Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

А. С. Токмачев

СРЕДНЕЕ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ТОЧКАМИ НА ГРАНИЦЕ ВЫПУКЛОЙ ФИГУРЫ

§1. Введение

Рассмотрим выпуклую фигуру K на плоскости. Под этим мы понимаем, что K является выпуклым компактом с непустой внутренностью, и в дальнейшем класс таких множеств будем называть выпуклыми телами, чтобы не вводить отдельную терминологию в ситуации, когда мы будем упоминать многомерный случай. При этом, если не оговорено другое, мы всегда по умолчанию предполагаем, что K лежит в $\mathbb{R}^2$.

В 1864 году Сильвестр поставил следующую задачу [1]: пусть внутри K случайно выбираются 4 точки X_1, X_2, X_3, X_4. Какова вероятность того, что их выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ является треугольником? Ясно, что данная вероятность зависит от формы K. В 1918 году Бляшке показал [2], что для любого выпуклого тела K на плоскости выполнены оценки

$$\frac{35}{12\pi^2} \leqslant \mathbb{P}(\operatorname{conv}(X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ есть треугольник}) \leqslant \frac{1}{3},$$

причем левая граница достигается на эллипсах, а правая – на треугольниках.

Данную задачу можно переформулировать в других терминах. Пусть $\operatorname{area}(\,\cdot\,)$ обозначает площадь. Тогда несложно видеть, что

$$\mathbb{P}(\operatorname{conv}(X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ есть треугольник}) \\ = 4\mathbb{P}(X_4 \in \operatorname{conv}(X_1, X_2, X_3)) = 4\frac{\mathbb{E}\operatorname{area}\operatorname{conv}(X_1X_2X_3)}{\operatorname{area} K}.$$

Ключевые слова: Геометрические неравенства, задача Сильвестра, интегральная геометрия, метрика Хаусдорфа, ряды Фурье, среднее расстояние.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No 075-15-2022-289.

Автор благодарит Дмитрия Запорожца за полезные обсуждения и помощь при написании данной статьи.

Таким образом, неравенство Бляшке эквивалентно

$$\frac{35}{48\pi^2} \leqslant \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{area}\,\mathrm{conv}(X_1X_2X_3)}{\mathrm{area}\,K} \leqslant \frac{1}{12},$$

что дает оптимальную нижнюю и верхнюю оценку для нормированной средней площади треугольника, вершины которого независимо и равномерно распределены на K.

В [3] была рассмотрена аналогичная задача для двух точек: оценивалась нормированная периметром K длина случайного отрезка с концами, независимо и равномерно выбранными внутри K. Было показано, что для

$$\Delta(K) = \mathbb{E}\,|X_1 - X_2|$$

выполняется

$$\frac{7}{60} < \frac{\Delta(K)}{\mathrm{per}\,K} < \frac{1}{6}. \tag{1}$$

Данный результат был также обобщен на многомерный случай, при этом Δ нормировалась средней шириной тела, которая в размерности 2, в соответствии с формулой Коши (см. [4]), совпадает с периметром, взятым с коэффициентом $1/\pi$.

Отметим, что несмотря на строгие неравенства в левой и правой части (1), данный результат является оптимальным: нижняя оценка асимптотически достигается на последовательности равнобедренных треугольников, основание которых фиксировано, а соответствующая ему высота стремится к нулю. Что касается верхней оценки, она достигается на отрезке, который, ввиду отсутствия внутренности, не принадлежит рассматриваемому нами классу выпуклых тел, однако нетрудно показать, что асимптотически его можно приблизить последовательностью прямоугольников.

Исходя из вышесказанного и того факта, что в равнобедренный треугольник с маленькой высотой к основанию можно поместить прямоугольник не слишком отличающегося периметра, нетрудно показать, что функционал $\Delta(\,\cdot\,)$, действующий на множестве выпуклых тел $\mathcal{K}$, не является ни монотонным по включению, ни непрерывным в метрике Хаусдорфа d_H.

Рассмотрим функционал, также заданный на $\mathcal{K}$ и определяемый аналогично $\Delta(\,\cdot\,)$, с той лишь разницей, что точки теперь выбираются на *границе* тела:

$$\theta(K) = \mathbb{E}\,|Y_1 - Y_2|, \tag{2}$$

где Y_1, Y_2 независимо и равномерно распределены на границе K.

Запорожец и Тарасов высказали естественное предположение, что для всех выпуклых тел в произвольной размерности d выполнено

$$\Delta(K) < \theta(K). \tag{3}$$

Насколько нам известно, данная гипотеза все еще является открытой даже в размерности $d = 2$.

Гусакова и Запорожец предложили следующий возможный подход к доказательству данной гипотезы. Они предположили, что для произвольного выпуклого тела на плоскости выполнено

$$\frac{1}{6} < \frac{\theta(K)}{\operatorname{per} K} \leqslant \frac{2}{\pi^2}, \tag{4}$$

причем равенство в оценке сверху выполняется тогда и только тогда, когда K является кругом, а нижняя оценка недостижима в классе выпуклых тел, однако достигается на отрезке, который асимптотически приближается прямоугольниками. Очевидным образом, из нижней оценки в данной гипотезе вместе с верхней оценкой из (1) сразу бы следовало (3). Стоит также отметить, что, как и в случае с (1), гипотеза (4) была сформулирована в многомерном случае с нормировкой средней шириной тела, и ее подтверждение также повлекло бы (3) в многомерном случае. Однако мы опускаем детали, поскольку в данной заметке нас интересует исключительно случай размерности 2.

§2. Основные результаты

Наш основной результат – доказательство верхней оценки в гипотезе (4). Пусть $\mathcal{B}^2$ обозначает единичный круг.

Теорема 1. *Для всех выпуклых тел $K \subset \mathbb{R}^2$ выполнено*

$$\frac{\theta(K)}{\operatorname{per} K} \leqslant \frac{\theta(\mathcal{B}^2)}{\operatorname{per} \mathcal{B}^2} = \frac{2}{\pi^2}, \tag{5}$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда K является кругом.

Обозначим $l(Y_1, Y_2)$ длину участка границы K между Y_1 и Y_2, при этом направление обхода выбирается против часовой стрелки. Используя формулу полной вероятности, мы можем написать

$$\theta(K) = \mathbb{E}|Y_1 - Y_2| = \int_0^1 \mathbb{E}\Big[|Y_1 - Y_2| \,\Big|\, l(Y_1, Y_2) = x \cdot \operatorname{per} K\Big]\, dx$$

$$= \int_0^1 \theta_x(K)\, dx,$$

где $\theta_x(\,\cdot\,)$ обозначает среднее (евклидово) расстояние между двумя точками на границе при условии, что расстояние между ними по границе фиксировано:

$$\theta_x(K) = \mathbb{E}\Big[|Y_1 - Y_2| \,\Big|\, l(Y_1, Y_2) = x \cdot \operatorname{per} K\Big]. \tag{6}$$

Теорема 1 утверждает, что круг максимизирует $\theta_x(\,\cdot\,)$ в среднем по x. Оказалось, что это верно для *любого* x.

Теорема 2. *Для всех выпуклых тел $K \subset \mathbb{R}^2$ и всех $x \in (0,1)$ выполнено*

$$\frac{\theta_x(K)}{\operatorname{per} K} \leqslant \frac{\theta_x(\mathcal{B}^2)}{\operatorname{per} \mathcal{B}^2} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos(2\pi x)}}{2\pi}. \tag{7}$$

Основным ингредиентом доказательства теоремы 2 является разложение функции, описывающей границу K, в ряд Фурье. Данную идею впервые применил Гурвиц [5] для вывода изопериметрического неравенства. При этом нам потребуется определенная гладкость границы K. После этого мы перейдем к произвольным телам с помощью аппроксимации с использованием непрерывности функционала θ_x в метрике Хаусдорфа, которая установлена (наряду с непрерывностью θ) в нашей следующей теореме. Прежде чем ее сформулировать, напомним, что для двух непустых компактных множеств M, M' расстояние по Хаусдорфу между ними определено как

$$d_H(M, M') = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 : M \subset M'_\varepsilon, M' \subset M_\varepsilon\},$$

где $M_\varepsilon, M'_\varepsilon$ обозначают ε-окрестности M, M'.

Теорема 3. *Пусть $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность выпуклых тел, сходящихся в метрике Хаусдорфа к некоторому выпуклому телу K.*

Тогда

$$\theta(K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta(K), \quad \text{\textit{и при всех} } x \in (0,1) \quad \theta_x(K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta_x(K).$$

Тем самым, функционал θ является более регулярным, чем Δ. Более того, мы имеем основания считать, что, в отличие от Δ, функционал θ является монотонным, однако доказательства данного предположения у нас нет.

Гипотеза 1. *Для выпуклых тел $K, K' \subset \mathbb{R}^2$, таких что $K \subset K'$, выполнено $\theta(K) \leqslant \theta(K')$.*

В следующих разделах мы приведем доказательства сформулированных результатов.

§3. Непрерывность θ в метрике Хаусдорфа

Целью данного пункта является доказательство теоремы 3. Начнем с простого утверждения, которое понадобится в дальнейшем.

Утверждение 1. *Пусть $K, L \in \mathcal{K}$, $d_H(K, L) < \varepsilon$. Тогда* $|\operatorname{per} K - \operatorname{per} L| < 2\pi\varepsilon$.

Доказательство. По формуле Коши [4] периметр выпуклого тела равен его средней ширине, помноженной на π. Ширина тела K в любом направлении отличается от ширины L в этом же направлении меньше, чем на 2ε, в силу определения метрики Хаусдорфа, следовательно, то же верно и для средней ширины. Поэтому периметры отличаются меньше чем на $2\pi\varepsilon$, что и требовалось. □

Перейдем к формулировке основной леммы, используемой в доказательстве непрерывности функционала θ.

Лемма 1. *Существует константа C, такая что для любых выпуклых тел $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, таких что $d_H(K_1, K_2) < \varepsilon$, $K_1 \subset K_2$, выполнено $|\theta(K_1) - \theta(K_2)| < C\varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим кривые, являющиеся границами тел K_1 и K_2. Пусть их длины равны l_1 и l_2 соответственно. Рассмотрим параметризации γ_1 и γ_2 данных кривых, такие что $|\gamma_1'| \equiv l_1$, $|\gamma_2'| \equiv l_2$ и $|\gamma_1(0) - \gamma_2(0)| \leqslant \varepsilon$. Пусть при этом $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ обходят границы против часовой стрелки. В терминах параметризованных кривых функционал θ от данных тел можно записать следующим образом:

$$\theta(K_1) = \int_0^1 \int_0^1 |\gamma_1(t) - \gamma_1(s)|\, dtds,$$

$$\theta(K_2) = \int_0^1 \int_0^1 |\gamma_2(t) - \gamma_2(s)|\, dtds.$$

Покажем, что для любого $t \in [0,1]$ точки $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ близки. Выберем $s \in [0,1]$ так, что $|\gamma_1(t) - \gamma_2(s)| < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} l_1 t = |\gamma_1([0,t])| \leqslant |\gamma_1(0) - \gamma_2(0)| + |\gamma_2([0,s])| \\ + |\gamma_2(s) - \gamma_1(t)| \leqslant l_2 s + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{8}$$

Первое неравенство выполняется, поскольку множество, ограниченное дугой $\gamma_1([0,t])$ и отрезком $[\gamma_1(0), \gamma_1(t)]$, является выпуклым и лежит внутри множества, ограниченного отрезками $[\gamma_2(0), \gamma_1(0)]$, $[\gamma_1(0), \gamma_1(t)]$, $[\gamma_1(t), \gamma_2(s)]$ и дугой $\gamma_2([0,s])$, а значит периметр первого не больше, чем второго. Аналогично можем оценить длину дуги $\gamma_1([t,1])$:

$$\begin{aligned} l_1(1-t) = |\gamma_1([t,1])| \leqslant |\gamma_2(s) - \gamma_1(t)| + |\gamma_2([s,1])| \\ + |\gamma_2(1) - \gamma_1(1)| \leqslant l_2(1-s) + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку $|l_2 - l_1| \leqslant 2\pi\varepsilon < 8\varepsilon$ по утверждению 1, из предыдущего неравенства можно получить следующую оценку:

$$l_2 s \leqslant l_1 t - l_1 + l_2 + 2\varepsilon < l_1 t + 10\varepsilon. \tag{10}$$

Собирая вместе результаты неравенств (8) и (10), получаем

$$|l_2 s - l_1 t| \leqslant 10\varepsilon.$$

Поскольку $|l_2 - l_1| < 8\varepsilon$, а $t \in [0,1]$, имеем $|l_1 t - l_2 t| < 8\varepsilon$, а значит $|l_2 s - l_2 t| < 18\varepsilon$. Тогда расстояние между $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leqslant |\gamma_1(t) - \gamma_2(s)| + |\gamma_2(s) - \gamma_2(t)| \\ \leqslant \varepsilon + |\gamma_2([t,s])| = \varepsilon + |l_2(s-t)| < 19\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < 19\varepsilon$ для любого $t \in [0, 1]$. Осталось оценить разницу между значениями функционала:

$$\begin{aligned}
|\theta(K_1) - \theta(K_2)| &\leqslant \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \big||\gamma_1(t) - \gamma_1(s)| - |\gamma_2(t) - \gamma_2(s)|\big|\, dtds \\
&\leqslant \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |\gamma_1(t) - \gamma_1(s) - \gamma_2(t) + \gamma_2(s)|\; dtds \\
&\leqslant \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \big(|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| + |\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|\big)\, dtds < 38\varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы выполнено с $C = 38$. □

Все готово для того, чтобы доказать непрерывность θ. Рассмотрим множество $K^*_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\}$. Ясно, что $K^*_\varepsilon \in \mathcal{K}$ и $d_H(K, K^*_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Выберем номер N, начиная с которого $d_H(K_n, K) < \varepsilon$. Тогда при $n > N$ имеем включение $K_n \subset K^*_\varepsilon$. В силу неравенства треугольника,

$$d_H(K_n, K^*_\varepsilon) \leqslant d_H(K_n, K) + d_H(K, K^*_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

По лемме 1, $|\theta(K) - \theta(K^*_\varepsilon)| < C\varepsilon$ и $|\theta(K_n) - \theta(K^*_\varepsilon)| < 2C\varepsilon$, а значит $|\theta(K_n) - \theta(K)| < 3C\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем требуемое.

Ключевой идеей доказательства непрерывности θ являлось соображение о том, что две близкие кривые γ_1 и γ_2 можно параметризовать так, чтобы расстояние между $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ было мало для всех t. Основываясь на этом факте, совершенно аналогичными рассуждениями можно доказать непрерывность θ_x. Более того, их этих рассуждений также вытекает непрерывность других функционалов, зависящих от хорд. Выделим отдельно два функционала, непрерывность которых будет важна для дальнейших доказательств.

Утверждение 2. *Пусть, как и выше, Y_1, Y_2 независимо и равномерно распределены на границе K, и $l(Y_1, Y_2)$ обозначает длину участка границы K между Y_1 и Y_2. Тогда функционалы*

$$\theta^{(2)}(K) = \mathbb{E}\,|Y_1 - Y_2|^2,$$

$$\theta^{(2)}_x(K) = \mathbb{E}\Big[|Y_1 - Y_2| \,\Big|\, l(Y_1, Y_2) = x \cdot \operatorname{per} K\Big]^2, \quad x \in (0, 1),$$

непрерывны в метрике Хаусдорфа.

§4. Верхняя граница для θ

В данном пункте мы докажем теоремы 1, 2. Произведя соответствующую гомотетию, можем предполагать, что $\operatorname{per} K=1$.

Рассмотрим параметризацию границы тела K: $\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$. Считаем, что $\gamma(t+1)=\gamma(t)$, $|\gamma'(t)|=1$. Кроме этого, выберем начало координат так, чтобы $\int\limits_0^1 \gamma(t)\ dt=0$. В терминах γ функционалы, определенные в (2), (6) и (11), можно переписать следующим образом:

$$\begin{gathered}\theta(K)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1|\gamma(s)-\gamma(t)|\ ds\ dt,\quad \theta_x(K)=\int\limits_0^1|\gamma(t+x)-\gamma(t)|\ dt,\\ \theta^{(2)}(K)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1|\gamma(s)-\gamma(t)|^2\ ds\ dt,\quad \theta_x^{(2)}(K)=\int\limits_0^1|\gamma(t+x)-\gamma(t)|^2\ dt.\end{gathered}\tag{11}$$

Функционалы в правой части отражают среднюю длину и средний квадрат длины хорды, стягивающей дугу длины x. При помощи θ_x равенство (11) можно продолжить

$$\begin{aligned}\theta(K)&=\int\limits_0^1\int\limits_0^1|\gamma(s)-\gamma(t)|\ ds\ dt=\int\limits_0^1\int\limits_0^1|\gamma(t+x)-\gamma(t)|\ dx\ dt\\ &=\int\limits_0^1\theta_x(K)\ dx=2\int\limits_0^{\frac12}\theta_x(K)\ dx.\end{aligned}\tag{12}$$

В последнем равенстве мы использовали соображение о том, что хорды, стягивающие дуги длины x и $1-x$, совпадают.

Докажем сначала теорему 2. Ключевой идеей доказательства является доказательство аналогичного результата для $\theta_x^{(2)}$, а затем применение неравенства Гёльдера.

Лемма 2. *Для любого выпуклого тела K верно неравенство $\theta^{(2)}(K)\leqslant\theta^{(2)}(B)$. Более того, для любого $x\in(0,1)$ выполнено $\theta_x^{(2)}(K)\leqslant\theta_x^{(2)}(B)$.*

Доказательство леммы. В силу симметрии, можем считать, что $x \leqslant 1/2$. Поскольку функционалы $\theta^{(2)}$ и $\theta_x^{(2)}$ непрерывны (см. утверждение 2), будем доказывать неравенства для тел с гладкой границей. Пусть $\gamma(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, как и ранее, натуральная параметризация границы K. Функции $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ гладкие и имеют период 1. Разложим их в ряды Фурье:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt)\right), \tag{13}$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos(2\pi kt) + d_k \sin(2\pi kt)\right). \tag{14}$$

Отметим, что свободные члены в разложении отсутствуют, так как выполняется равенство $\int\limits_0^1 \gamma(t)\ dt = 0$.

Докажем сначала первое утверждение леммы. Немного преобразуем искомую величину:

$$\begin{aligned}
\theta^{(2)}(K) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |\gamma(s) - \gamma(t)|^2\ ds\ dt \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \langle \gamma(s) - \gamma(t), \gamma(s) - \gamma(t)\rangle\ ds\ dt \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \gamma(s)^2 + \gamma(t)^2 - 2\langle \gamma(t), \gamma(s)\rangle\ ds\ dt \\
&= 2\int\limits_0^1 \gamma(t)^2\ dt - 2\left\langle \int\limits_0^1 \gamma(t)\ dt, \int\limits_0^1 \gamma(s)\ ds \right\rangle = 2\int\limits_0^1 \gamma(t)^2\ dt.
\end{aligned} \tag{15}$$

В последнем равенстве мы вновь воспользовались тем, что $\int\limits_0^1 \gamma(t) dt = 0$. Теперь используя равенства (13), (14) и (15), выразим $\theta^{(2)}(K)$ через коэффициенты разложения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}\theta^{(2)}(K) &= 2\int\limits_0^1 \gamma(t)^2\ dt = 2\int\limits_0^1 \mathbf{x}(t)^2 + \mathbf{y}(t)^2\ dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k^2+d_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2).\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, средний квадрат длины хорды равен сумме квадратов коэффициентов разложения. В частности $\theta^{(2)}(B) = \frac{1}{2\pi^2}$, так как в разложении окружности $a_1 = d_1 = \frac{1}{2\pi}$, а остальные коэффициенты равны нулю. Остается доказать, что для коэффициентов разложения границы K выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2) \leqslant \frac{1}{2\pi^2}. \tag{17}$$

Разложим производные функций $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в ряды Фурье:

$$\mathbf{x}'(t) = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(kb_k\cos(2\pi kt) - ka_k\sin(2\pi kt)\right), \tag{18}$$

$$\mathbf{y}'(t) = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(kd_k\cos(2\pi kt) - kc_k\sin(2\pi kt)\right). \tag{19}$$

Параметризация γ выбиралась так, чтобы $|\gamma'(t)| = 1$, в частности для любого t выполняется равенство $\mathbf{x}'(t)^2 + \mathbf{y}'(t)^2 = 1$. Проинтегрируем это равенство и воспользуемся разложениями (18) и (19):

$$1 = \int\limits_0^1 \mathbf{x}'(t)^2 + \mathbf{y}'(t)^2\ dt = 2\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2).$$

Перепишем полученное иначе

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2) = \frac{1}{2\pi^2}. \tag{20}$$

Собирая все вместе и используя тривиальное неравенство $1 \leqslant k$, получаем требуемое:

$$\begin{aligned}\theta^{(2)}(K) &= \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) = \frac{1}{2\pi^2} = \theta^{(2)}(B).\end{aligned} \tag{21}$$

Первая часть леммы доказана.

Для доказательства второй части нам дополнительно потребуется разложить в ряды Фурье функции $\mathbf{x}(t+x)$ и $\mathbf{y}(t+x)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big((a_k\cos(2\pi kx) + b_k\sin(2\pi kx))\cos(2\pi kt) \\ + (b_k\cos(2\pi kx) - a_k\sin(2\pi kx))\sin(2\pi kt)\big),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big((c_k\cos(2\pi kx) + d_k\sin(2\pi kx))\cos(2\pi kt) \\ + (d_k\cos(2\pi kx) - c_k\sin(2\pi kx))\sin(2\pi kt)\big).\end{aligned} \tag{23}$$

Преобразуем выражение $\theta_x^{(2)}(K)$:

$$\theta_x^{(2)} = \int_0^1 |\gamma(t+x) - \gamma(t)|^2\ dt = 2\int_0^1 \gamma(t)^2\ dt - 2\int_0^1 \langle\gamma(t+x), \gamma(t)\rangle\ dt.$$

Первый интеграл мы уже вычисляли, и знаем, что он равен сумме квадратов коэффициентов разложения. Второй интеграл вычисляется при помощи разложений (22) и (23):

$$\begin{aligned}2\int_0^1 \langle\gamma(t+x), \gamma(t)\rangle\ dt &= 2\int_0^1 \mathbf{x}(t+x)\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t+x)\mathbf{y}(t)\ dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2)\cos(2\pi kx).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\theta_x^{(2)}(K) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2)(1 - \cos(2\pi kx)). \tag{24}$$

Подставляя $a_k = d_k = \frac{1}{2\pi}$, находим значение для круга:

$$\theta_x^{(2)}(B) = \frac{1}{2\pi^2}(1 - \cos(2\pi x)). \tag{25}$$

Домножим равенство (20) на $1 - \cos(2\pi x)$:

$$(1 - \cos(2\pi x)) \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) = \frac{1}{2\pi^2}(1 - 2\pi x).$$

Собирая все вместе и используя неравенство

$$1 - \cos(2\pi k x) \leqslant k^2(1 - \cos(2\pi x)), \tag{26}$$

которое мы докажем чуть ниже, получаем требуемую оценку:

$$\theta_x^{(2)}(K) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2)(1 - \cos(2\pi k x)) \leqslant (1 - \cos(2\pi x)) \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) = \frac{1}{2\pi^2}(1 - 2\pi x) = \theta_x^{(2)}(B).$$

Для завершения доказательства леммы остается доказать неравенство (26). Это можно сделать следующим образом. Пусть $u \in [0, \pi]$. Рассмотрим следующую цепочку неравенств

$$\frac{\sin(ku)}{\sin u} \leqslant \left|\frac{\sin(ku)}{\sin u}\right| = \left|\frac{e^{iku} - e^{-iku}}{e^{iu} - e^{-iu}}\right| = \left|\sum_{l=0}^{k-1} e^{ilu} e^{i(k-1-l)u}\right| \leqslant k.$$

Поскольку синус на данном промежутке положителен, данное неравенство можно переписать в виде

$$\sin(ku) \leqslant k \sin u$$

или

$$k \sin(ku) \leqslant k^2 \sin u.$$

Проинтегрировав полученное неравенство от 0 до $2\pi x$, получим требуемое. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 2. Нужно доказать, что $\theta_x(K) \leqslant \theta_x(B)$. В силу неравенства Гёльдера и леммы 2, имеем:

$$\begin{aligned}\theta_x(K) &= \int\limits_0^1 |\gamma(t+x) - \gamma(t)|\ dt \leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 |\gamma(t+x) - \gamma(t)|^2\ dt} \\ &= \sqrt{\theta_x^{(2)}(K)} \leqslant \sqrt{\theta_x^{(2)}(B)}.\end{aligned} \tag{27}$$

В свою очередь для $K = B$ данная цепочка неравенств обращается в равенство, так как хорды окружности, стягивающие равные дуги равны, и в неравенстве Гёльдера достигается равенство. Значит $\theta_x(B) = \sqrt{\theta_x^{(2)}(B)}$. В итоге получаем

$$\theta_x(K) \leqslant \sqrt{\theta_x^{(2)}(B)} = \theta_x(B),$$

что завершает доказательство теоремы 2.

В силу (12), теорема 2 сразу влечет (5). Поэтому для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что круг – единственное тело, на котором достигается максимум функционала θ.

Действительно, пусть на теле K достигается максимум θ. Тогда для K в неравенстве (27) достигается равенство, в частности оно достигается в неравенстве Гёльдера. Значит все хорды, стягивающие дуги длины x, равны. Более того, равенство должно быть выполнено для всех x. Отметим точки $A_1, A_2, \dots A_n$ на границе K так, чтобы они разбивали границу на n равных частей. Заметим, что у полученного многоугольника должны быть равны все стороны и диагонали, так как они стягивают равные дуги. Значит этот многоугольник правильный. Устремим n к бесконечности, получим, что исходное тело K является кругом.

Список литературы

1. J. Sylvester, *Problem* 1491. The Educational Times (1864).
2. W. Blaschke, *Über affine Geometrie XI: Lösung des "Vierpunktproblems" von Sylvester äus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten* — Ber. Verh. Sáchs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., **69** (1917), 436—453.
3. G. Bonnet, A. Gusakova, Ch. Thäle, D. Zaporozhets, *Sharp inequalities for the mean distance of random points in convex bodies.* — Adv. Math. **326** (2021).
4. S. N. Majumdar, A. Comtet, J. Randon-Furling, *Random convex hulls and extreme value statistics.* — J. Statist. Phys. **138** (2010), 955–1009.

5. A. Hurwitz, *Sur le probleme des isoperimetres* — CR Acad. Sci. Paris **132** (1901), 401–403.

Tokmachev A. S. Mean distance between random points on the boundary of a convex body.

Consider a convex figure K on the plane. Let $\theta(K)$ denote the mean distance between two random points independently and uniformly selected on the boundary of K. The main result of the paper is that among all convex shapes of a fixed perimeter, the maximum value of $\theta(K)$ is reached at the circle and only at it. The continuity of $\theta(K)$ in the Hausdorff metric is also proved.

Международный математический
институт им. Леонарда Эйлера,
С.-Петербург, Россия
E-mail: chief.tokma4eff@yandex.ru

Поступило 12 сентября 2022 г.