Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 511, 2022 г.

Н. Л. Гордеев, Е. А. Егорченкова

ДВОЙНЫЕ СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ NgN НОРМАЛИЗАТОРОВ МАКСИМАЛЬНЫХ ТОРОВ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП И ОРБИТЫ ЧАСТИЧНЫХ ДЕЙСТВИЙ ПОДГРУПП КРЕМОНЫ

Введение

Двойные смежные классы групп преобразований. Пусть G – группа, действующая на множестве X. Далее, пусть $x_1, x_2 \in X$, $H_1 = \mathrm{St}_{x_1}$, $H_2 = \mathrm{St}_{x_2}$ – стабилизаторы x_1, x_2 и пусть $\mathcal{O}_{x_1}$, $\mathcal{O}_{x_2}$ – орбиты x_1, x_2. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между множеством G-орбит естественного действия на $\mathcal{O}_{x_2} \times \mathcal{O}_{x_1}$ и множеством двойных смежных классов $\{H_1 g_\alpha H_2\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}$ (это простой и общеизвестный факт). А именно,

$$\{(g_\alpha(x_2), x_1)\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}$$

– *минимальное множество представителей G-орбит $\mathcal{O}_{x_2} \times \mathcal{O}_{x_1}$.*

Пары максимальных торов простых алгебраических групп. В этой статье мы рассматриваем случай, когда G – простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K. Разложение группы G в объединение двойных смежных классов $G = \bigcup_{g_i} H_2 g_i H_1$ – очень важная конструкция в теории алгебраических групп, особенно в случае, когда H_1, H_2 – параболические подгруппы. В этих случаях разложение конечно. Здесь мы рассматриваем случай, когда $H_1 = H_2 = N = N_G(T)$ – нормализатор зафиксированного максимального тора T. Теперь пусть X – множество максимальных торов из G. Группа G действует на X сопряжениями. Тогда X – всего одна G-орбита $T \in X$ и $N := N_G(T) = \mathrm{St}_T$. Отсюда мы получаем взаимно-однозначное соответствие между множеством G-орбит множества $X \times X$ и множеством двойных смежных классов $\{N g_\alpha N\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}$. Далее, мы имеем разложение

$$G = NU^-UN, \quad \text{где} \quad U = R_u(B), \quad U^- = R_u(B^-)$$

Ключевые слова: простая алгебраическая группа, большая клетка Гаусса, частичные действия групп, группа Кремоны аффинного пространства.

(здесь B – зафиксированная подгруппа Бореля, содержащая T, $B^- = w_0Bw_0$ – противоположная подгруппа Бореля, $R_u(B)$ – унипотетный радикал B). Заметим, что

$$\mathcal{U} := U^-U \approx A_K^m,$$

где m – количество корней соответствующей системы корней и A_K^m – m-мерное аффинное пространство над K. Таким образом, мы получаем взаимно-однозначное соответствие между множеством G-орбит произведения $X \times X$ и множеством двойных смежных классов $\{N\mathfrak{u}N\}_{\mathfrak{u}\in\mathcal{U}}$.

Группа $\mathcal{N} \leqslant \mathrm{Cr}_m(K)$. Чтобы выделить минимальное множество представителей $\{\mathfrak{u}_\alpha \in \mathcal{U}\}$ двойных смежных классов $\{N\mathfrak{u}N\}_{\mathfrak{u}\in\mathcal{U}}$, мы используем следующую конструкцию. С помощью умножений G на элементы группы N слева и справа мы строим некоторую подгруппу $\mathcal{N} \leqslant \mathrm{Cr}_m(K)$ группы Кремоны $\mathrm{Cr}_m(K)$, которая *частично действует* (см. параграф 1) на $\mathcal{U} \approx A_K^m$. Мы получаем следующую теорему и ее следствие.

Теорема 1. *Элементы $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \in \mathcal{U}$ принадлежат одному и тому же двойному смежному классу $N\mathfrak{u}N$ тогда и только тогда, когда они лежат в одной $\mathcal{N}$-орбите.*

Следствие 1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством G-орбит пар максимальных торов G и $\mathcal{N}$-орбитами подгруппы $\mathcal{N} \leqslant \mathrm{Cr}_m(K)$ относительно частичного действия на A_K^m.*

Определение группы $\mathcal{N}$ не единственно. Это определение, в частности, зависит от вложения группы $N \times N$ в соответствующую группу Кремоны.

Проблема пар матриц. Хорошо известна “дикая” проблема *классификации пар матриц* (A, B) с точностью до сопряжения единственным элементом из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, где $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Можно “упростить” задачу, заменяя описание всех $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-орбит действия $(A, B) \to (gAg^{-1}, gBg^{-1})$ на описание слоев

$$\pi : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C}))/G,$$

где π – фактор-отображение и $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C})/G$ – соответствующий алгебраический фактор (см. [6], 9.5), $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Также мы можем сформулировать “подпроблему”: классифицировать $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-орбиты множества $C_A \times C_B$, с $C_A, C_B \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ – $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-орбиты A, B для данных A, B. Мы также можем дать такую классификацию “с точностью до изоморфизма централизаторов”. Допустим, если A, B – регулярные полупростые унимодулярные матрицы, то классификация таких пар “с точностью до изоморфизма централизаторов” в точности является классификацией пар максимальных торов $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Случай $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Здесь мы вычисляем систему представителей максимального тора в простейшем случае $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (см. Следствие 4.7). А именно, пусть

$$g_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),$$

$$\mathcal{K} := \left\{\alpha = a + bi \in \mathbb{C} \mid a \geqslant -\frac{1}{2}\right\} \Big\backslash \left\{\alpha = -\frac{1}{2} + bi \in \mathbb{C} \mid b < 0\right\}.$$

Теорема 2. *Множество пар* $\{(T,T)\} \cup \{(g_\alpha T g_\alpha^{-1}, T)\}_{\alpha \in \mathcal{K}}$ *– минимальное множество представителей орбит пар торов в* $G \times G$, *полученных сопряжениями элементами из* G.

Заметим, что $\mathcal{K}$ – подмножество $\mathbb{C}$, гомеоморфное $\mathbb{C}$ в стандартной топологии (действительно, отображение $\varepsilon : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$, полученное по формуле $\varepsilon(z) = (z + \frac{1}{2})^2$, определяет соответствующий гомеоморфизм).

В конце статьи мы также описываем $\mathrm{SL}_2(K)$-орбиты пар (s,t) нецентральных полупростых элементов $\mathrm{SL}_2(K)$.

Данная работа написана на основе текста [1].

Обозначения и терминология.

K – алгебраически замкнутое поле; $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел;

G – простая алгебраическая группа над K (мы отождествляем G с группой K-точек $G(K)$), соответствующая системе корней R ранга r, $R = R^+ \cup R^-$ – зафиксированное разложение в объединение положительных и отрицательных корней;

T – фиксированный максимальный тор группы G;

$B \leqslant G$ – фиксированная подгруппа Бореля, содержащая T, $B^- = w_0 B w_0$ – противоположная подгруппа Бореля (здесь w_0 – элемент группы Вейля максимальной длины), $U = R_u(B)$, $U^- = R_u(B^-)$ – унипотентные радикалы B, B^-;

$N = N_G(T)$ – нормализатор T, $N/T = W$ – группа Вейля G; для $w \in W$ мы обозначаем через $\dot{w} \in N$ любой фиксированный прообраз w.

§1. Частичное действие групп

Частичное действие группы используется в различных случаях (см., например, [2], [4]). Здесь мы дадим определение частичного действия в немного другой форме.

Определение 1.1. Пусть Γ – группа и X – множество. Будем говорить, что определено частичное действие Γ на X, если для любого $x \in X$ зафиксировано подмножество $\Gamma(x) \subset \Gamma$ и выполнены следующие условия:

(i) для любого $\sigma \in \Gamma(x)$ определен элемент $\sigma(x) \in X$;

(ii) нейтральный элемент $e \in \Gamma$ принадлежит каждому из подмножеств $\Gamma(x)$ и $e(x) = x$;

(iii) если $\tau \in \Gamma(\sigma(x))$, то $\tau\sigma \in \Gamma(x)$ и $\tau(\sigma(x)) = \tau\sigma(x)$;

(iv) $\sigma^{-1} \in \Gamma(\sigma(x))$.

1.1. Орбиты частичного действия. Для частичных действий мы можем определить *орбиты*. А именно, будем говорить, что $x, y \in X$ принадлежат одной Γ-орбите тогда и только тогда, когда можно найти такой элемент $\sigma \in \Gamma(x)$, что $\sigma(x) = y$. Очевидно, что из условий (i)–(iv). Определения 1.1 вытекает, что Γ-орбиты являются классами эквивалентности относительно эквивалентности:

$$x \sim_\Gamma y \Leftrightarrow \sigma(x) = y \ \text{ для некоторых } \ \sigma \in \Gamma(x).$$

1.2. Действие группы Кремоны на аффинном пространстве. Здесь мы рассматриваем группу Кремоны $\mathrm{Cr}_n(K)$ как группу автоморфизмов поля $K(x_1, \dots, x_n)$ (см., например, [5]). Пусть

$$A_K^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K\}$$

– это n-мерное аффинное пространство. Любой элемент $\sigma \in \mathrm{Cr}_n(K)$ представляется в виде последовательности рациональных функций

$$\sigma = \left(\frac{\varphi_1}{\psi_1}, \dots, \frac{\varphi_n}{\psi_n}\right),$$

где $\varphi_i, \psi_i \in K[x_1, \dots, x_n]$, $\psi_i \neq 0$, $(\varphi_i, \psi_i) = 1$, и мы можем определить

$$\sigma(a) := \left(\frac{\varphi_1(a)}{\psi_1(a)}, \dots, \frac{\varphi_n(a)}{\psi_n(a)}\right)$$

для всех таких точек $a \in A^n_K$, что

$$a \in U_\sigma := \{a' \in A^n_K \mid \psi_i(a') \neq 0 \text{ для всех } i\}.$$

Множество U_σ – это открытое подмножество A^n_K, в котором рациональное отображение σ регулярно.

Пусть

$$\tau = \left(\frac{\mu_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{\mu_n}{\nu_n}\right) \in \mathrm{Cr}_n(K).$$

Если $\sigma(a) \in U_\tau := \{a' \in A^n_K \mid \nu_i(a') \neq 0 \text{ для всех } i\}$, то $\tau(\sigma(a)) = (\tau\sigma)(a)$, где

$$\tau\sigma = \left(\frac{\mu_1\left(\frac{\varphi_1}{\psi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\psi_n}\right)}{\nu_1\left(\frac{\varphi_1}{\psi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\psi_n}\right)}, \ldots, \frac{\mu_n\left(\frac{\varphi_1}{\psi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\psi_n}\right)}{\nu_n\left(\frac{\varphi_1}{\psi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\psi_n}\right)}\right).$$

Пусть теперь $\Gamma \leqslant \mathrm{Cr}_n(K)$. Для любого $x \in A^n_K$ положим $\Gamma(x) := \{\sigma \in \Gamma \mid x \in U_\sigma\}$. Очевидно, что условия (i)–(iii) выполнены для Γ. Однако, условие (iv) не обязательно выполняется. Например, пусть $n = 2$ и

$$\Gamma = \left\langle \sigma = \left(x_1, \frac{x_1 - 1}{x_2}\right) \right\rangle.$$

Тогда $\sigma^{-1} = \sigma$ и $\sigma^{-1} \neq \Gamma(\sigma((1,1)))$.

Ниже мы рассмотрим некоторые подгруппы группы Кремоны $\mathrm{Cr}_n(K)$, которые частично действуют на аффинном пространстве A^n_K.

§2. Разложение $G = NU^-UN$

Имеется разложение

$$G = NU^-UN. \tag{2.1}$$

Действительно, для любой клетки Брюа $B\dot{w}B$ имеем $B\dot{w}B = U_w\dot{w}TU$, где U_w – произведение (в любом фиксированном порядке) таких корневых подгрупп X_α, что $\alpha \in R^+$ и $w^{-1}(\alpha) \in R^-$. Следовательно, $\dot{w}^{-1}U_w\dot{w} \subset U^-$ и мы получаем

$$\begin{aligned} B\dot{w}B &= \dot{w}\dot{w}^{-1}U_w\dot{w}TU \\ &= \dot{w}\,\underbrace{\dot{w}^{-1}U_w\dot{w}}_{\subset U^-}UT \subset \dot{w}U^-UT \subset \dot{w}TU^-UN \subset NU^-UN. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathcal{U} = U^-U, \quad \mathcal{U}_G = U^-TU. \tag{2.2}$$

Тогда $\mathcal{U}_G$ – это “большая клетка Гаусса” группы G, которая соответствует подгруппе Бореля B и $\mathcal{U} \approx A_K^m$, где $m = \dim G - \dim T = |R\,|$.

2.1. Уравнения, определяющие $\mathcal{U} = U^- U$. Для доминантного веса $\lambda : T \to K^*$ существует такая регулярная функция δ_λ на G, что ограничение δ_λ на T совпадает с λ (см., например, [3]). Напомним конструкцию δ_λ. Пусть V_λ – простой G-модуль со старшим весом λ. Далее, пусть $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_d\}$ – это базис, состоящий из весовых векторов из T, где e_1 соответствует λ. Пусть $\rho_\lambda : G \to \mathrm{GL}_n(K)$ – матричное представление, соответствующее базису $\mathfrak{B}$. Регулярная функция $\delta_\lambda : T \to K$, определенная по формуле $\delta_\lambda := g_{11}$, где g_{11} – это $(1,1)$-элемент матрицы $\rho_\lambda(g)$, удовлетворяет следующему условию:

$$\delta_\lambda(vtu) = \lambda(t) \quad \text{для любых } t \in T \text{ и } v \in U^-,\ u \in U.$$

Далее, пусть $\delta_{\lambda_1}, \ldots, \delta_{\lambda_r}$ – регулярные функции на G, соответствующие фундаментальным весам $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Тогда большая клетка Гаусса $\mathcal{U}_G$ определяется неравенствами

$$g \in \mathcal{U}_G \Leftrightarrow \delta_{\lambda_i}(g) \neq 0 \text{ для любых } i = 1, \ldots, r. \tag{2.3}$$

Замкнутое подмножество $\mathcal{U} \subset G$ определяется уравнениями

$$g \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \delta_{\lambda_i}(g) = 1 \text{ для любых } i = 1, \ldots, r. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. В случае $G = \mathrm{SL}_{r+1}(K)$, элемент $\delta_{\lambda_i}(g) \in K$ – это главный i-тый минор матрицы $g \in \mathrm{SL}_{r+1}(K)$.

2.2. Рациональное отображение $\delta^* : G \to T$. Рассмотрим регулярное отображение

$$\delta : G \to A_K^r,$$

определенное формулой $\delta(g) = (\delta_{\lambda_1}(g), \ldots, \delta_{\lambda_r}(g))$. Очевидно,

$$\delta(vtu) = \delta(t) \text{ для любых } v \in U^-,\ t \in T,\ u \in U. \tag{2.5}$$

При ограничении отображения δ на T получаем изоморфизм

$$T \overset{\delta}{\approx} (A_K^r)^* := \{(a_1, \ldots, a_r) \mid a_i \neq 0 \text{ для любых } i\} \approx K^{*r}.$$

Мы будем отождествлять группу G с замкнутой подгруппой (в топологии Зарисского) группы $\mathrm{SL}_n(K)$ (для некоторого фиксированного n), а группу T с подгруппой группы диагональных матриц $\mathrm{SL}_n(K)$. Таким образом, если $t \in T$, то

$$t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ для некоторых } t_i \in K.$$

Пусть
$$\kappa : (A^r_K)^* \to T$$
– такое регулярное отображение, что $\kappa \circ \delta(t) = t$ для любых $t \in T$. Так как ограничение $\delta\,|_T : T \to (A^r_K)^*$ – это рациональный гомоморфизм тора T (напомним, что $\delta(t) = (\delta_{\lambda_1}(t), \dots, \delta_{\lambda_r}(t)) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t))$ для любого $t \in T$), то κ также рациональный гомоморфизм тора $(A^r_K)^*$. Тогда
$$\kappa((a_1, \dots, a_r)) = \left(\prod_{i=1}^{r} a_i^{z_{1i}}, \dots, \prod_{i=1}^{r} a_i^{z_{ni}} \right) \tag{2.6}$$
для некоторых $z_{ij} \in \mathbb{Z}$. Так как $\det \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_n) = 1$, получаем
$$\sum_{j=1}^{n} z_{ji} = 0 \text{ для любого } i = 1, \dots, r. \tag{2.7}$$

Таким образом, мы можем рассматривать отображение κ как рациональное отображение
$$\kappa : A^r_K \to A^n_K,$$
определенное формулой (2.6). При этом, отображение κ регулярно в точке $(a_1, \dots, a_r)$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \dots, a_r) \in (A^r_K)^*$; см. (2.7).

Пример. Пусть $G = \mathrm{SL}_{r+1}(K)$ и $t = \operatorname{diag}\left(t_1, \dots, t_r, \dfrac{1}{t_1 t_2 \dots t_r}\right) \in T$. Тогда $\delta(t) = (t_1, t_1 t_2, \dots, t_1 t_2 \dots t_r)$ и следовательно,
$$\kappa((a_1, \dots, a_r)) = \left(a_1, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_r}{a_{r-1}}, \frac{1}{a_r}\right).$$

Теперь мы определим рациональное отображение
$$\delta^* = \kappa \circ \delta : G \to A^n_K.$$
Это отображение регулярно только в точках большой клетки Гаусса $\mathcal{U}_G$ и его образ $\operatorname{Im} \delta^*$ изоморфен T. Мы будем отождествлять $\operatorname{Im} \delta^*$ с тором T. Из определения δ^* имеем равенство
$$\delta^*(t) = t \text{ для любых } t \in T. \tag{2.8}$$
Из (2.5) получаем
$$\delta^*(t_1 v t u t_2) = t_1 t t_2 \text{ для любых } t_1, t_2, t \in T,\ v \in U^-,\ u \in U. \tag{2.9}$$

2.3. Рациональное отображение $\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$**.** Пусть $\omega : G \to G$ – изоморфизм аффинного многообразия G. Напомним, что замкнутое (по Зарисскому) подмножество $\mathcal{U} = U^- U$ мы также рассматриваем как аффинное многообразие $A_K^m \approx A_K^{\frac{m}{2}} \times A_K^{\frac{m}{2}}$. Рассмотрим рациональное отображение $\mathrm{w}_\omega : G \to G$, определенное формулой

$$\mathrm{w}_\omega(g) = (\delta^*(\omega(g)))^{-1}\omega(g).$$

Пусть отображение w_ω регулярно в точке $g \in \mathcal{U}$. Тогда элемент $\omega(g)$ принадлежит большой клетке Гаусса $\mathcal{U}_G \subset G$ (это непосредственно следует из определения w_ω и (2.6), (2.7)) и следовательно, $\omega(g) = vtu$ для некоторых $v \in U^-$, $t \in T$, $u \in U$. Таким образом, $\delta^*(\omega(g)) = t$, (см. (2.9)), и мы получаем, что

$$\mathrm{w}_\omega(g) = t^{-1}vtu = (t^{-1}vt)t^{-1}tu = (t^{-1}vt)u \in \mathcal{U}.$$

Пусть $\mathcal{U}_\omega := \{u \in \mathcal{U} \mid \mathrm{w}_\omega$ регулярно в точке $u\}$. Рассмотрим ограничение w_ω на замкнутое подмножество $\mathcal{U}$. Если $\mathcal{U}_\omega \neq \varnothing$, то мы будем считать w_ω рациональным отображением $\mathrm{w}_\omega : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Так как ω – изоморфизм многообразий, то из определения w_ω мы получаем эквивалентность

$$g \in \mathcal{U}_\omega \Leftrightarrow \omega(g) \in \mathcal{U}_G.$$

Следовательно,

$$\mathcal{U}_\omega = \mathcal{U} \cap \omega^{-1}(\mathcal{U}_G). \tag{2.10}$$

Теперь мы рассмотрим отображение $\omega : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, определенное левыми и правыми умножениями на элементы из подгруппы N. А именно, пусть $w_1, w_2 \in W$ и пусть $\dot{w}_1, \dot{w}_2 \in N$ – зафиксированные прообразы. Далее, пусть $\omega : G \to G$ – изоморфизм (многообразия G), полученный по формуле $\omega(g) = \dot{w}_1 g \dot{w}_2$. Тогда положим, что

$$\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} := \mathrm{w}_\omega, \quad \mathcal{U}_{w_1,w_2} := \mathcal{U}_\omega.$$

Множество $\mathcal{U}_{w_1,w_2} = \mathcal{U} \cap \dot{w}_1^{-1}\mathcal{U}_G\dot{w}_2^{-1}$ – это пересечение замкнутого и открытого подмножества из G и следовательно, – это открытое подмножество в $\mathcal{U}$. Так как $\mathcal{U}_G = U^-TU$, то множество $\mathcal{U} \cap \dot{w}_1^{-1}\mathcal{U}_G\dot{w}_2^{-1}$ не зависит от выбора прообразов $\dot{w}_1$, $\dot{w}_2$ элементов w_1, w_2. Отсюда следует, что множество $\mathcal{U}_{w_1,w_2}$ также не зависит от выбора прообразов $\dot{w}_1$, $\dot{w}_2$.

Лемма 2.2. $\mathcal{U}_{w_1,w_2} \neq \varnothing$.

Доказательство. Так как $\mathcal{U}_G \neq \varnothing$, то это непустое открытое подмножество G, а значит, $\dot{w}_1\mathcal{U}_G\dot{w}_2 \cap \mathcal{U}_G \neq \varnothing$. Пусть

$$\dot{w}_1 vtu\dot{w}_2 = v't'u' \in \dot{w}_1\mathcal{U}_G\dot{w}_2 \cap \mathcal{U}_G,$$

где $v, v' \in U^-$, $t, t' \in T$, $u, u' \in U$. Пусть $s = \dot{w}_1 t^{-1}\dot{w}_1^{-1}$. Тогда $s \in T$ и

$$s\dot{w}_1 vtu\dot{w}_2 = (\dot{w}_1 t^{-1}\dot{w}_1^{-1})\dot{w}_1 vtu\dot{w}_2 = \dot{w}_1 \underbrace{\underbrace{(t^{-1}vt)}_{\in U^-} u}_{\in\mathcal{U}} \dot{w}_2$$

$$= sv't'u' = \underbrace{(sv's^{-1})}_{\in U^-}\underbrace{(st')}_{\in T} u' \in \mathcal{U}_G \Rightarrow \mathcal{U} \cap \dot{w}_1^{-1}\mathcal{U}_G\dot{w}_2^{-1} \neq \varnothing. \qquad \square$$

Таким образом у нас есть такое рациональное отображение

$$\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} : \mathcal{U} \to \mathcal{U},$$

что множество точек $\mathfrak{u} \in \mathcal{U}$, где $\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}$ регулярно, соответствует непустому открытому (в $\mathcal{U}$) подмножеству $\mathcal{U}_{w_1,w_2} = \mathcal{U} \cap \dot{w}_1^{-1}\mathcal{U}_G\dot{w}_2^{-1}$.

Предложение 2.3. *Отображение* $\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} : \mathcal{U}_{w_1,w_2} \to \mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}(\mathcal{U}_{w_1,w_2})$ – *изоморфизм открытых подмножеств* $\mathcal{U}$ *и* $\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}(\mathcal{U}_{w_1,w_2}) = \mathcal{U}_{w_1^{-1},w_2^{-1}}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{u} \in \mathcal{U}_{w_1,w_2}$. Далее, пусть

$$\dot{w}_1\mathfrak{u}\dot{w}_2 = vtu \tag{2.11}$$

для некоторых $v \in U^-$, $u \in U$, $t \in T$. Тогда $\mathfrak{u}' = \mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}(\mathfrak{u}) = t^{-1}vtu$. Далее,

$$\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}}(\mathfrak{u}') = (\delta^*(\dot{w}_1^{-1}\mathfrak{u}'\dot{w}_2^{-1}))^{-1}\dot{w}_1^{-1}\mathfrak{u}'\dot{w}_2^{-1}$$

$$= (\delta^*(\dot{w}_1^{-1}\mathfrak{u}'\dot{w}_2^{-1}))^{-1}\underbrace{(\dot{w}_1^{-1}t^{-1}\dot{w}_1)}_{:=s\in T}\underbrace{(\dot{w}_1^{-1}vtu\dot{w}_2^{-1})}_{=\mathfrak{u}\text{ см. }(2.11)} = (\underbrace{\delta^*(s\mathfrak{u})}_{=s})^{-1}s\mathfrak{u} = \mathfrak{u}.$$

Следовательно, $\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}}(\mathfrak{u}') = \mathfrak{u}$ и, таким образом, отображение

$$\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}} \circ \mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} : \mathcal{U}_{w_1,w_2} \to \mathcal{U}_{w_1,w_2} \quad \text{тождественно.} \tag{2.12}$$

Так как (2.12) выполняется для всех пар $\dot{w}_1$, $\dot{w}_2$, мы получаем, что отображение

$$\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} \circ \mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}} : \mathcal{U}_{w_1^{-1},w_2^{-1}} \to \mathcal{U}_{w_1^{-1},w_2^{-1}} \quad \text{тождественно.} \tag{2.13}$$

Так как $\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}}$ регулярно в каждой точке $\mathfrak{u}' = \mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}(\mathfrak{u})$, получаем включение

$$\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}(\mathcal{U}_{w_1,w_2}) \subset \mathcal{U}_{w_1^{-1},w_2^{-1}}. \tag{2.14}$$

Тогда включение (2.14) сохраняется при замене w_i на w_i^{-1}

$$\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}}(\mathcal{U}_{w_1^{-1},w_2^{-1}}) \subset \mathcal{U}_{w_1,w_2}. \tag{2.15}$$

Мы можем рассмотреть отображения

$$\mathcal{U}_{w_1,w_2} \xrightarrow{\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}} \mathcal{U}_{w_1^{-1},w_2^{-1}} \xrightarrow{\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}}} \mathcal{U}_{w_1,w_2} \xrightarrow{\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}} \mathcal{U}_{w_1^{-1},w_2^{-1}},$$

см. (2.14) и (2.15). Таким образом из (2.12) и (2.15) получаем, что

$$\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} \ : \ \mathcal{U}_{w_1,w_2} \to \mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}(\mathcal{U}_{w_1,w_2})$$

– изоморфизм открытых подмножеств $\mathcal{U}$ и $\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2}(\mathcal{U}_{w_1,w_2}) = \mathcal{U}_{w_1^{-1},w_2^{-1}}$. □

Следствие 2.4. $\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} \in \mathrm{Cr}_m(K)$ *и* $\mathrm{w}^{-1}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} = \mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}}$.

Замечание 2.5. Заметим, что $\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}}$ – отображение, соответствующее $\dot{w}_1^{-1}$, $\dot{w}_2^{-1}$. Таким образом, здесь мы берем зафиксированные прообразы $\dot{w}_1$, $\dot{w}_2$ элементов w_1, w_2, а затем берем обратные элементы к этим прообразам. Взяв другие прообразы $(\dot{w_1^{-1}})$, $(\dot{w_2^{-1}})$, мы получаем соответствующее отображение $\mathrm{w}_{(\dot{w_1^{-1}}),(\dot{w_2^{-1}})}$, которое отличается от $\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\dot{w}_2^{-1}}$.

§3. Определение группы $\mathcal{N}$

3.1. Группа $\mathcal{T}_s \leqslant Cr_m(K)$. Теперь мы определим некоторую группу $\mathcal{T} \leqslant \mathrm{Cr}_m(K)$, действующую на $\mathcal{U} \approx A^m$.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathfrak{u} \in \mathcal{U}$ *и* $t, s \in T$. *Тогда* $t\mathfrak{u}s \in \mathcal{U} \ \Leftrightarrow \ s = t^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{u} = vu$, где $v \in U^-$, $u \in U$. Тогда

$$t\mathfrak{u}s = \underbrace{(tvt^{-1})}_{\in U^-} \underbrace{ts}_{\in T} \underbrace{(s^{-1}us)}_{\in U} \in \mathcal{U} \ \Leftrightarrow \ ts = 1$$

(напомним, что разложение Гаусса $g = vtu$ любого $g \in \mathcal{U}_G$ единственно). □

Для любого $s \in T$ мы определяем преобразование $\mathfrak{t}_s : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ формулой $\mathfrak{t}_s(\mathfrak{u}) = s\mathfrak{u}s^{-1}$. Пусть

$$\mathcal{T} := \langle \mathfrak{t}_s \mid s \in T \rangle.$$

Мы будем рассматривать группу $\mathcal{T}$ как и подгруппу в группе $\mathrm{Cr}_m(K)$.

Лемма 3.2. *Пусть $T_Z := T \cap Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы G. Тогда*
$$\mathcal{T} \approx T/T_Z.$$

Доказательство. Пусть $\phi : T \to \mathcal{T}$ – отображение, определенное формулой $\phi(s) = \mathfrak{t}_s$. Из опредления группы $\mathcal{T}$ следует, что ϕ – эпиморфизм, ядро которого $\operatorname{Ker} \phi$ состоит из элементов тора T, коммутирующих со всеми элементами множества $\mathcal{U}$. Поскольку множество $\mathcal{U}$ содержит все корневые подгруппы группы G, $\operatorname{Ker} \phi = T_Z$. □

3.2. Левые и правые умножения множества $\mathcal{U}$ на элементы $\dot{w}$.

Предложение 3.3. *Пусть $w_1, w_1', w_2, w_2' \in W$, $\omega_1 = w_1' w_1$, $\omega_2 = w_2 w_2'$. Далее, пусть $\dot{w}_1$, $\dot{w}_2$, $\dot{w}_1'$, $\dot{w}_2'$, $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$ – какой-либо фиксированный набор прообразов элементов группы Вейля в группе N и пусть*
$$t_1 \dot{\omega}_1 = \dot{w}_1' \dot{w}_1, \quad \dot{\omega}_2 t_2 = \dot{w}_2 \dot{w}_2' \quad \text{для некоторых } t_1, t_2 \in T. \tag{3.1}$$
Тогда $\mathrm{w}_{\dot{w}_1', \dot{w}_2'} \mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2} = \mathfrak{t}_s \mathrm{w}_{\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2}$, где $s = t_2^{-1}$.

Доказательство. Пусть
$$\mathfrak{u} \in \mathcal{U}_{w_1, w_2} \cap \mathrm{w}^{-1}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}(\mathcal{U}_{w_1', w_2'} \cap \mathcal{U}_{w_1^{-1}, w_2^{-1}})$$
(заметим, что пересечения непустых открытых подмножеств из $\mathcal{U}$ – это непустые открытые подмножества). Таким образом, отображение $\mathrm{w}_{\dot{w}_1', \dot{w}_2'}$ регулярно в точке $\mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}(\mathfrak{u})$ и мы получаем, что
$$\begin{aligned}
\mathrm{w}_{\dot{w}_1', \dot{w}_2'} \mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}(\mathfrak{u}) &= \mathrm{w}_{\dot{w}_1', \dot{w}_2'}(\underbrace{(\delta^*(\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2))^{-1}}_{:= t \in T} \dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2) \\
&= (\delta^*((\dot{w}_1' t \dot{w}_1'^{-1}) \dot{w}_1' (\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2) \dot{w}_2'))^{-1} (\dot{w}_1' t \dot{w}_1'^{-1}) \dot{w}_1' (\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2) \dot{w}_2' \\
&\overset{(2.9)}{=} (\delta^*(\dot{w}_1'(\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2) \dot{w}_2'))^{-1} \dot{w}_1' (\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2) \dot{w}_2' \\
&\overset{(3.1)}{=} (\delta^*(t_1 \dot{\omega}_1 \mathfrak{u} \dot{\omega}_2 t_2))^{-1} t_1 \dot{\omega}_1 \mathfrak{u} \dot{\omega}_2 t_2 \\
&\overset{(2.9)}{=} t_2^{-1} (\delta^*(\dot{\omega}_1 \mathfrak{u} \dot{\omega}_2))^{-1} \dot{\omega}_1 \mathfrak{u} \dot{\omega}_2 t_2 = \mathfrak{t}_s \mathrm{w}_{\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2}, \quad \text{где } s = t_2^{-1}.
\end{aligned}$$
□

Следствие 3.4. *Пусть $w_1, w_2 \in W$ и пусть $\dot{w}_1, \dot{w}_2 \in N$ – их прообразы. Далее, пусть $\grave{w}_1 = t_1 \dot{w}_1$, $\grave{w}_2 = \dot{w}_2 t_2$ – другая пара прообразов тех же элементов w_1, w_2. Тогда*
$$\mathrm{w}_{\grave{w}_1, \grave{w}_2} = \mathfrak{t}_s \, \mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}(\mathfrak{u}), \quad \text{где } s = t_2^{-1}.$$

Доказательство. В равенстве (3.1) Предложения 3.3 положим $w'_1 = w'_2 = e$, где e – нейтральный элемент группы W. Пусть, далее,

$$\dot{w}'_1 = t_1 e = t_1, \quad \dot{w}'_2 = e t_2 = t_2, \quad \dot{\omega}_1 = \dot{w}_1, \quad \dot{\omega}_2 = \dot{w}_2.$$

Тогда

$$t_1 \dot{\omega}_1 = t_1 \dot{w}_1 = \dot{w}_1, \quad \dot{\omega}_2 t_2 = \dot{w}_2 t_2 = \dot{w}_2.$$

Теперь из Предложения 3.3 следует $\mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2} = \mathfrak{t}_s \, \mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}$, где $s = t_2^{-1}$. □

Далее, мы будем считать, что прообраз $\dot{e}$ нейтрального элемента группы W – это нейтральный элемент группы N и G.

Предложение 3.5. *Пусть* $s \in T$, $w_1, w_2 \in W$. *Тогда*

$$\mathrm{w}^{-1}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2} \, \mathfrak{t}_s \, \mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2} = \mathfrak{t}_{s'}, \quad \text{где} \quad s' = w_2 s w_2^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{u} \in \mathcal{U}_{w_1, w_2}$. Тогда

$$\underbrace{\mathfrak{t}_s \, \mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}(\mathfrak{u})}_{\in \mathcal{U}_{w_1^{-1}, w_2^{-1}}} = \underbrace{s((\delta^*(\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2))^{-1}}_{:= t \in T}(\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2))s^{-1} = t(\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2)s^{-1}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{w}^{-1}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2} \mathfrak{t}_s \mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}(\mathfrak{u}) \overset{\text{Сл. 2.4}}{=} \underbrace{\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1}, \dot{w}_2^{-1}} \mathfrak{t}_s \mathrm{w}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}(\mathfrak{u})}_{\in \mathcal{U}_{\dot{w}_1, \dot{w}_2}}$$

$$= \underbrace{(\delta^*(\dot{w}_1^{-1} t(\dot{w}_1 \mathfrak{u} \dot{w}_2) s^{-1} \dot{w}_2^{-1}))^{-1}(\dot{w}_1^{-1} t(\dot{w}_1}_{:= t_1 \in T} \, \mathfrak{u} \, \underbrace{\dot{w}_2) s^{-1} \dot{w}_2^{-1})}_{:= t_2 \in T}$$

$$= \underbrace{t_1 \mathfrak{u} t_2}_{\in \mathcal{U}} \overset{\text{Лем. 3.1}}{=} t_2^{-1} \mathfrak{u} t_2 = \mathfrak{t}_{s'}(\mathfrak{u}), \quad \text{где} \quad s' = t_2^{-1}.$$ □

Следствие 3.6. *Пусть* $s \in T$, $w \in W$. *Тогда*

(i) $\mathrm{w}^{-1}_{\dot{w}, \dot{e}} \, \mathfrak{t}_s \, \mathrm{w}_{\dot{w}, \dot{e}} = \mathfrak{t}_s$;

(ii) $\mathrm{w}^{-1}_{\dot{e}, \dot{w}} \, \mathfrak{t}_s \, \mathrm{w}_{\dot{e}, \dot{w}} = \mathfrak{t}_{wsw^{-1}}$.

Доказательство. Непосредственно вытекает из Предложения 3.5 при $w_1 = w$, $w_2 = e$ и $w_1 = e$, $w_2 = w$. □

3.3. Группа $\mathcal{N}$. Зафиксируем некоторое множество $\{\dot{w}\}_{w\in W}$ прообразов элементов группы Вейля, предполагая, что $\dot{e}$ – нейтральный элемент группы $N = N_G(T)$ и G. Положим

$$\mathcal{N} = \langle \mathcal{T}, \mathrm{w}_{\dot{w}_1,\dot{w}_2} \mid (w_1, w_2) \in W \times W\rangle \leqslant \mathrm{Cr}_m(K).$$

Ввиду Следствия 3.4, группа $\mathcal{T}$ не зависит от произвола выбора прообразов $\{\dot{w}\}_{w\in W}$. Далее, из Предложения 3.5 следует, что $\mathcal{T}$ является нормальной подгруппой $\mathcal{N}$. Ниже мы описываем более детально структуру группы $\mathcal{N}$. Положим

$$W_l = \langle \mathrm{w}_{\dot{w},\,\dot{e}} \mid w \in W\rangle, \quad W_r = \langle \mathrm{w}_{\dot{e},\,\dot{w}} \mid w \in W\rangle, \quad \mathcal{N}_r = \langle \mathcal{T}, W_r\rangle.$$

Предложение 3.7. *Имеют место следующие изоморфизмы*:
(i) $\mathcal{N} \approx W_l \times \mathcal{N}_r$;
(ii) $W_l \approx W$;
(iii) $\mathcal{N}_r/\mathcal{T} \approx W$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{e} \in \mathrm{Cr}_m(K)$ – нейтральный элемент группы Кремоны.

Лемма 3.8. $\mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\,\dot{w}_2} = \mathrm{e} \Leftrightarrow w_1 = w_2 = e,\ s \in T_Z.$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\,\dot{w}_2} = \mathrm{e} : \mathcal{U}_{w_1,\,w_2} \to \mathcal{U}_{w_1^{-1},\,w_2^{-1}}$. Так как $\mathcal{U}_{w_1,\,w_2}$ – непустое открытое подмножество в $\mathcal{U}$, то $\mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\,\dot{w}_2}$ – тождественное отображение на всем множестве $\mathcal{U}$. В частности, $\mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\,\dot{w}_2}(\dot{e}) = \dot{e}$ (нейтральный элемент $\dot{e}$ группы G содержится в $\mathcal{U} = U^-U$). Из равенства $\mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\,\dot{w}_2}(\dot{e}) = \dot{e}$ и определений отображений $\mathfrak{t}_s$, $\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\,\dot{w}_2}$ вытекает $w_1 = w$, $w_2 = w^{-1}$ для некоторого $w \in W$. Если $w \neq e$, то существует корневая подгруппа $U_\alpha \leqslant U \subset \mathcal{U}$, для которой $\mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\,\dot{w}_2}(U_\alpha) = U_{-\alpha} \neq U_\alpha$. Таким образом, $w = e$. Из определений отображений $\mathfrak{t}_s$, $\mathrm{w}_{\dot{e},\,\dot{e}}$ получим, что из равенства $\mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{e},\,\dot{e}} = \mathrm{e}$ следует $s \in T_Z$. □

(i) Из определения группы $\mathcal{N}$ и Предложения 3.3 следует, что $\mathcal{N} = \langle W_l, N_r\rangle$ и элементы группы W_l коммутируют с элементами группы N_r. Поэтому изоморфизм $\mathcal{N} \approx W_l \times \mathcal{N}_r$ следут из равентства $W_l \cap N_r = \mathrm{e}$. Пусть $\mathrm{w}_{\dot{w}_1,\,\dot{e}} = \mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{e},\,\dot{w}_2}$. Тогда $\mathfrak{t}_s\,\mathrm{w}_{\dot{w}_1^{-1},\,\dot{w}_2} = \mathrm{e}$. Из Леммы 3.8 получаем $w_1 = w_2 = e$, а значит, $w_{\dot{w}_1,\,\dot{e}} = \mathrm{e}$.

(ii) Отображение $\psi : W \to W_l$, определенное формулой $\phi(w) = \mathrm{w}_{\dot{w},\,\dot{e}}$, является изоморфизмом. Это следует из Предложения 3.1 и Леммы 3.8.

(iii) Отображение $\theta : \mathcal{N}_r \to W$, определенное формулой $\theta(\mathfrak{t}_s\, \mathrm{w}_{\dot e,\, \dot w}) = w$, является эпиморфизмом, ядро которого совпадает с подгруппой $\mathcal{T}$. Это следует из Леммы 3.8. $\square$

3.4. Доказательство Теоремы 1. Теперь мы покажем, что группа $\mathcal{N}$ частично действует на аффинном пространстве $\mathcal{U}$. Для любого $\mathfrak{u} \in \mathcal{U}$ мы определяем $\mathcal{N}(\mathfrak{u})$ как множество элементов из $\mathcal{N}$, регулярных в точке $\mathfrak{u}$. Тогда условия (i), (ii) и (iii) из Определения 1.1 очевидно выполнены. Из Предложения 2.3 и Следствия 2.4 мы получаем условие (iv):

$$\mathfrak{n}^{-1} \in \mathcal{N}(\mathfrak{n}(\mathfrak{u})) \ \text{ для любых } \ \mathfrak{n} \in \mathcal{N}(u).$$

Теперь мы можем доказать Теорему 1.

Доказательство. Импликация $\Leftarrow$ прямо следует из определения двойных смежных классов. Пусть $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \in \mathcal{U}$. Тогда

$$\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \in N\mathfrak{u}N \overset{(2.1)}{\Leftrightarrow} n_1\mathfrak{u}_1 n_2 = \mathfrak{u}_2 \quad \text{для некоторых } \ n_1, n_2 \in N.$$

Пусть $n_1\mathfrak{u}_1 n_2 = \mathfrak{u}_2$. Тогда $n_1 = t_1\dot w_1$, $n_2 = \dot w_2 t_2$ для некоторых $t_1, t_2 \in T$. Так как $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \in \mathcal{U}$, то $\mathfrak{u}_1 \in \mathcal{U}_{w_1,w_2}$. Получаем

$$n_1\mathfrak{u}_1 n_2 = t_1\dot w_1\mathfrak{u}_1\dot w_2 t_2 = \underbrace{t_1(\delta^*(\dot w_1\mathfrak{u}_1\dot w_2))}_{:=t_1'\in T}\ \underbrace{\mathrm{w}_{\dot w_1,\dot w_2}(\mathfrak{u}_1)}_{\in\mathcal{U}}\, t_2 = \mathfrak{u}_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{Лем. 3.1}}{\Rightarrow} t_1' t_2 = 1 \ \Rightarrow\ u_2 = \mathfrak{t}_s \mathrm{w}_{w_1,w_2}(\mathfrak{u}_1), \quad \text{где } \ s = t_2^{-1}. \qquad \square$$

§4. Пример. Случай $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

4.1. **Группа $\mathcal{N}$.** Пусть $G = \mathrm{SL}_2(K)$. Тогда

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1+\alpha\beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in K \right\}.$$

Здесь $W = \{e, w\}$ – группа из двух элементов: нейтрального элемента e и инволюции w. Положим

$$\dot e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{w}_{\dot{w},\dot{e}}\left(\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \beta & 1+\alpha\beta\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\beta^{-1} & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 1+\alpha\beta\\ -1 & -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \beta^{-1}(1+\alpha\beta)\\ -\beta & -\alpha\beta\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{w}_{\dot{e},\dot{w}}\left(\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \beta & 1+\alpha\beta\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-\alpha^{-1} & 0\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha & 1\\ -(1+\alpha\beta) & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\alpha^{-1}\\ \alpha(1+\alpha\beta) & -\alpha\beta\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_{\dot{w},\dot{w}}\left(\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \beta & 1+\alpha\beta\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}-(1+\alpha\beta)^{-1} & 0\\ 0 & -(1+\alpha\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-(1+\alpha\beta) & \beta\\ \alpha & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & -\beta(1+\alpha\beta)^{-1}\\ -\alpha(1+\alpha\beta) & (1+\alpha\beta)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Легко проверить, что $\mathrm{w}_{\dot{e},\dot{w}}\mathrm{w}_{\dot{w},\dot{e}}=\mathrm{w}_{\dot{w},\dot{e}}\mathrm{w}_{\dot{e},\dot{w}}=\mathrm{w}_{\dot{w},\dot{w}}$ и $\mathrm{w}^2_{\dot{e},\dot{w}}=\mathrm{w}^2_{\dot{w},\dot{e}}=\mathrm{w}_{\dot{e},\dot{e}}=\mathrm{e}$ (здесь e – нейтральный элемент $\mathrm{Cr}_2(K)$). Положим

$$\mathrm{w}_l:=\mathrm{w}_{\dot{w},\dot{e}},\quad \mathrm{w}_r:=\mathrm{w}_{\dot{e},\dot{w}},\quad \mathrm{w}_d:=\mathrm{w}_{\dot{w},\dot{w}}.$$

Таким образом, $\mathrm{w}_l,\mathrm{w}_r,\mathrm{w}_d\in\mathrm{Cr}_2(K)$ – бирациональные преобразования аффинного пространства $A^2_K=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\in K\}$. А именно,

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_l((\alpha,\beta))&=(\beta^{-1}(1+\alpha\beta),-\beta),\\ \mathrm{w}_r((\alpha,\beta))&=(-\alpha^{-1},\alpha(1+\alpha\beta)),\\ \mathrm{w}_d((\alpha,\beta))&=(-\beta(1+\alpha\beta)^{-1},-\alpha(1+\alpha\beta)).\end{aligned}$$

Элемент $\mathfrak{t}_s\in\mathcal{T}\leqslant\mathrm{Cr}_2(K)$ действует на A^2_K по формуле

$$\mathfrak{t}_s((\alpha,\beta))=(s^2\alpha,s^{-2}\beta).$$

4.2. **Разложение A^2_K.** Пусть

$$\mathcal{M}=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\neq0,\ \beta\neq0,\ \alpha\beta\neq-1\}.$$

Лемма 4.1. *Любой элемент $g\in\mathcal{N}$ стабилизирует открытое множество $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Мы должны проверить, что если $(\alpha,\beta)\in\mathcal{M}$, то $g((\alpha,\beta))\in\mathcal{M}$, если $g=\mathfrak{t}_s,\mathrm{w}_l,\mathrm{w}_r$. Для $\mathfrak{t}_s$ – это очевидно. Далее,

$$\mathrm{w}_l((\alpha,\beta))=(\underbrace{\beta^{-1}(1+\alpha\beta)}_{=\alpha'\neq0},\ \underbrace{-\beta}_{=\beta'\neq0}),\quad \mathrm{w}_r((\alpha,\beta))=(\underbrace{-\alpha^{-1}}_{=\alpha'\neq0},\underbrace{\alpha(1+\alpha\beta)}_{=\beta'\neq0}).$$

В обоих случаях $\alpha'\beta'=-(1+\alpha\beta)$. Отсюда $(1+\alpha'\beta')=-\alpha\beta\neq0$ и

$$\mathrm{w}_l((\alpha,\beta)),\ \mathrm{w}_r((\alpha,\beta))\in\mathcal{M}.$$

□

Пусть $\mathcal{M}_{0,1} = \{(0,\beta) \mid \beta \neq 0\}$, $\mathcal{M}_{1,0} = \{(\alpha,0) \mid \alpha \neq 0\}$ и $\mathcal{M}_{-1} = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha\beta = -1\}$. Из определения w_l, w_r, w_d получаем следующие формулы

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}_l(\mathcal{M}_{0,1}) &= \{(\beta^{-1}, -\beta) \mid \beta \neq 0\} = \mathcal{M}_{-1},\\
\mathrm{w}_l(\mathcal{M}_{-1}) &= \{(0, -\beta) \mid \beta \neq 0\} = \mathcal{M}_{0,1},\\
\mathrm{w}_r(\mathcal{M}_{1,0}) &= \{(-\alpha^{-1}, \alpha) \mid \alpha \neq 0\} = \mathcal{M}_{-1},\\
\mathrm{w}_r(\mathcal{M}_{-1}) &= \{(-\alpha^{-1}, 0) \mid \alpha \neq 0\} = \mathcal{M}_{1,0},\\
\mathrm{w}_d(\mathcal{M}_{1,0}) &= \mathcal{M}_{0,1}, \quad \mathrm{w}_d(\mathcal{M}_{0,1}) = \mathcal{M}_{1,0}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Лемма 4.2. *Множество* $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_{0,1} \cup \mathcal{M}_{1,0} \cup \mathcal{M}_{-1}$ *является* $\mathcal{N}$*-орбитой. Точку* $(0,1)$ *можно взять как представителя этой орбиты.*

Доказательство. Так как K – алгебраически замкнутое поле, то множества $\mathcal{M}_{0,1}$, $\mathcal{M}_{1,0}$, $\mathcal{M}_{-1}$ – три $\mathcal{T}$-орбиты точек $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,-1)$ соответственно. Но эти точки лежат в одной $\mathcal{N}$-орбите (это следует из 4.1). □

4.3. **Представители $\mathcal{N}$-орбит на $A^2_K = \mathcal{M} \cup \tilde{\mathcal{M}} \cup \{(0,0)\}$.** Пусть

$$\mathcal{M}^1 := \{(\alpha,1) \mid \alpha \neq 0, -1\} \subset \mathcal{M}.$$

Лемма 4.3. *Если* $(\alpha',\beta') \in \mathcal{M}$*, то существует элемент* $(\alpha,1) \in \mathcal{M}^1$*, принадлежащий той же орбите* (α',β')*.*

Доказательство. Имеем $\mathrm{t}_s((\alpha',\beta')) = (s^2\alpha', s^{-2}\beta')$. Так как K – алгебраически замкнутое поле, то мы можем найти такой элемент $s \in K$, что $s^{-2}\beta' = 1$. Следовательно, в каждой $\mathcal{N}$-орбите множества $\mathcal{M}$ найдется элемент вида $(\alpha',1)$. □

Лемма 4.4. *Элементы* $(\alpha,1) \neq (\alpha',1) \in \mathcal{M}^1$ *принадлежат одной и той же* $\mathcal{N}$*-орбите тогда и только тогда, когда* $\alpha' = -1-\alpha$*.*

Доказательство. Элементы $(\alpha,1), (\alpha',1) \in \mathcal{M}^1$ принадлежат одной и той же $\mathcal{N}$-орбите тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{t}_s\mathrm{w}((\alpha,1)) = (\alpha',1) \tag{4.2}$$

для некоторых $s = s(\alpha,\mathrm{w}) \in K^*$ и $\mathrm{w} = \mathrm{e}, \mathrm{w}_l, \mathrm{w}_r, \mathrm{w}_d$ (это следует из Предложения 3.7). Далее,

$$\mathrm{t}_s\mathrm{e}((\alpha,1)) = \mathrm{t}_s((\alpha,1)) \in \mathcal{M}^1 \Leftrightarrow \mathrm{t}_s = \mathrm{e} \Leftrightarrow \alpha' = \alpha.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_l((\alpha,1)) &= ((1+\alpha),-1),\\ \mathrm{w}_r((\alpha,1)) &= (-\alpha^{-1},\alpha(1+\alpha)),\\ \mathrm{w}_d((\alpha,1)) &= (-(1+\alpha)^{-1},-\alpha(1+\alpha)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для $\mathrm{w}=\mathrm{w}_l$ или $\mathrm{w}=\mathrm{w}_r$ или $\mathrm{w}=\mathrm{w}_d$ и для зафиксированного α существует такой единственный элемент $\mathfrak{t}_s$, что $\mathfrak{t}_s\mathrm{w}((\alpha,1))\in\mathcal{M}^1$. Из (4.3) следует

$$s=\begin{cases}\sqrt{-1} & \text{при}\ \ \mathrm{w}=\mathrm{w}_l,\\ \sqrt{\alpha(1+\alpha)} & \text{при}\ \ \mathrm{w}=\mathrm{w}_r,\\ \sqrt{-\alpha(1+\alpha)} & \text{при}\ \ \mathrm{w}=\mathrm{w}_d\end{cases} \tag{4.4}$$

(напомним, что $\mathfrak{t}_s((\alpha,\beta))=(s^2\alpha,s^{-2}\beta)$ и следовательно, $\mathfrak{t}_{s_1}=\mathfrak{t}_{s_2}$ тогда и только тогда, когда $s_1=\pm s_2$). Из (4.3), (4.4) для соответствующих s получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_s\mathrm{w}_l((\alpha,1)) &= (-(1+\alpha),1),\\ \mathfrak{t}_s\mathrm{w}_r((\alpha,1)) &= (-(1+\alpha),1),\\ \mathfrak{t}_s\mathrm{w}_d((\alpha,1)) &= (\alpha,1). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Теперь утверждение леммы следует из (4.2) и (4.5). □

Пусть $\flat: K\to K$ – отображение, определенное по формуле

$$\flat(\alpha)=-1-\alpha$$

для всех $\alpha\in K$. Тогда $\flat^2$ – тождественное отображение поля K и, если $\operatorname{char}K\neq 2$, то существует единственный элемент α, что $\flat(\alpha)=\alpha$, а именно $\alpha=-\frac{1}{2}$. Тогда мы можем разложить $K=K_\flat^-\cup K_\flat$ в объединение двух непересекающихся подмножеств $K_\flat^-$, $K_\flat$, где $-\frac{1}{2},0\in K_\flat$ и если $-\frac{1}{2}\neq\alpha\in K_\flat$, то $\flat(\alpha)\in K_\flat^-$. Теперь зафиксируем разложение $K=K_\flat^-\cup K_\flat$. Положим

$$\Omega_K:=\{(\alpha,1)\}_{\alpha\in K_\delta}\cup\{(0,0)\}.$$

Теорема 4.5. *Пусть* $\operatorname{char}K\neq 2$. *Тогда множество* Ω_K *– это наименьшее множество представителей* $\mathcal{N}$*-орбит* A_K^2.

Доказательство. Пусть $(\alpha,\beta)\in A_K^2$ и пусть $O_{\alpha,\beta}$ – $\mathcal{N}$-орбита (α,β). Предположим, что $(\alpha,\beta)\in\mathcal{M}$. Тогда $O_{\alpha,\beta}=O_{\alpha',1}$, где $\alpha'\in K_\flat^+$ (см. леммы 4.3, 4.4). Более того, из определения $K_\flat$ и леммы 4.4 получаем, что такой элемент $\alpha'\in K_\flat$ единственный. Предположим, что $(\alpha,\beta)\in$

$\tilde{\mathcal{M}}$, тогда $O_{\alpha,\beta} = \tilde{\mathcal{M}}$ и мы можем взять представителя $(0,1) \in \Omega_K$ этой орбиты (Лемма 4.2). Заметим, что только элементы вида $\mathfrak{t}_s$ и $\mathfrak{t}_s \mathrm{w}_d$ регулярны в точке $(0,0)$ и в этих случаях точка $(0,0)$ инвариантна. Таким образом, множество $\{(0,0)\}$ – это одна $\mathcal{N}$-орбита. $\square$

Из теоремы 1 и (4.4) получаем

Следствие 4.6. $\mathrm{SL}_2(K) = N \cup \big(\bigcup\limits_{\alpha \in K_\flat} N g_\alpha N \big)$ *с* $g_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$.

Из Следствия 4.6 (см. Введение) получаем

Следствие 4.7. *Множество пар* $\{(T,T)\} \cup \{(g_\alpha T g_\alpha^{-1}, T)\}_{\alpha \in K_\flat}$ *– минимальное множество представителей орбит пар торов из* $G \times G$ *при сопряжении элементами из* G.

4.4. **Случай** $K = \mathbb{C}$**.** Пусть

$$\mathcal{K} = \left\{ z = a + bi \in \mathbb{C} \mid a \geqslant \frac{1}{2} \right\} \Big\backslash \left\{ z = -\frac{1}{2} + bi \in \mathbb{C} \mid b < 0 \right\}.$$

Лемма 4.8. $\mathcal{K} = \mathbb{C}_\flat$.

Доказательство. Имеем $-\frac{1}{2}, 0 \in \mathcal{K}$. Пусть $z = a + bi \in \mathcal{K}$. Если $a \neq -\frac{1}{2}$, то

$$\flat(z) = \underbrace{(-1-a)}_{<-\frac{1}{2}} - bi \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}.$$

Если $a = -\frac{1}{2}$ и $z \neq -\frac{1}{2}$, то $b > 0$ и следовательно,

$$\flat(z) = -\frac{1}{2} \underbrace{-b}_{<0} i \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}. \qquad \square$$

4.5. **Орбиты пар полупростых матриц.** Пусть

$$U^w := \dot{w} U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Big|\; \beta \in K \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{pmatrix} \;\Big|\; \beta \in K \right\}.$$

Имеем

$$G = \dot{w} G = \dot{w} B \cup \dot{w} B \dot{w}^{-1} B = T \dot{w} U \cup \underbrace{(\dot{w} U \dot{w}^{-1})}_{=U^-} U T = T (U^w \cup \mathcal{U}) T.$$

Очевидно, что для всех $v \in U^w$ и $t_1, t_2 \in T$ из выражения $t_1 v t_2 \in U^w$ получаем $t_1 = t_2$. Отсюда следует, что только две $T \times T$-орбиты пересекают U^w – орбита матрицы $\dot{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и орбита матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

По Лемме 3.1 для $\mathfrak{u} \in \mathcal{U}$ получаем включение $t_1 \mathfrak{u} t_2 \in \mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда $t_2 = t_1^{-1}$. Следовательно, минимальное множество представителей двойных смежных классов TgT группы G – это

$$\underbrace{\{g_\alpha\}_{\alpha \in K}}_{\approx A_K^1} \bigcup \Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\ \dot{w}(1)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\dot{w}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\ u(1)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\dot{e}} \Bigg\}. \tag{4.6}$$

Пусть $t = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} g_\alpha t g_\alpha^{-1} &= \begin{pmatrix} s + \alpha(s - s^{-1}) & \alpha(s^{-1} - s) \\ (1+\alpha)(s - s^{-1}) & s^{-1} + \alpha(s^{-1} - s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s + \alpha\Delta_t & -\alpha\Delta_t \\ (1+\alpha)\Delta_t & s^{-1} + \alpha\Delta_t \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\Delta_t = s - s^{-1}$. Заметим, что данный элемент $\Delta_t \in K$ соответствует только матрицам t и $\bar{t} = \begin{pmatrix} -s^{-1} & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}$. Теперь пусть $t' = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$. Предположим, что $s, r \neq \pm 1$. Тогда централизаторы матриц t и t' принадлежат T. Из (4.6) следует, что наименьшее множество представителей G-орбит (относительно сопряжений) из $C_t \times C_{t'}$, где C_t, $C_{t'}$ – классы сопряженности элементов t, t' соответственно, состоит из следующих пар

$$(g_\alpha t g_\alpha^{-1}, t') \ \text{ с } \ \alpha \in K,$$
$$(\dot{w}(1) t \dot{w}(1)^{-1}, t'), \ \ (\dot{w} t \dot{w}^{-1}, t'), \ \ (u(1) t u(1)^{-1}, t'), \ \ (t, t').$$

Отсюда получаем следующее

Предложение 4.9. *Пусть $t, t' \in T$, где $t, t' \neq \pm\dot{e}$, и пусть C_t и $C_{t'}$ – оответствующие классы сопряженности. Тогда существуют только следующие G-орбиты на $C_t \times C_{t'}$:*

$$\mathcal{O}_\alpha := \left\{ A \left(\begin{pmatrix} s + \alpha\Delta_t & -\alpha\Delta_t \\ (1+\alpha)\Delta_t & s^{-1} - \alpha\Delta_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \right) A^{-1} \;\Big|\; \alpha \in K, \ A \in \mathrm{SL}_2(K) \right\}$$

(*орбита* $(g_\alpha t g_\alpha^{-1}, t')_{\alpha \in K}$);

$$\mathcal{O}_U^+ := \left\{ A \left(\begin{pmatrix} s & \Delta_t \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \right) A^{-1} \;\Big|\; \alpha \in K, \ A \in \mathrm{SL}_2(K) \right\}$$

(*орбита* $(u(1)tu(1)^{-1}, t')$);

$$\mathcal{O}_V^- := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ \Delta_t & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}\right) A^{-1} \;\Big|\; \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K) \right\}$$

(*орбита* $(\dot{w}(1)t\dot{w}(1)^{-1}, t')$);

$$\mathcal{O}_T^+ := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}\right) A^{-1} \;\Big|\; \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K) \right\}$$

(*орбита* (t, t'));

$$\mathcal{O}_T^- := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}\right) A^{-1} \;\Big|\; \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K) \right\}$$

(*орбита* $(\dot{w}t\dot{w}^{-1}, t')$);

Примыкание орбит. Рассмотрим примыкание G-орбит (в топологии Зарисского) на $C_t \times C_{t'}$. Заметим, что инвариантная алгебра $\mathrm{M}_2(K) \times \mathrm{M}_2(K)$, соответствующая действию сопряжениями из $\mathrm{SL}_2(K)$, порождается $\mathrm{tr}X$, $\mathrm{tr}\,X^2$, $\mathrm{tr}Y$, $\mathrm{tr}\,Y^2$, $\mathrm{tr}XY$, где $(X, Y) \in \mathrm{M}_2(K) \times \mathrm{M}_2(K)$ (см., например, [6], 9.5). Алгебраический фактор $\mathrm{M}_2(K) \times \mathrm{M}_2(K)/\mathrm{SL}_2(K)$ изоморфен A_K^5. Отсюда получаем фактор-отображение $\pi : \mathrm{M}_2(K) \times \mathrm{M}_2(K) \to A_K^5$, где $\pi : (X, Y) \to (\mathrm{tr}X, \mathrm{tr}\,X^2, \mathrm{tr}XY, \mathrm{tr}Y, \mathrm{tr}\,Y^2)$. В каждом слое этого отображения существует только одна замкнутая орбита.

Теперь мы рассмотрим ограничение $\pi_{t,t'}$ на замкнутое подмножество $C_t \times C_{t'} \subset \mathrm{M}_2(K) \times \mathrm{M}_2(K)$ (напомним, что класс сопряженности полупростого элемента – это замкнутое подмножество $\mathrm{M}_2(K)$). Так как $\mathrm{tr}X$, $\mathrm{tr}\,X^2$, $\mathrm{tr}Y$, $\mathrm{tr}\,Y^2$ – константы на $C_t \times C_{t'}$, то мы можем рассматривать отображение $\pi_{t,t'}$ как

$$\pi_{t,t'} \;:\; C_t \times C_{t'} \to A_K^1 = K, \quad \text{где} \quad \pi_{t,t'}((X, Y)) = \mathrm{tr}(XY).$$

Каждый слой $\pi_{t,t'}$ содержит только одну замкнутую G-орбиту в $C_t \times C_{t'}$. Также, каждый слой $\pi_{t,t'}$ имеет размерность $\geqslant 3$ (действительно, $\dim C_t \times C_{t'} - \dim \mathrm{Im}\, \pi_{t,t'} = 3$).

Рассмотрим орбиту вида $\mathcal{O}_\alpha$. Пусть $(X_\alpha, Y) \in \mathcal{O}_\alpha$ – представитель, указанный в Предложении 4.9 (здесь $X_\alpha = g_\alpha t g_\alpha^{-1}$, $Y = t'$). Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(X_\alpha Y) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} s + \alpha\Delta_t & -\alpha\Delta_t \\ (1+\alpha)\Delta_t & s^{-1} - \alpha\Delta_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}\right) \\ &= sr + s^{-1}r^{-1} + \alpha\Delta_t\Delta_{t'}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Далее, для любого $a \in K$

$$\operatorname{tr}(XY) = \begin{cases} sr + s^{-1}r^{-1}, & \text{если } X = \begin{pmatrix} s & a \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & 0 \\ a & s^{-1} \end{pmatrix}, \\ s^{-1}r + sr^{-1}, & \text{если } X = \begin{pmatrix} s^{-1} & a \\ 0 & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ a & s \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Заметим, что

$$(sr + s^{-1}r^{-1}) - (s^{-1}r + sr^{-1}) = (s - s^{-1})(r - r^{-1}) = \Delta_t \Delta_{t'} \neq 0.$$

Следовательно,

$$sr + s^{-1}r^{-1} + \underbrace{(-1)}_{=\alpha} \Delta_t \Delta_{t'} = (s^{-1}r + sr^{-1}). \tag{4.10}$$

Пусть $\alpha \neq 0, -1$. Из (4.8), (4.10) получаем, что

$$\operatorname{tr}(X_\alpha Y) \neq sr + s^{-1}r^{-1},\ s^{-1}r + sr^{-1}. \tag{4.11}$$

Теперь из (4.9) и (4.11) получаем, что G-орбиты $\mathcal{O}_U^+$, $\mathcal{O}_T^+$, $\mathcal{O}_V^-$, $\mathcal{O}_T^-$ не могут лежать в том же слое $\pi_{t,t'}$, что содержит (X_α, Y). Так как стабилизатор (X_α, Y) равен $\{\pm\dot{e}\}$, то размерность G-орбиты равна 3. Отсюда следует, что орбита (X_α, Y) замкнута и совпадает со слоем $\pi_{t,t'}$, содержащим (X_α, Y).

Рассмотрим орбиты $\mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_U^+$. Обе орбиты имеют размерность 3 и принадлежат слою $\pi^{-1}(sr + s^{-1}r^{-1})$, см. (4.9). Более того, в том же слое лежит 2-мерная орбита $\mathcal{O}_T^+$ и

$$\overline{\mathcal{O}_0} \setminus \mathcal{O}_0 = \overline{\mathcal{O}_U^+} \setminus \mathcal{O}_U^+ = \mathcal{O}_T^+.$$

Действительно, для любых зафиксированных $0 \neq a, b \in K$ получаем

$$\overline{\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \neq c \in K \right\}} \Big\backslash \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \neq c \in K \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\}$$

(здесь $\overline{X}$ – замыкание X в топологии Зарисского). То же выполняется и для нижнетреугольных матриц.

Для $\mathcal{O}_{-1}$, $\mathcal{O}_V^-$, $\mathcal{O}_T^-$ получаем аналогичный результат.

Теперь мы обобщим факты о прикосновении орбит.

Предложение 4.10. (i) *Орбиты* $\mathcal{O}_\alpha$, *где* $\alpha \neq 0, -1$ – *замкнутые* 3-*мерные* G-*орбиты, совпадающие со слоями* $\pi^{-1}_{t,t'}(l_\alpha)$ *для*

$$l_\alpha = \mathrm{tr}(X_\alpha Y) = sr + s^{-1}r^{-1} + \alpha\Delta_t\Delta_{t'} \neq sr + s^{-1}r^{-1},\ s^{-1}r + sr^{-1}.$$

(ii) *Слой* $\pi^{-1}_{t,t'}(l_0)$, *где* $l_0 = sr+s^{-1}r^{-1}$, *состоит из двух* 3-*мерных орбит*

$$\mathcal{O}_0 := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ \Delta_t & s^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}\right) A^{-1} \,\middle|\, \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K)\right\},$$

$$\mathcal{O}_U^+ := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s & -\Delta_t \\ 0 & s^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}\right) A^{-1} \,\middle|\, \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K)\right\}$$

и замкнутой 2-*мерной орбиты*

$$\mathcal{O}_T^+ := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}\right) A^{-1} \,\middle|\, \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K)\right\},$$

которая совпадает с $\bar{\mathcal{O}}_0 \cap \bar{\mathcal{O}}_U^+$.

(iii) *Слой* $\pi^{-1}_{t,t'}(l_{-1})$, *где* $l_{-1} = \mathrm{tr}(X_{-1}Y) = s^{-1}r + sr^{-1}$ *состоит из двух* 3-*мерных орбит*

$$\mathcal{O}_{-1} := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s^{-1} & \Delta_t \\ 0 & s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}\right) A^{-1} \,\middle|\, \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K)\right\},$$

$$\mathcal{O}_V^- := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ \Delta_t & s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}\right) A^{-1} \,\middle|\, \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K)\right\}$$

и замкнутой 2-*мерной орбиты*

$$\mathcal{O}_T^- := \left\{ A\left(\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}\right) A^{-1} \,\middle|\, \alpha \in K,\ A \in \mathrm{SL}_2(K)\right\},$$

которая совпадает с $\bar{\mathcal{O}}_{-1} \cap \bar{\mathcal{O}}_V^-$.

Список литературы

1. N. Gordeev, E. Egorchenkova, *Double cosets NgN of normalizers of maximal tori of simple algebraic groups and orbits of partial actions of Cremona subgroups.* —`arXiv:2112.06332 [math.AG] (https://arxiv.org/abs/2112.06332v1)`.
2. F. Abadie, *Partial actions and grouppoids.* — Proc. Amer. Math. Soc. **132**, No. 4, 1037–1047.
3. E. Ellers, N. Gordeev, *Intersection of Conjugacy Classes of Chevalley Groups with Gauss Cell.* — J. Algebra **220** (1999), 591–611.
4. R. Exel, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups.* — Proc. Amer. Math. Soc. **126**, No. 12 (1998), 3481–3494.
5. Jean-Pierre Serre, *Le groupe de Cremona e ses sous-groups finis.* — Seminaire BOURBAKI **61**, 2008–2009, No. 1000, 1–23.

6. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов.* — Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техники. Серия Соврем. пробл. матем. Фундам. направления **55**, ВИНИТИ, Москва, 1989, 137–309.

Gordeev N. L., Egorchenkova E. A. Double cosets NgN of normalizers of maximal tori of simple algebraic groups and orbits of partial actions of Cremona subgroups.

Let G be a simple algebraic group over an algebraically closed field K and let $N = N_G(T)$ be the normalizer of a fixed maximal torus $T \leqslant G$. Further, let U be the unipotent radical of a fixed Borel subgroup B that contains T and let U^- be the unipotent radical of the opposite Borel subgroup B^-. The Bruhat decomposition implies the decomposition $G = NU^-UN$. The Zariski closed subset $U^-U \subset G$ is isomorphic to the affine space A_K^m where $m = \dim G - \dim T$ is the number of roots in the corresponding root system. Here we construct a subgroup $\mathcal{N} \leqslant \mathrm{Cr}_m(K)$ that "acts partially" on $A_K^m \approx \mathcal{U}$ and we show that there is one-to-one correspondence between the orbits of such a partial action and the set of double cosets $\{NgN\}$. Here we also calculate the set $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subset \mathcal{U}$ in the simplest case $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Факультет математики
Российского Государственного
Педагогического Университета
им. А. И. Герцена,
Мойка 48, 191186, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nickgordeev@mail.ru
E-mail: e-egorchenkova92@mail.ru

Поступило 11 октября 2022 г.