{k,\Pi} = T_k$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ обозначает параллелепипед* (3.15) *ядерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ с параметром Π – направляющи лучом* (1.4)*, изменяющимся $\Pi \subset \angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u}$ в пределах конуса $\angle\mathbf{u}$* (1.13)*; кроме того, пусть $\nu_{k,\Pi} = \nu_k$ – частота* (7.19) *появления параллелепипеда $T_{k,\Pi}$ в разбиении $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$. Тогда частоты*

$$\nu_{k,\Pi} = \nu_k \quad (k = 0, 1, \ldots, d) \tag{7.20}$$

остаются постоянными при изменении луча $\Pi \subset \angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u}$.

Доказательство. Утверждение следует из: 1) конечно изоморфности разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ и $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi')$ с разными параметрами $\Pi, \Pi' \subset \angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u}$; 2) биекции (7.9) между параллелепипедами $T_{k,\Pi} \overrightarrow{\sim} T_{k,\Pi'}$; 3) ограничения (7.7) расстояния $r(v(a), v'(a)) < r$ между эквивалентными вершинами $v(a) = v_\Pi(a)$, $v'(a) = v_{\Pi'}(a)$. □

Интересно переформулировать предложение 7.2 на языке внутренних параметров $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ (5.6).

Следствие 7.1. *Пусть $T_{k,v} = T_k$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ обозначает параллелепипед* (3.15) *ядерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ с постоянным весовым вектором $\mathbf{m}$ и переменной звездой v; $\nu_{k,v} = \nu_k$ – частота* (7.19) *появления параллелепипеда $T_{k,v}$ в разбиении $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. Тогда частоты $\nu_{k,v} = \nu_k$ $(k = 0, 1, \ldots, d)$ не зависят от выбора звезды v.*

Доказательство. По предложению 7.1 разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ и $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v') = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi')$ конечно изоморфны. Перебирая разные лучи $\Pi \subset \angle^{\mathrm{int}}\mathbf{u}$, можно получить все типы звезд v. Отсюда и предложения 7.2 вытекает постоянство частот $\nu_{k,v}$. □

Список литературы

1. В. Г. Журавлев, *Универсальные ядерные разбиения.* — Записки научн. семин. ПОМИ **490** (2020), 49–93.
2. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
3. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Соврем. проблемы математики, МИАН **299** (2017), 283–303.
4. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем. **71**, No. 2 (2007), 89–122.
5. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
6. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
7. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.
8. В. И. Арнольд, *Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук.* М., Наука, 1989.
9. P. Arnoux, V. Berthé, S. Ito, *Discrete planes, $\mathbb{Z}^2$-actions, Jacobi-Perron algorithm and substitutions.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52**, No. 2 (2002), 305–349.
10. V. Berthé, L. Vuillon, *Tilings and rotations on the torus: a two-dimensional generalization of Sturmian sequences.* — Discrete Math. **223** (2000), 27–53.
11. V. Berthé, A. Siegel, J. Thuswaldner *Substitutions, Rauzy fractals and tilings.* — Combinatorics, Automata and Number Theory. Encyclopedia Math. Appl., vol. **135**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, pp. 248–323.
12. S. Ito, M. Ohtsuki, *Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms.* — Tokyo J. Math. **16**, No. 2 (1993), 441–472.
13. В. Г. Журавлев, *Локальная структура ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **502** (2021), 32–73.
14. В. Г. Журавлев, *Симметрии ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **502** (2021), 74–121.
15. В. Г. Журавлев, *Комбинаторика ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **511** (2022), 54–99.
16. В. Г. Журавлев, *Симметрии универсальных ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **511** (2022), 100–136.
17. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Послойный рост квазипериодического разбиения Рози.* — Кристаллография **52** No. 2 (2007), 204–210.
18. A. V. Shutov, A. V. Maleev, *Quasiperiodic plane tilings based on stepped surfaces.* — Acta Crystallogr. **A64** (2008), 376–382.
19. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
20. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.

21. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102.
22. S. Ito, M. Ohtsuki, *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm.* — Tokyo J. Math. **17**, No. 1 (1994), 33–58.
23. P. Arnoux, V. Berthé, H. Ei, Sh. Ito, *Tilings, Quasicrystals, Discrete Planes, Generalized Substitutions, and Multidimensional Continued Fractions.* — Maison de l'Informatique et des Mathématiques Discrètes (MIMD), Paris, France (2001), 59–78.
24. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби.* Владимир, ВлГУ, 2019.

Zhuravlev V. G. Differentiating of the karyon tilings.

We consider the universal d-dimensional karyon tilings $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. Its parameters, the weight vector $\mathbf{m}$ and the star v, belong to the dual module space $\triangle^d \times \triangle^d$ that is the direct product of two d-dimensional simplexes. The star v defines the geometry of the parallelepipeds $T_0, T_1, \ldots, T_d$, which the tiling $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ consists of, and the weight vector $\mathbf{m}$ sets the local rules and frequency distribution of the parallelepipeds in the tiling. Knowing the parameters $\mathbf{m}, v$, by the local algorithm $\mathcal{A}$ anyone can construct the whole tiling $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. It is proved that the differentiation of the karyon tiling $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \to \mathcal{T}^{\sigma}(\mathbf{m}, v)$ is equivalent to some explicitly defined elementary transformation of the centered unimodular basis $\mathbf{u}$.

Владимирский государственный университет
600024, Владимир, пр. Строителей, 11, Россия
E-mail: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 24 февраля 2022 г.