Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

А. А. Хартов

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛОГАРИФМА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКАХ

§1. Введение

Пусть F — функция распределения (ф.р.) произвольного вероятностного закона на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Пусть f соответствующая ей характеристическая функция (х.ф.), т.е.

$$f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f(0) = 1$.

Напомним, что ф.р. F называется *безгранично делимой*, если для любого целого положительного n существует такая ф.р. F_n, что $F = F_n^{*n}$, т.е. F является n-кратной сверткой F_n. Хорошо известно, что ф.р. F является безгранично делимой тогда и только тогда, когда $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, и справедлива *формула Леви–Хинчина*

$$\operatorname{Ln} f(t) = i\gamma t + \int\limits_{\mathbb{R}} \big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG(x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с некоторой константой $\gamma \in \mathbb{R}$, константой $\tau > 0$ и некоторой неубывающей функцией G ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ (всегда полагаем ее непрерывной справа в каждой точке, и $G(-\infty) = 0$). Функция $x \mapsto \frac{it}{\tau}\sin(\tau x)$, $x \in \mathbb{R}$, выбрана нами в качестве центрирующей в интеграле (здесь мы следуем Золотареву [1]). Параметр $\tau > 0$ можно фиксировать произвольно, при этом может измениться лишь γ. Здесь и далее $\operatorname{Ln} f(t) = \ln|f(t)| + i\operatorname{Arg} f(t)$ обозначает значение логарифма $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в котором аргумент $\operatorname{Arg} f$ однозначно определен по непрерывности с условием $\operatorname{Arg} f(0) = 0$. Как известно, соответствие между

Ключевые слова: характеристические функции, формула Леви–Хинчина, безгранично делимые распределения, квазибезгранично делимые распределения.

Данная работа была поддержана Санкт-Петербургским международным математическим институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение No. 075-15-2019-1620 от 08.11.2019 и 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

безгранично делимыми ф.р. F и парами (γ, G) при фиксированном $\tau > 0$ взаимно однозначно.

Заметим, что к настоящему моменту доказано существование таких ф.р., которые не являются безгранично делимыми, но при этом их х.ф. не обращаются в нуль на $\mathbb{R}$, а для логарифмов этих х.ф. справедлива формула (1) с немонотонными функциями G. Дадим точные определения. Будем называть ф.р. F *рационально безгранично делимой*, если найдутся такие безгранично делимые ф.р. F_1 и F_2, что $F_1 = F * F_2$. В терминах х.ф. это равенство можно записать в следующей форме: $f(t) = f_1(t)/f_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где f_1 и f_2 обозначают х.ф. для F_1 и F_2 соответственно. Несложно показать, что при этом $\operatorname{Ln} f(t) = \operatorname{Ln} f_1(t) - \operatorname{Ln} f_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и верна формула (1) с $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ и $G = G_1 - G_2$, где (γ_1, G_1) и (γ_2, G_2) обозначают пары для F_1 и F_2. Здесь G имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ (причем G, вообще говоря, немонотонна), непрерывна справа в каждой точке, и $G(-\infty) = 0$. Класс всех вещественнозначных функций на $\mathbb{R}$ с такими свойствами будем обозначать символом $\boldsymbol{V}$. Пара (γ, G) с $\gamma \in \mathbb{R}$ и $G \in \boldsymbol{V}$ однозначно определяется по F при при фиксированном $\tau > 0$. Пусть теперь для х.ф. f справедлива формула (1) с некоторыми $\gamma \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ и некоторой функцией $G \in \boldsymbol{V}$. В этом случае соответствующую ф.р. F называют *квазибезгранично делимой* (см. [14]). Тогда, в силу разложения Хана–Жордана для G, х.ф. f будет соответствовать рационально безгранично делимой ф.р. F. Итак, класс всех рационально безгранично делимых ф.р. и класс всех квазибезгранично делимых ф.р. совпадают. В статье мы будем использовать первое из этих названий и обозначать данный класс символом $\boldsymbol{Q}$. Более подробное обсуждение разных форм определения данного класса и его свойств можно найти в статье [14], которая является первой обстоятельной работой по данной теме. Отметим, что класс $\boldsymbol{Q}$ сейчас активно изучается (см. [5–7, 11, 13] и ссылки в них) и уже находит свои применения в различных областях (см., например, [8, 9, 15–18]).

К настоящему моменту уже стало понятным, что класс $\boldsymbol{Q}$ рационально безгранично делимых ф.р. является очень существенным расширением класса безгранично делимых, оставаясь при этом, конечно, собственным подклассом семейства всех ф.р. В связи с этим возникает общий вопрос: может ли логарифм х.ф. f для *произвольной* ф.р. допускать представление подобное (1) на множествах t, где $f(t) \neq 0$, с некоторыми условиями на функцию G и интеграл по ней? Получение полного ответа на данный вопрос требует, по всей видимости, широкого и глубокого анализа. В данной работе мы лишь частично рассматрим этот вопрос, а именно мы покажем, что формула (1) с некоторыми $\gamma \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ и $G \in \boldsymbol{V}$ действительно имеет место для логарифма х.ф. f совершенно произвольной ф.р. при всех t из любого отрезка вида $[-r, r]$, $0 < r < \infty$, где $f(t) \neq 0$. Здесь, однако, функция G, вообще говоря, зависит от r. Формулировка и доказательство этого результата, а также замечания к нему, приводятся в следующем пункте статьи. В третьем пункте на основе указанных представлений мы построим критерий принадлежности произвольной ф.р. F к классу $\boldsymbol{Q}$.

В статье, помимо уже принятых, будут использоваться следующие обозначения. Символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}$ обозначают соответственно множества натуральных, целых и комплексных чисел. Для числовой последовательности $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ запись $r_n \uparrow \infty$ означает, что r_n стремится к бесконечности, причем $r_{n+1} \geqslant r_n$, $n \in \mathbb{N}$. Под символом $\|G\|$ для функции G ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ (например, из $\boldsymbol{V}$) мы всегда будем понимать полную вариацию G на $\mathbb{R}$.

§2. Представление логарифма характеристической функции

Пусть задана произвольная ф.р. F на $\mathbb{R}$ с х.ф. f.

Теорема 1. *Пусть $f(t) \neq 0$ при $t \in [-r, r]$ с заданным конечным $r > 0$. Тогда*

$$\operatorname{Ln} f(t) = itC_r + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\Lambda_r(x), \quad \text{для всех} \quad t \in [-r, r], \tag{2}$$

с некоторыми $C_r \in \mathbb{R}$ и $\Lambda_r \in \boldsymbol{V}$, которые могут зависеть от r.

Сначала приведем следствия, замечания и комментарии к теореме 1.

В формуле (2) существенным является представление через интеграл Фурье–Стилтьеса, т.к. не любая непрерывная функция (без предположений о ее гладкости) это допускает (см. [2]). В компоненте $t \mapsto itC_r$ константу C_r можно изменить на любую другую C_r', при этом разность $t \mapsto it(C_r - C_r')$ можно гладко доопределить на отрезок $[-2r, 2r]$ и представить абсолютно сходящимся рядом Фурье с таким отрезком периода. Далее такой ряд можно представить через интеграл Фурье–Стилтьеса по функции скачков (из класса $\boldsymbol{V}$) и включить в интегральную компоненту (2).

Замечания выше также показывают, что C_r и Λ_r в (2) определяются по f неоднозначно.

Ниже представим логарифм х.ф. f в форме Леви–Хинчина (1).

Следствие 1. *Пусть $f(t) \neq 0$ при $t \in [-r, r]$ с заданным конечным $r > 0$. Тогда при любом фиксированном $\tau \in (0, r]$*

$$\operatorname{Ln} f(t) = i\gamma t + \int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\bigr)\tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG_r(x), \qquad \textit{для всех} \quad t \in [-r, r], \tag{3}$$

с некоторыми $\gamma \in \mathbb{R}$ и $G_r \in \boldsymbol{V}$. При этом γ зависит лишь от выбора τ, а G_r зависит лишь от r.

Действительно, $\operatorname{Ln} f(0) = 0$, и поэтому $\int\limits_{\mathbb{R}} d\Lambda_r(x) = 0$. Тогда запишем

$$\operatorname{Ln} f(t) = itC_r + \int\limits_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1)\, d\Lambda_r(x), \quad t \in [-r, r].$$

Далее зафиксируем $\tau \in (0, r]$ и определим

$$\gamma := \tfrac{\operatorname{Arg} f(\tau)}{\tau} = C_r + \tfrac{1}{\tau}\int\limits_{\mathbb{R}} \sin(\tau x)\, d\Lambda_r(x).$$

Тогда для всех $t \in [-r, r]$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln} f(t) &= it\gamma + \bigl(\operatorname{Ln} f(t) - it\gamma\bigr)\\ &= it\gamma + \Biggl(\operatorname{Ln} f(t) - itC_r - \tfrac{it}{\tau}\int\limits_{\mathbb{R}} \sin(\tau x)\, d\Lambda_r(x)\Biggr)\\ &= i\gamma t + \int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\bigr)\, d\Lambda_r(x).\end{aligned}$$

Делая замену $G_r(x) := \int\limits_{u \leqslant x} \frac{u^2}{1+u^2}\, d\Lambda_r(u)$, $x \in \mathbb{R}$, приходим к (3).

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, мы приведем важные утверждения, которые в нем будут использоваться.

Следующий факт хорошо известен из теории абсолютно сходящихся радов Фурье (см. [3], с. 71).

Лемма 1. *Пусть $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ непрерыная и 2π-периодическая функция со следующим разложением в ряд Фурье:*
$$g(t)\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k e^{itk},\quad t\in[-\pi,\pi].$$
Если g имеет кусочно непрерывную производную, то
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|\leqslant|a_0|+\left(\frac{\pi}{12}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Теорема ниже была получена М. Г. Крейном (см. [2], с. 30). В ней под символом $\mathcal{O}_r$ при $0<r<\infty$ мы можем понимать интервал $(-r,r)$ или отрезок $[-r,r]$, а при $r=\infty$ всю прямую $(-\infty,\infty)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы непрерывная функция $g:\mathcal{O}_r\to\mathbb{C}$ при фиксированном $r\in(0,\infty]$ допускала представление*
$$g(t)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{itx}\,dG(x),\quad \text{для всех}\quad t\in\mathcal{O}_r,$$
с некоторой функцией $G\in\boldsymbol{V}$ с $\|G\|\leqslant B$ при заданном $B\geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $m\in\mathbb{N}$, любых $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{C}$ и любых $t_1,\ldots,t_m\in\mathcal{O}_r$ выполнялось неравенство
$$\left|\sum_{k=1}^{m}c_k g(t_k)\right|\leqslant B\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=1}^{m}c_k e^{it_k x}\right|.$$

Следующая лемма является несложным следствием теоремы 2. Тем не менее, нам не удалось найти источник, где приводится такое утверждение. Поэтому для удобства мы приводим лемму с доказательством.

Лемма 2. *Пусть задана последовательность $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из $\boldsymbol{V}$, причем $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\|G_n\|=B<\infty$. Пусть при фиксированном $r\in(0,\infty]$ определены*
$$g_n(t):=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{itx}\,dG_n(x),\quad t\in\mathcal{O}_r,\quad n\in\mathbb{N}.$$
Предположим, что $g_n(t)\to g(t)$, $n\to\infty$, для каждого $t\in\mathcal{O}_r$ с некоторой непрерывной функцией $g:\mathcal{O}_r\to\mathbb{C}$. Тогда найдется $G\in\boldsymbol{V}$ с $\|G\|\leqslant B$, такая что
$$g(t)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{itx}\,dG(x),\quad t\in\mathcal{O}_r.\tag{4}$$

Доказательство леммы 2. Воспользуемся теоремой 2. Произвольно зафиксируем числа $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, $t_1, \ldots, t_m \in \mathcal{O}_r$, и рассмотрим

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{m} c_k g(t_k)\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{m} c_k g_n(t_k)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{m} c_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it_k x}\, dG_n(x)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{it_k x}\right) dG_n(x)\right|.\end{aligned}$$

Оценим

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{it_k x}\right) dG_n(x)\right| &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{m} c_k e^{it_k x}\right| d|G_n|(x) \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=1}^{m} c_k e^{it_k x}\right| \cdot \varlimsup_{n\to\infty}\|G_n\|,\end{aligned}$$

где по предположению $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\|G_n\| = B < \infty$. В итоге имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{m} c_k g(t_k)\right| \leqslant B \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=1}^{m} c_k e^{it_k x}\right|.$$

Следовательно, по теореме 2 непрерывная функция g допускает представление (4), причем $\|G\| \leqslant B$. $\square$

Дополнения к лемме 2 могут быть найдены в работе [12].

Доказательство теоремы 1. Пусть задано $r > 0$. Определим

$$\mu_r := \inf_{t\in[-r,r]} |f(t)| > 0.$$

Найдем функцию распределения $\widetilde{F}_r$ с ограниченным множеством точек роста, такую что $\|F - \widetilde{F}_r\| < \frac{\mu_r}{2}$. Пусть $\widetilde{f}_r$ обозначает характеристическую функцию $\widetilde{F}_r$. Справедливо неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - \widetilde{f}_r(t)| \leqslant \|F - \widetilde{F}_r\| < \tfrac{\mu_r}{2}. \tag{5}$$

Заметим, что для любого $t \in [-r, r]$ верно

$$|\widetilde{f}_r(t)| \geqslant |f(t)| - |f(t) - \widetilde{f}_r(t)| \geqslant \inf_{t\in[-r,r]} |f(t)| - \sup_{t\in[-r,r]} |f(t) - \widetilde{f}_r(t)|.$$

Тогда

$$\inf_{t\in[-r,r]} |\widetilde{f}_r(t)| > \mu_r - \tfrac{\mu_r}{2} = \tfrac{\mu_r}{2} > 0. \tag{6}$$

Поэтому мы можем записать

$$\operatorname{Ln} f(t) = \operatorname{Ln} \widetilde{f}_r(t) + \operatorname{Ln} \Delta_r(t), \quad t \in [-r, r], \tag{7}$$

где $\Delta_r(t) := f(t)/\widetilde{f}_r(t)$, $t \in [-r, r]$.

Сначала рассмотрим $\operatorname{Ln} \widetilde{f}_r(t)$, $t \in [-r, r]$. Представим этот логарифм в следующем виде:

$$\operatorname{Ln} \widetilde{f}_r(t) = itC_r + \bigl(\operatorname{Ln} \widetilde{f}_r(t) - itC_r\bigr), \quad t \in [-r, r],$$

где C_r выбирается из условия

$$\bigl(\operatorname{Ln} \widetilde{f}_r(t) - itC_r\bigr)\Big|_{-r}^{r} = 0,$$

т.е. $C_r := \frac{1}{r} \operatorname{Arg} \widetilde{f}_r(r) \in \mathbb{R}$. Далее рассмотрим функцию

$$\varphi_r(t) := \operatorname{Ln} \widetilde{f}_r(t) - itC_r, \quad t \in [-r, r].$$

Разложим ее в ряд Фурье на $[-r, r]$:

$$\varphi_r(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{r,k} e^{it\pi k/r}, \quad t \in [-r, r],$$

с коэффициентами

$$\lambda_{r,k} := \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \varphi_r(t) e^{-it\pi k/r}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что этот ряд является абсолютно сходящимся, т.е.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_{r,k}| < \infty. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $t \mapsto \varphi_r(rt/\pi)$, $t \in [-\pi, \pi]$, с соответствующим рядом Фурье:

$$\varphi_r(rt/\pi) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{r,k} e^{itk}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Применяя лемму 1, найдем оценку:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_{r,k}| \leqslant |\lambda_{r,0}| + \left(\frac{\pi}{12}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\tfrac{r}{\pi}\,\varphi_r'(rt/\pi)\right|^2 dt\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Рассмотрим $\lambda_{r,0}$:

$$\lambda_{r,0} = \frac{1}{2r}\int\limits_{-r}^{r} \bigl(\operatorname{Ln} f(t) - itC_r\bigr)\, dt = \frac{1}{2r}\int\limits_{-r}^{r} \ln|f(t)|\, dt.$$

Отсюда получаем, что

$$|\lambda_{r,0}| \leqslant \frac{1}{2r}\int\limits_{-r}^{r} \bigl|\ln|f(t)|\bigr|\, dt \leqslant |\ln\mu_r|.$$

Теперь рассмотрим интеграл из (9):

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{12}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\tfrac{r}{\pi}\,\varphi_r'(rt/\pi)\right|^2 dt &= \frac{r^2}{12\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi_r'(rt/\pi)\right|^2 dt \\ &= \frac{r}{12}\int\limits_{-r}^{r} \left|\varphi_r'(s)\right|^2 ds = \frac{r}{12}\int\limits_{-r}^{r} \left|\frac{\widetilde{f}_r'(t)}{\widetilde{f}_r(t)} - iC_r\right|^2 dt.\end{aligned}$$

Для него справедлива оценка

$$\frac{\pi}{12}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\tfrac{r}{\pi}\,\varphi_r'(rt/\pi)\right|^2 dt \leqslant \frac{r^2}{6}\sup_{t\in[-r,r]}\left|\frac{\widetilde{f}_r'(t)}{\widetilde{f}_r(t)} - iC_r\right|^2.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_{r,k}| \leqslant |\ln\mu_r| + \frac{r}{\sqrt{6}}\sup_{t\in[-r,r]}\left|\frac{\widetilde{f}_r'(t)}{\widetilde{f}_r(t)} - iC_r\right|.$$

Пусть множество точек роста $\widetilde{F}_r$ содержится в отрезке $[-b_r, b_r]$ с некоторым $b_r > 0$. Тогда

$$|\widetilde{f}_r'(t)| = \left|\int\limits_{-b_r}^{b_r} ixe^{itx}\, d\widetilde{F}_r(x)\right| \leqslant \int\limits_{-b_r}^{b_r} |x|\, d\widetilde{F}_r(x) \leqslant b_r \int\limits_{-b_r}^{b_r} d\widetilde{F}_r(x) = b_r, \tag{10}$$

для любого $t \in [-r, r]$. В итоге имеем оценку

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_{r,k}| \leqslant |\ln \mu_r| + \frac{r}{\sqrt{6}}\left(\frac{b_r}{\mu_r} + |C_r|\right) < \infty,$$

которая доказывает (8).

Абсолютная сходимость ряда Фурье для функции φ_r означает, что последняя представляется этим рядом:

$$\varphi_r(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{r,k} e^{it\pi k/r}, \quad t \in [-r, r].$$

Таким образом,

$$\operatorname{Ln} \widetilde{f}_r(t) = itC_r + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{r,k} e^{it\pi k/r}, \quad t \in [-r, r]. \tag{11}$$

Последняя сумма может быть представлена интегралом Лебега–Стилтьеса:

$$\operatorname{Ln} \widetilde{f}_r(t) = itC_r + \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dL_r(x), \quad t \in [-r, r], \tag{12}$$

где

$$L_r(x) := \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ \pi k/r \leqslant x}} \lambda_{r,k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

С учетом (8) легко видеть, что $L_r \in \boldsymbol{V}$.

Теперь рассмотрим $\operatorname{Ln} \Delta_r(t)$, $t \in [-r, r]$, из (7). Пользуясь неравенствами (5) и (6), заметим, что

$$\sup_{t\in[-r,r]} \left|\frac{f(t) - \widetilde{f}_r(t)}{\widetilde{f}_r(t)}\right| \leqslant \frac{\sup_{t\in[-r,r]} |f(t) - \widetilde{f}_r(t)|}{\inf_{t\in[-r,r]} |\widetilde{f}_r(t)|} < 1.$$

Следовательно, $\operatorname{Ln} \Delta_r(t)$ при каждом $t \in [-r, r]$ совпадает с главным значением логарифма $\ln \Delta_r(t)$, и допускает представление

$$\operatorname{Ln} \Delta_r(t) = \ln\left(1 + \frac{f(t) - \widetilde{f}_r(t)}{\widetilde{f}_r(t)}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{f(t) - \widetilde{f}_r(t)}{\widetilde{f}_r(t)}\right)^m,$$
$$t \in [-r, r].$$

Мы запишем его в следующем виде

$$\operatorname{Ln} \Delta_r(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} J_r(t)^m K_r(t)^m, \quad t \in [-r, r], \tag{13}$$

где

$$J_r(t) := \frac{e^{itC_r}}{\widetilde{f}_r(t)}, \qquad K_r(t) = \big(f(t) - \widetilde{f}_r(t)\big)e^{-itC_r}, \quad t \in [-r, r].$$

С учетом (11) верно

$$J_r(t) = \exp\Big\{-\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{r,k} e^{it\pi k/r}\Big\}, \quad t \in [-r, r].$$

Функция $t \mapsto J_r(t)^m$, $t \in [-r, r]$, при каждом $m \in \mathbb{N}$ представляется абсолютно сходящимся рядом Фурье:

$$J_r(t)^m = \sum_{l\in\mathbb{Z}} A_{r,l}^{(m)} e^{it\pi l/r}, \quad t \in [-r, r].$$

Покажем это, оценив $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |A_{r,l}^{(m)}|$. Воспользуемся леммой 1 для функции $t \mapsto J_r(rt/\pi)^m$, $t \in [-\pi, \pi]$, имеющей те же коэффициенты Фурье, что и $t \mapsto J_r(t)^m$, $t \in [-r, r]$:

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbb{Z}} |A_{r,l}^{(m)}| &\leqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} J_r(rt/\pi)^m\,dt\right| + \left(\frac{\pi}{12}\int_{-\pi}^{\pi} \left|mJ_r(rt/\pi)^{m-1}\tfrac{r}{\pi}J_r'(rt/\pi)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sup_{t\in[-r,r]} |J_r(t)|^m + \frac{mr}{\sqrt{6}} \sup_{t\in[-r,r]} |J_r(t)|^{m-1} \sup_{t\in[-r,r]} |J_r'(t)|.\end{aligned}$$

Здесь имеем

$$\sup_{t\in[-r,r]} |J_r(t)| = \sup_{t\in[-r,r]} \frac{1}{|\widetilde{f}_r(t)|} = \frac{1}{\mu_r},$$

а также с учетом (10) оцениваем

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[-r,r]} |J_r'(t)| &= \sup_{t\in[-r,r]} \left|\frac{iC_r e^{itC_r}}{\widetilde{f}_r(t)} - \frac{e^{itC_r}\widetilde{f}_r'(t)}{\widetilde{f}_r(t)^2}\right| \\ &\leqslant \sup_{t\in[-r,r]} \frac{|C_r|}{|\widetilde{f}_r(t)|} + \sup_{t\in[-r,r]} \frac{|\widetilde{f}_r'(t)|}{|\widetilde{f}_r(t)|^2} \leqslant \frac{|C_r|}{\mu_r} + \frac{b_r}{\mu_r^2}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |A_{r,l}^{(m)}| \leqslant \frac{1}{\mu_r^m} + \frac{mr}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\mu_r^{m-1}}\cdot\left(\frac{|C_r|}{\mu_r} + \frac{b_r}{\mu_r^2}\right) = \frac{1+mE_r}{\mu_r^m},$$

где $E_r := \frac{r}{\sqrt{6}}\bigl(|C_r| + \frac{b_r}{\mu_r}\bigr)$. Таким образом, $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |A_{r,l}^{(m)}|$ при каждом $m \in \mathbb{N}$ конечна и имеет указанную оценку. Отсюда, в частности, получаем представление

$$J_r^m(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dH_{r,m}(x), \quad t \in [-r, r], \quad m \in \mathbb{N},$$

где

$$H_{r,m}(x) := \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}:\\ \pi l/r \leqslant x}} A_{r,l}^{(m)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $H_{r,m} \in \boldsymbol{V}$ с $\|H_{r,m}\| \leqslant \frac{1+mE_r}{\mu_r^m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Теперь обратимся к функциям $t \mapsto K_r(t)^m$, $t \in [-r, r]$, $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} K_r(t)^m = \bigl(f(t) - \widetilde{f}_r(t)\bigr)^m e^{-itmC_r} &= \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{it(x-C_r)}\, d(F - \widetilde{F}_r)(x)\biggr)^m \\ &= \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d(F_r^c - \widetilde{F}_r^c)(x)\biggr)^m, \end{aligned}$$

где $F_r^c(x) := F(x + C_r)$ и $\widetilde{F}_r^c(x) := \widetilde{F}_r(x + C_r)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда при каждом $m \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\Delta_r(t)^m = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dW_{r,m}(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

с $W_{r,m}(x) := (F_r^c - \widetilde{F}_r^c)^{*m}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Видно, что $W_{r,m} \in \boldsymbol{V}$ и

$$\|W_{r,m}\| \leqslant \|F_r^c - \widetilde{F}_r^c\|^m = \|F - \widetilde{F}_r\|^m < \left(\frac{\mu_r}{2}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Далее при каждом $m \in \mathbb{N}$ запишем

$$J_r(t)^m K_r(t)^m = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d(H_{r,m} * W_{r,m})(x), \quad t \in [-r, r],$$

при этом $H_{r,m} * W_{r,m} \in \boldsymbol{V}$ и

$$\|H_{r,m} * W_{r,m}\| \leqslant \|H_{r,m}\| \cdot \|W_{r,m}\| \leqslant \frac{1+mE_r}{\mu_r^m} \cdot \left(\frac{\mu_r}{2}\right)^m = \frac{1+mE_r}{2^m}.$$

В соответствии с (13), имеем представление:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} \Delta_r(t) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m} J_r(t)^m K_r(t)^m \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d(H_{r,m} * W_{r,m})(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dQ_{r,n}(x), \quad t \in [-r, r], \end{aligned}$$

где

$$Q_{r,n}(x) := \sum_{m=1}^{n} \tfrac{(-1)^{m-1}}{m} (H_{r,m} * W_{r,m})(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Сделаем при каждом $n \in \mathbb{N}$ оценку вариации $Q_{r,n}$:

$$\begin{aligned} \|Q_{r,n}\| \leqslant \sum_{m=1}^{n} \tfrac{1}{m} \|H_{r,m} * W_{r,m}\| &\leqslant \sum_{m=1}^{n} \tfrac{1}{m} \cdot \tfrac{1+mE_r}{2^m} \\ &\leqslant (1+E_r) \sum_{m=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^m} = 1 + E_r. \end{aligned}$$

Тогда $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_{r,n}\| \leqslant 1 + E_r$. Таким образом, непрерывная функция $t \mapsto \operatorname{Ln} \Delta_r(t)$ является поточечным пределом функций $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dQ_{r,n}(x)$ при $n \to \infty$ на $[-r, r]$, причем величины $\|Q_{r,n}\|$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно ограничены. В соответствии с леммой 2, имеем представление

$$\operatorname{Ln} \Delta_r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dQ_r(x), \quad t \in [-r, r], \tag{14}$$

с некоторой функцией $Q_r \in \boldsymbol{V}$.

Соединим вместе представления (12) и (14) в формуле (7):

$$\operatorname{Ln} f(t) = itC_r + \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\Lambda_r(x), \quad t \in [-r, r],$$

где $C_r \in \mathbb{R}$ и $\Lambda_r = L_r + Q_r \in \boldsymbol{V}$. □

§3. Критерий рациональной безграничной делимости

Класс $\boldsymbol{Q}$ рационально безгранично делимых ф.р. был описан во введении. Сейчас для этого класса актуальны задачи о нахождении условий принадлежности к нему ф.р. Например, существует критерий для дискретных ф.р. (см. [11]), критерий для смеси дискретной и абсолютно непрерывной ф.р. (см. [6]), а также ряд достаточных условий еще более частного характера (см. [4] и [14]). Здесь мы получим совершенно общий критерий принадлежности к классу $\boldsymbol{Q}$ на основе представлений логарифма х.ф., полученных в пункте 2 (следствие 1), на расширяющихся отрезках.

Теорема 3. *Пусть ф.р. F имеет х.ф. f, такую что $f(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть с некоторой положительной последовательностью $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такой что $r_n \uparrow \infty$, и с некоторой последовательностью $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из $\boldsymbol{V}$, такой что $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|G_n\| = B < \infty$, справедливы представления*

$$\operatorname{Ln} f(t) = it\gamma + \int\limits_{\mathbb{R}} \big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG_n(x),$$
$$t \in [-r_n, r_n], \quad n \in \mathbb{N},$$

с константами $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$. Тогда $F \in \boldsymbol{Q}$ и

$$\operatorname{Ln} f(t) = it\gamma + \int\limits_{\mathbb{R}} \big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $G \in \boldsymbol{V}$ и $\|G\| \leqslant B$.

Отметим, что с помощью результатов из статьи [12] можно дополнительно показать, что G_n, $n \in \mathbb{N}$, специальным образом сходятся к G (и это не слабая сходимость), но мы не будем это обсуждать в рамках данной статьи.

В доказательстве теоремы 3 будет использоваться следующая лемма, доказанная в [12]. Здесь мы ее приводим в несколько сокращенной форме. Величина $\mathbb{1}_a(s)$ в формулировке равна 1 при $s \leqslant a$ и равна 0 при $s > a$.

Лемма 3. *Для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$ справедливо представление*

$$\Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2} = \int\limits_{A_{t,\tau}} e^{isx}\, dW_{t,\tau}(s), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $A_{t,\tau} := \big\{s \in \mathbb{R} : |s| \leqslant \max\{|t|, \tau\}\big\}$, *и*

$$W_{t,\tau}(s) := \mathbb{1}_t(s) - \mathbb{1}_0(s) - \tfrac{t}{2\tau}\big(\mathbb{1}_\tau(s) - \mathbb{1}_{-\tau}(s)\big) \\ - \tfrac{1}{2}\int\limits_{y \leqslant s} \Big(|y-t| - |y| - \tfrac{t}{2\tau}\left(|y-\tau| - |y+\tau|\right)\Big)\,dy, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Для любых $t \in \mathbb{R}$ *и* $\tau > 0$ *функция* $W_{t,\tau}$ *принадлежит* $\boldsymbol{V}$.

Доказательство теоремы 3. Введем последовательность функций:

$$L_n(t) := it\gamma + \int\limits_{\mathbb{R}} \big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\,dG_n(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$L_n(t) = \operatorname{Ln} f(t), \quad t \in [-r_n, r_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частности, имеем

$$L_n(t) \to \operatorname{Ln} f(t), \quad n \to \infty, \quad \text{для любого} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Далее определим:

$$\psi_n(t,s) := L_n(t) - \tfrac{1}{2}\big(L_n(t-s) + L_n(t+s)\big), \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При любых $t \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$ верно представление:

$$\psi_n(t,s) = it\gamma_n + \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\,dG_n(x) \\ - \tfrac{1}{2}\bigg(i2t\gamma_n + \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{itx}\big(e^{-isx} + e^{isx}\big) - 2 - \tfrac{i2t}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\,dG_n(x)\bigg) \\ = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\big(1 - \cos(sx)\big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\,dG_n(x). \tag{16}$$

Оценим величину $|\psi_n(t,s)|$ при любых указанных t, s и n. Для этого сначала оценим сверху значения подынтегральной функции $x \mapsto \big(1 - \cos(sx)\big)\frac{1+x^2}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, при любом фиксированном $s \geqslant 0$. Для случая $|sx| \leqslant 2$ по известному неравенству $1 - \cos y \leqslant \frac{y^2}{2}$, $y \in \mathbb{R}$, будем иметь

$$\big(1 - \cos(sx)\big)\tfrac{1+x^2}{x^2} \leqslant \tfrac{s^2x^2}{2}\cdot\tfrac{1+x^2}{x^2} = \tfrac{s^2+s^2x^2}{2} = \tfrac{s^2}{2} + 2.$$

Для случая $|sx| > 2$ с помощью простого неравенства $1-\cos y \leqslant 2$, $y \in \mathbb{R}$, получаем

$$\bigl(1-\cos(sx)\bigr)\tfrac{1+x^2}{x^2} \leqslant 2 \cdot \tfrac{1+x^2}{x^2} = 2 \cdot \bigl(\tfrac{1}{x^2}+1\bigr) = 2 \cdot \bigl(\tfrac{s^2}{4}+1\bigr) = \tfrac{s^2}{2}+2.$$

В итоге имеем

$$\bigl(1-\cos(sx)\bigr)\tfrac{1+x^2}{x^2} \leqslant \tfrac{s^2}{2}+2, \quad \text{для любых} \quad x \in \mathbb{R}, \quad s \geqslant 0.$$

Тогда при любых $t \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\begin{aligned}|\psi_n(t,s)| &\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \Bigl| e^{itx}\bigl(1-\cos(sx)\bigr)\tfrac{1+x^2}{x^2}\Bigr|\, d|G_n|(x) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(1-\cos(sx)\bigr)\tfrac{1+x^2}{x^2}\, d|G_n|(x) \leqslant \Bigl(\tfrac{s^2}{2}+1\Bigr)\|G_n\|.\end{aligned}$$

В силу предположения, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|G_n\| = B < \infty$, найдется такая константа $B_0 \geqslant 0$, что $\|G_n\| \leqslant B_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi_n(t,s)| \leqslant B_0 \cdot \Bigl(\tfrac{s^2}{2}+1\Bigr), \quad s \geqslant 0.$$

Далее определим функцию

$$\psi(t,s) := \operatorname{Ln} f(t) - \tfrac{1}{2}\bigl(\operatorname{Ln} f(t-s) + \operatorname{Ln} f(t+s)\bigr), \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geqslant 0,$$

В силу (15), имеем

$$\psi(t,s) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(t,s), \quad \text{для любых} \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geqslant 0.$$

Заметим, что при любых $t \in \mathbb{R}$ и $s \geqslant 0$

$$|\psi(t,s)| = \lim_{n\to\infty} |\psi_n(t,s)| \leqslant \Bigl(\tfrac{s^2}{2}+1\Bigr) \varlimsup_{n\to\infty} \|G_n\| = \Bigl(\tfrac{s^2}{2}+1\Bigr)B. \tag{17}$$

Определим функции

$$g_n(t) := \int\limits_0^\infty \psi_n(t,s)e^{-s}\, ds, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad g(t) := \int\limits_0^\infty \psi(t,s)e^{-s}\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Написанные интегралы конечны в силу приведенных оценок на величины $|\psi_n(t,s)|$ и $|\psi(t,s)|$ с учетом того, что $\int\limits_0^\infty \bigl(\tfrac{s^2}{2}+1\bigr)e^{-s}\, ds < \infty$. Также по теореме Лебега о мажорируемой сходимости мы имеем

$$g_n(t) \to g(t), \quad n \to \infty, \quad \text{для любого} \ t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим функции g_n, $n \in \mathbb{N}$. Используя (16), запишем

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \int_0^\infty \psi_n(t,s) e^{-s}\, ds \\ &= \int_0^\infty \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{itx} \big(1-\cos(sx)\big) \tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG_n(x) \Big) e^{-s}\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^\infty \big(1-\cos(sx)\big) e^{-s}\, ds \Big) e^{itx}\, \tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG_n(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл вычисляется (см. [10] с. 486, формула **3.893** 2.):

$$\int_0^\infty \big(1-\cos(sx)\big) e^{-s}\, ds = 1 - \int_0^\infty \cos(sx) e^{-s}\, ds = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В итоге имеем

$$g_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dG_n(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Теперь рассмотрим функцию g и покажем, что она непрерывна на $\mathbb{R}$. Зафиксируем произвольно $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим величину

$$g(t) - g(t_0) = \int_0^\infty (\psi(t,s) - \psi(t_0,s)) e^{-s}\, ds$$

при всех t из некоторой окрестности t_0. Найдем такое число $h_\varepsilon > 0$, что

$$B \int_{h_\varepsilon}^\infty \big(s^2+2\big) e^{-s}\, ds < \varepsilon. \tag{19}$$

Справедлива оценка:

$$|g(t) - g(t_0)| \leqslant \int_0^{h_\varepsilon} |\psi(t,s) - \psi(t_0,s)| e^{-s}\, ds + \int_{h_\varepsilon}^\infty \big(|\psi(t,s)| + |\psi(t_0,s)|\big) e^{-s}\, ds.$$

Первый интеграл в правой части может быть сделан меньше ε при всех t, достаточно близких к t_0. Действительно, это вытекает из равномерной непрерывности функции $t \mapsto \operatorname{Ln} f(t)$ на каждом конечном отрезке. Второй интеграл меньше ε в силу (17) и (19). Таким образом, $|g(t) - g(t_0)| < 2\varepsilon$ при всех t, достаточно близких к t_0. Это означает непрерывность функции g в любой точке $t_0 \in \mathbb{R}$.

Итак, непрерывная на $\mathbb{R}$ функция g является пределом последовательности функций g_n с представлениями (18) с условием

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|G_n\| = B < \infty.$$

Тогда по лемме 2 найдется $G \in \boldsymbol{V}$, такая что $\|G\| \leqslant B$ и

$$g(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dG(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Далее мы покажем, что для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$ имеет место сходимость

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG(x), \quad n \to \infty. \tag{20}$$

Зафиксируем $t \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$. По лемме 3 имеем

$$\Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2} = \int\limits_{A_{t,\tau}} e^{isx}\, dW_{t,\tau}(s), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $A_{t,\tau} = \big\{s \in \mathbb{R} : |s| \leqslant \max\{|t|, \tau\}\big\}$, и $W_{t,\tau} \in \boldsymbol{V}$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\, dG_n(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \bigg(\int\limits_{A_{t,\tau}} e^{isx}\, dW_{t,\tau}(s)\bigg)\, dG_n(x) \\
&= \int\limits_{A_{t,\tau}} \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{isx}\, dG_n(x)\bigg)\, dW_{t,\tau}(s) \\
&= \int\limits_{A_{t,\tau}} g_n(s)\, dW_{t,\tau}(s).
\end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\,dG(x) = \int\limits_{A_{t,\tau}} g(s)\,dW_{t,\tau}(s).$$

Сходимость (20) записывается в следующей форме:

$$\int\limits_{A_{t,\tau}} g_n(s)\,dW_{t,\tau}(s) \to \int\limits_{A_{t,\tau}} g(s)\,dW_{t,\tau}(s), \quad n\to\infty. \tag{21}$$

Верна оценка

$$\Bigg|\int\limits_{A_{t,\tau}} g_n(s)\,dW_{t,\tau}(s) - \int\limits_{A_{t,\tau}} g(s)\,dW_{t,\tau}(s)\Bigg| \leqslant \int\limits_{A_{t,\tau}} \big|g_n(s)-g(s)\big|\,d|W_{t,\tau}|(s)$$

Здесь $g_n(s)-g(s)\to 0$, $n\to\infty$, при каждом $s\geqslant 0$, при этом

$$|g_n(s)-g(s)| \leqslant |g_n(s)|+|g(s)| \leqslant \int\limits_0^\infty \big(|\psi_n(s,u)|+|\psi(s,u)|\big)e^{-s}\,ds$$

$$\leqslant (B_0+B)\int\limits_0^\infty \big(\tfrac{s^2}{2}+1\big)e^{-s}\,ds.$$

Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости мы будем иметь (21) и значит (20).

Вернемся к функциям $\operatorname{Ln} f$ и L_n, $n\in\mathbb{N}$. Из (20) вытекает, что при любом $t\in\mathbb{R}$

$$L_n(t) \to it\gamma + \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\,dG(x), \quad n\to\infty.$$

Это вместе с (15) дает, что

$$\operatorname{Ln} f(t) = it\gamma + \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(e^{itx} - 1 - \tfrac{it}{\tau}\sin(\tau x)\Big)\tfrac{1+x^2}{x^2}\,dG(x), \quad t\in\mathbb{R}.$$

где, как показано выше, $G\in\boldsymbol{V}$ и $\|G\|\leqslant B$. □

Список литературы

1. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, Наука, М., 1986.

2. М. Г. Крейн, *О представлении функций интегралами Фурье–Стилтьеса.* — Уч. зап. Куйбышевского гос. пед. и учит. инст. им. В. В. Куйбышева, **7** (1943), 123–148.
3. Ж.-П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.
4. А. А. Хартов, И. А. Алексеев, *Квази-безграничная делимость и трехточечные вероятностные законы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 305–316.
5. I. A. Alexeev, A. A. Khartov, *Spectral representations of characteristic functions of discrete probability laws*, (2021), `arXiv:2101.06038` (to appear in Bernoulli).
6. D. Berger, M. Kutlu, *Quasi-infinite divisibility of a class of distributions with discrete part*, (2022), `arXiv:2204.09651.`
7. D. Berger, M. Kutlu, A. Linder, *On multivariate quasi-infinitely divisible distributions.* — In: A Lifetime of Excersions Through Random Walks and Lévy Processes. A Volume in Honour of Ron Doney's 80th Birthday. L. Chaumont, A.E. Kyprianou (eds.), Progress in Probability **78** (2021), Birkhäuser, 87–120.
8. H. Chhaiba, N. Demni, Z. Mouayn, *Analysis of generalized negative binomial distributions attached to hyperbolic Landau levels.* — J. Math. Phys. **57**, No. 7 (2016), 072103.
9. N. Demni, Z. Mouayn, *Analysis of generalized Poisson distributions associated with higher Landau levels.* — Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **18**, No. 4 (2015), 1550028.
10. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Elsevier, Burlington, 2007.
11. A. A. Khartov, *A criterion of quasi-infinite divisibility for discrete laws.* — Statist. Probab. Lett. **185** (2022), 109436.
12. A. A. Khartov, *On weak convergence of quasi-infinitely divisible laws*, `arXiv.org:2204.13667`.
13. M. Kutlu, *On a denseness result for quasi-infinitely divisible distributions.* — Statist. Probab. Lett. **176**, No. 6 (2021), 109139.
14. A. Lindner, L. Pan, K. Sato, *On quasi-infinitely divisible distributions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), 8483–8520.
15. A. Lindner, K. Sato, *Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein–Uhlenbeck processes.* — Math. Nachr. **284** (2011), 17–18, 2225–2248.
16. T. Nakamura, *A complete Riemann zeta distribution and the Riemann hypothesis.* — Bernoulli **21**, No. 1 (2015), 604–617.
17. P. Passeggeri, *Spectral representation of quasi-infinitely divisible processes.* — Stoch. Process. Appl. **130**, No. 3 (2020), 1735–1791.
18. H. Zhang, Y. Liu, B. Li, *Notes on discrete compound Poisson model with applications to risk theory.* — Insurance Math. Econom., **59** (2014), 325–336.

Khartov A. A. On representation of the logarithm for arbitrary characteristic function on segments.

We consider a characteristic function of arbitrary probability law. We obtain analogs of the Lévy–Khintchine formula for it on any segment of the form $[-r, r]$ with finite $r > 0$, where the characteristic function does not vanish. Using these representations we prove a criterion of belonging of the corresponding distribution function to the new wide class of so called quasi-infinitely divisible distribution functions.

Лаборатория
вероятностных проблем аппроксимации,
Смоленский Государственный Университет,
ул. Пржевальского д. 4,
214000 Смоленск, Россия
E-mail: alexeykhartov@gmail.com

Поступило 6 сентября 2022 г.