Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

Е. Н. Симарова

ВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

§1. Введение

Одним из уже ставших классическими объектов изучения теории вероятностей является класс случайных величин с правильно меняющимися распределениями, традиционными учебниками по данной тематике являются монографии [6] и более поздняя [3]. Определение правильно меняющейся функции почти сто лет назад ввел в рассмотрение Карамата [7], и с тех пор мало у кого возникали сомнения в его общепринятости.

Коренным образом ситуация меняется в многомерном случае. Различными авторами, преследовавшими те или иные цели, было предложено множество определений многомерной медленно меняющейся функции, см., например, [4, 8–12] и др. Исторический обзор на эту тему можно найти в [13].

С нашей точки зрения, самым удачным и общепринятым является подход, предложенный Резником [4] и заключающийся в следующем.

Пусть дан случайный вектор $Z \in \mathbb{R}^d$. Распределение Z называется правильно меняющимся с параметром $\alpha > 0$ и спектральной вероятностной мерой μ на единичной сфере $\mathcal{S}^{d-1}$, если существует последовательность $b_n \to \infty$ и константа $c > 0$, такие что при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}\{b_n^{-1}|Z| > r, \quad Z/|Z| \in B\} \to cr^{-\alpha}\mu(B) \tag{1}$$

для всех борелевских множеств $B \subset \mathcal{S}^{d-1}$, таких что $\mu(\partial B) = 0$. Здесь мы полагаем $0/0 = 0$. В дальнейшем, во избежание ненужных технических сложностей, мы всегда предполагаем, что у Z нет атомов в

Ключевые слова: выпуклая оболочка, ослабленная сходимость, правильно меняющееся распределение, пуассоновский точечный процесс, слабая сходимость, случайная мера, экстремальные значения.

Работа выполнена при поддержке программы социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”, а также при поддержке РФФИ (грант 20-51-12004 ННИОа).

нуле. Для этого нам удобно немного модифицировать пространство и считать, что

$$Z \in E = [-\infty, \infty]^d \setminus \{0\}.$$

При этом предположении, соотношение (1) означает, что последовательность мер $n\mathbb{P}\{b_n^{-1}Z \in \cdot\}$ *ослабленно* (*vague*) сходится к предельной мере $cr^{-\alpha}\mathrm{d}r \times \mu$ в пространстве локально конечных мер на E при $n \to \infty$:

$$n\mathbb{P}\{b_n^{-1}Z \in \cdot\} \xrightarrow{v} \nu, \qquad \text{где} \qquad \nu = cr^{-\alpha}\mathrm{d}r \times \mu. \tag{2}$$

Данный вид сходимости является аналогом слабой сходимости вероятностных мер и используется, когда речь идет о более общих мерах. Более детально он будет рассмотрен нами в разделе 3.2.

Весьма полезным является тот факт, что свойство распределения быть правильно меняющимся можно переформулировать в терминах слабой сходимости построенных по нему эмпирических мер к предельному пуассоновскому точечному процессу: если $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ являются независимыми копиями вектора Z, то (2) эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{Z_i/b_n} \Rightarrow N_\nu, \tag{3}$$

где $\delta_{\mathbf{x}}$ обозначает дельта меру в точке $\mathbf{x}$, N_ν – пуассоновский точечный процесс на E с мерой интенсивности ν (см. определение в разделе 3.3), а значок "$\Rightarrow$" обозначает слабую сходимость. Общее определение вместе со свойствами слабой сходимости случайных элементов в полных сепарабельных метрических пространствах будет дано в разделе 3.1. Однако если мы хотим применить его к случайным мерам (коими являются левая и правая части (3)), нам потребуется ввести метрику на соответствующем пространстве мер. Данная метрика возникнет в результате метризации соответствующего топологического пространства с ослабленной топологией, сходимость в которой уже была упомянута выше. Все это вопросы мы детально обсудим в разделе 3.2.

Хорошо известно, что для того, чтобы (для простоты неотрицательная) случайная величина принадлежала области притяжения макс-устойчивого закона типа II (соответствующего распределению Фреше), необходимо и достаточно, чтобы ее правый хвост был правильно меняющейся функцией (см. [14, теорема 1.6.2]). Возникает вопрос, каким образом можно обобщить данный результат на многомерный случай.

В следующем параграфе мы представим нашу версию ответа на данный вопрос. В параграфе 3 собраны различные базовые сведения из теории слабой сходимости случайных мер и теории точечных процессов, необходимые для понимания доказательств наших результатов, находящихся в параграфе 4.

§2. Основной результат

Существует несколько способов обобщить понятие максимума на многомерный случай. Один из них – рассмотреть покоординатный максимум. Так, в [2, предложение 7.1] было показано, что для случайных векторов в $\mathbb{R}^d$, с вероятностью 1 принадлежащих положительному ортанту, наличие у их распределения свойства быть правильно меняющимся (см. (2)) эквивалентно

$$\vee_{i=1}^n b_n^{-1} Z_i \Rightarrow Y_0,$$

где $\vee$ обозначает покоординатный максимум, а Y_0 является случайным вектором с распределением

$$\mathbb{P}\{Y_0 \leqslant \mathbf{x}\} = e^{-\nu([\mathbf{0},\mathbf{x}]^c)}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

Здесь неравенство между векторами тоже покоординатное.

Другой подход, который мы собираемся рассмотреть в данной заметке, заключается в том, что экстремальные значения (максимум и минимум) совокупности числовых значений на прямой можно рассматривать как одномерную версию многомерного случая, в котором экстремальными значениями совокупности векторов являются вершины их выпуклой оболочки, которую мы будем обозначать $\mathrm{conv}(\cdot)$.

Нашей основной целью является установить эквивалентность между (2) и предельным соотношением

$$\mathrm{conv}\left(\sum_{i=1}^n \delta_{Z_i/b_n}\right) \Rightarrow \mathrm{conv}(N_\nu). \tag{4}$$

В то время как (2) следует из (4) без каких-либо дополнительных ограничений на меру ν, импликация (2) $\Rightarrow$ (4), как показывает пример 1 ниже, верна, вообще говоря, не всегда и требует дополнительных довольно естественных предположений. Связано это со следующим наблюдением.

Замечание 1. Если внутренность носителя меры ν содержит начало координат, $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{supp}(\nu))$, то $\operatorname{conv}(N_\nu)$ с вероятностью 1 будет выпуклым многогранником с непустой внутренностью, и в этом случае, как мы покажем, (2) влечет (4) без дополнительных предположений. Если же $0 \notin \operatorname{int}(\operatorname{supp}(\nu))$, может возникнуть следующая ситуация: мера ν может оказаться сконцентрированной на некоторой линейной гиперплоскости, при этом ее *относительная* внутренность будет содержать начало координат. В этом случае $\operatorname{conv}(N_\nu)$ с вероятностью 1 будет вырожденным многогранником размерности $d-1$ (с конечным числом вершин), при этом число вершин в левой части (4), как показывает пример 1 ниже, может стремиться к бесконечности. Поэтому в случае $0 \notin \operatorname{int}(\operatorname{supp}(\nu))$ мы дополнительно предполагаем, что значение меры ν на любой линейной гиперплоскости равно 0.

Сформулируем наши основные результаты. Обозначим $\mathcal{M}(E)$ пространство локально конечных мер на E с метрикой, совместимой с топологией ослабленной сходимости (подробности см. в разделе 3.2). Как и выше, рассмотрим случайный вектор $Z \in \mathbb{R}^d$ и его независимые копии $\{Z_n, n \geqslant 1\}$. Во всех дальнейших утверждениях мы считаем, что мера ν – это ненулевая мера с условием $\nu(E \setminus \mathbb{R}^d) = 0$.

Теорема 1. *Предположим, что Z имеет правильно меняющееся распределение: существуют мера $\nu \in \mathcal{M}(E)$ и последовательность $b_n \to \infty$, такие что при $n \to \infty$*

$$n\mathbb{P}\{b_n^{-1} Z \in \cdot\} \xrightarrow{v} \nu \quad \text{в} \quad \mathcal{M}(E). \tag{5}$$

Предположим также, что $\nu \in \mathcal{M}(E)$ удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:

(1) $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{supp}(\nu))$,
(2) $\nu(H) = 0$ *для любой линейной гиперплоскости H.*

Тогда при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{Z_i/b_n}\right) \Rightarrow \operatorname{conv}(N_\nu) \quad \text{в} \quad \mathcal{M}(E).$$

Приведем пример, показывающий, что при отсутствии дополнительных ограничений теорема неверна (см. также замечание 1).

Пример 1. Рассмотрим положительную случайную величину $X \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяющую условию

$$n\mathbb{P}\{b_n^{-1}X > t\} \to t^{-\alpha} \text{ при } \alpha > 0, t > 0, n \to \infty.$$

Рассмотрим случайную величину $Y = (X, \sqrt{X})$. Нетрудно видеть, что имеет место соотношение (5) с мерой ν, сконцентрированной на луче OX, и $\nu((t,\infty] \times 0) = t^{-\alpha}$. Но $\operatorname{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{Y_i}\right) \not\Rightarrow \operatorname{conv}(N_\nu)$ в $\mathcal{M}(E)$. Также не сойдутся и функционалы от выпуклых оболочек, например, количество вершин в левой части стремится к бесконечности, а в правой оно равно 2 с вероятностью 1.

Теорема, обратная к теореме 1, верна безо всяких дополнительных предположений.

Теорема 2. *Предположим, что существуют мера $\nu \in \mathcal{M}(E)$ и последовательность $b_n \to \infty$, такие что при $n \to \infty$*

$$\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{Z_i/b_n}\right) \Rightarrow \operatorname{conv}(N_\nu) \quad \text{в} \quad \mathcal{M}(E).$$

Тогда при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$n\mathbb{P}\{b_n^{-1}Z \in \cdot\} \xrightarrow{v} \nu \quad \text{в} \quad \mathcal{M}(E),$$

т.е. Z имеет правильно меняющееся распределение.

В размерности 1, где условие (2) теоремы 1 выполняется автоматически, теоремы 1, 2 приводят к хорошо известному факту.

Следствие 2.1. *Рассмотрим случайную величину $Z \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ и ее независимые копии $\{Z_n, n \geqslant 1\}$. Положим $c_\pm = \mathbb{P}\{\pm Z_i > 0\}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *при $t \to \infty$ выполнено*

$$\mathbb{P}\{\pm Z_i > t\} \sim c_\pm t^{-\alpha} L_\pm(t)$$

для некоторых $\alpha > 0$ и медленно меняющихся на бесконечности функций L_+, L_-;

(2) *при $n \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\left(\frac{\min_{i=1}^n Z_i}{b_n}, \frac{\max_{i=1}^n Z_i}{b_n}\right) \Rightarrow (\min N_\nu, \max N_\nu),$$

где $\nu = \big(c_+ t^{-\alpha} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t) + c_- |t|^{-\alpha} \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(t)\big)\mathrm{d}t$.

В частности, это означает, что нормированные максимум и минимум независимых величин с правильно меняющимися хвостами асимптотически независимы.

Завершим этот параграф установлением сходимости некоторых геометрических характеристик выпуклых оболочек.

Теорема 3. *Предположим, что Z имеет правильно меняющееся распределение: существуют мера $\nu \in \mathcal{M}(E)$ и последовательность $b_n \to \infty$, такие что при $n \to \infty$*

$$n\mathbb{P}\{b_n^{-1}Z \in \cdot\} \xrightarrow{v} \nu \quad \text{в} \quad \mathcal{M}(E).$$

Тогда при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$g\biggl(\operatorname{conv}\biggl(\sum_{i=1}^{n} \delta_{Z_i/b_n}\biggr)\biggr) \Rightarrow g(\operatorname{conv}(N_\nu)) \quad \text{в} \quad \mathcal{M}(E),$$

где

(1) *при $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{supp}(\nu))$ в качестве g можно взять количество k-мерных граней многогранника или его k-мерный объем, $k = 0, \dots, d$;*
(2) *если $\nu(H) = 0$ для любой линейной гиперплоскости H, то в качестве g можно взять объем, площадь поверхности или среднюю ширину.*

§3. Предварительные базовые сведения

3.1. Слабая сходимость. Пусть дана последовательность случайных элементов $\{X_n, n \geqslant 0\}$, принадлежащих некоторому полному сепарабельному метрическому пространству (S, d). Тогда говорят, что X_n *слабо сходится* к X_0 (обозначается $X_n \Rightarrow X_0$), если для любой непрерывной ограниченной функции $f : S \to \mathbb{R}^1$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, f(X_n) = \mathbb{E}\, f(X_0).$$

Важным свойством слабой сходимости, позволяющим выразить ее в терминах сходимости почти наверное, является утверждение теоремы Скорохода [15, предложение 0.2] о том, что $X_n \Rightarrow X_0$ тогда и только тогда, когда существует последовательность случайных элементов $\{X_n^*, n \geqslant 0\}$ из (S, d), заданных на равномерном вероятностном пространстве (отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских множеств и мерой

Лебега на ней), такая что

$$X_n \overset{d}{=} X_n^*, \quad n \geqslant 0, \quad \text{и} \quad X_n^* \to X_0^* \quad \text{п.н.}$$

Из теоремы Скорохода легко выводится следующая теорема о непрерывном отображении (см. [2, теорема 3.1]). Пусть $(S_i, d_i), i = 1, 2,$ – два полных сепарабельных метрических пространства. Предположим, что $\{X_n, n \geqslant 0\}$ – случайные элементы в (S_1, d_1) и $X_n \Rightarrow X_0$. Пусть функция $h\colon S_1 \to S_2$ такова, что

$$\mathbb{P}\{X_0 \in \{s_1 \in S_1\colon h \text{ разрывна в точке } s_1\}\} = 0.$$

Тогда

$$h(X_n) \Rightarrow h(X_0) \;\; \text{в} \;\; S_2.$$

Таким образом из одной слабой сходимости можно выводить другую, чем мы и воспользуемся при доказательстве первой части теоремы 1. Другой способ реализовать эту идею (который нам понадобится в доказательстве второй части теоремы 1) заключается в том, что если последовательность мер можно аппроксимировать слабо сходящейся последовательностью, то исходная тоже должна сходиться. Следующее утверждение называется второй теоремой о совместной сходимости.

Пусть $\{X_{M_n}, X_M, X, Y_n, n \geqslant 1, M \geqslant 1\}$ являются случайными элементами в полном сепарабельном метрическом пространстве (S, d), заданными на одном вероятностном пространстве. Предположим, что для любого M выполнено

$$X_{M_n} \Rightarrow X_M \;\; \text{при} \;\; n \to \infty, \tag{6}$$

а также

$$X_M \Rightarrow X \;\; \text{при} \;\; M \to \infty. \tag{7}$$

Также предположим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{d(X_{M_n}, Y_n) > \varepsilon\} = 0. \tag{8}$$

Тогда имеет место сходимость

$$Y_n \Rightarrow X \;\; \text{при} \;\; n \to \infty.$$

3.2. Слабая сходимость случайных мер. В данном разделе нам требуется приспособить общую теорию из предыдущего раздела к ситуации, когда случайные элементы являются случайными мерами, рассматриваемыми нами в данной заметке. Для этого требуется задать метрику на пространстве случайных мер. Сначала мы сделаем это пространство топологическим, а затем метризуем его.

Хотя содержимое этого и следующего параграфов прежде всего относится к конкретному пространству $E = [-\infty, \infty]^d \setminus \{0\}$, которое фигурирует в результатах статьи, все изложенное остается справедливым для произвольного локально компактного топологического пространства E со счетной базой.

Обозначим $\mathcal{M}(E)$ пространство локально конечных мер на E (мер, принимающих конечные значения на компактах), а также обозначим $C_K^+(E)$ множество непрерывных функций $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ с компактным носителем. Зададим на $\mathcal{M}(E)$ ослабленную топологию (vague topology), генерируемую отображениями

$$\mu \mapsto \int\limits_E f \mathrm{d}\mu \quad \text{для всех} \quad f \in C_K^+(E).$$

В частности, μ_n сходится ослабленно к μ (пишется $\mu_n \overset{v}{\to} \mu$), если

$$\int\limits_E f \mathrm{d}\mu_n \to \int\limits_E f \mathrm{d}\mu \quad \text{для всех} \quad f \in C_K^+(E).$$

В случае вероятностных мер слабая и ослабленная сходимость связаны следующим образом (см., например, [16, лемма 4.20]): если для *вероятностных* мер $\mu_n \in \mathcal{M}(E)$ и некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}(E)$ выполнено $\mu_n \overset{v}{\to} \mu$, то условия

$$(1) \quad \mu(E) = 1 \quad \text{и} \quad (2) \quad \text{семейство } (\mu_n) \text{ плотно}$$

равносильны, и каждое из них влечет $\mu_n \Rightarrow \mu$. Естественно, слабая сходимость всегда влечет ослабленную.

Рассмотрим произвольную последовательность функций $\{f_n, n \geqslant 1\}$, плотную в $C_K^+(E)$. Нетрудно показать (см., например, [16, теорема A.2.3]), что

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\int\limits_E f_i \mathrm{d}\mu_1 - \int\limits_E f_i \mathrm{d}\mu_2| \wedge 1}{2^i}$$

является метрикой на $\mathcal{M}(E)$, метризующей ослабленную топологию и превращающей $\mathcal{M}(E)$ в полное сепарабельное метрическое пространство.

Важный критерий проверки слабой сходимости в $\mathcal{M}(E)$ состоит в следующем (см. [2, с. 54]): $\mu_n \Rightarrow \mu_0$ в $\mathcal{M}(E)$ тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любых функций $f_1, \dots, f_k \in C_K^+(E)$ выполнено

$$\left(\int\limits_E f_1 \mathrm{d}\mu_n, \dots, \int\limits_E f_k \mathrm{d}\mu_n\right) \Rightarrow \left(\int\limits_E f_1 \mathrm{d}\mu, \dots, \int\limits_E f_k \mathrm{d}\mu\right) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^k. \tag{9}$$

3.3. Пуассоновский точечный процесс. Среди локально конечных случайных мер на E особую роль играют меры, с вероятностью 1 принимающие только целочисленные значения и называемые точечными процессами, а среди последних центральное положение занимает пуассоновский точечный процесс. Пусть $\lambda \in \mathcal{M}(E)$. Случайная локально конечная мера N_ν на E называется пуассоновским точечным процессом с мерой интенсивности λ, если выполнены следующие два условия:

(1) для любого борелевского множества A и $k = 0, 1, \dots$ выполнено

$$\mathbb{P}\{N_\lambda(A) = k\} = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda(A)}(\lambda(A))^k}{k!}, & \text{если } \lambda(A) < \infty, \\ 0, & \text{если } \lambda(A) = \infty; \end{cases}$$

(2) если борелевские множества $A_1, \dots, A_k$ попарно не пересекаются, то величины $N_\lambda(A_1), \dots, N_\lambda(A_k)$ независимы.

Базовым инструментом для вычисления средних значений различных функционалов от пуассоновского точечного процесса N_λ является формула Сливняка–Мекке. Обозначим $\mathcal{M}_p(E)$ подмножество мер из $\mathcal{M}(E)$, принимающих только целые значения, и рассмотрим неотрицательную измеримую функцию $f\colon \mathcal{M}_p(E) \times E^m \to \mathbb{R}$. Выполнено следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sum_{(x_1,\dots,x_m) \in E^m_{\neq}} f(N_\lambda, x_1, \dots, x_m) \qquad (10) \\ &= \int\limits_E \dots \int\limits_E \mathbb{E} f(N_\lambda + \sum_{i=1}^m \delta_{x_i}, x_1, \dots, x_m) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_m). \end{aligned}$$

§4. Доказательства

4.1. Доказательство теоремы 1 в предположении условия 1. Рассмотрим отображение

$$h : \mathcal{M}_p(E) \to \mathcal{M}_p(E), \tag{11}$$

сопоставляющее точечной мере ее выпуклую оболочку. Обозначим через $C(h)$ множество элементов $\mathcal{M}_p(E)$, выпуклая оболочка которых не является многогранником, а также множество тех элементов, выпуклая оболочка которыз является многогранником, у которого есть грань размерности не выше $d-1$, на которой находятся хотя бы $d+1$ точек. Дальнейшее доказательство разбивается на 2 шага:

(1) доказательство того, что $\mathbb{P}\{N_\nu \in C(h)\} = 0$;
(2) доказательство того, что $\mathcal{M}_p(E) \setminus C(h)$ – это множество точек непрерывности h.

После этого можно применить теорему о непрерывном отображении (см. раздел 3.1) и получить теорему 1 в предположении условия 1.

Шаг 1: Обозначим $B_r(x) = \{y \in E\colon \|y-x\| \leqslant r\}$. Докажем, что

$$\mathbb{P}\{\exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(0) \subset \operatorname{conv}(N_\nu)\} = 1. \tag{12}$$

Это равносильно тому, что

$$\mathbb{P}\{\exists \text{ полупространство } H \subset \mathbb{R}^d:\ 0 \in H,\ N_\nu \cap H = \varnothing\} = 0.$$

Напомним, что мера μ является сферической частью меры ν, см. (2). Так как $0\in\operatorname{int}(\operatorname{supp}(\nu))$, следовательно, $0\in\operatorname{int}(\operatorname{supp}(\mu))$ и $H \cap \operatorname{supp}(\mu) \neq \varnothing$. Существуют d полупространств $H_1, \ldots, H_d$, проходящих через 0, чьи направляющие вектора имеют рациональные координаты и $\bigcap\limits_{i=1}^{d} H_i \cap \operatorname{supp}(\mu) \neq \varnothing$. Следовательно, $\nu(\bigcap\limits_{i=1}^{d} H_i) = \infty$, и

$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\bigcap_{i=1}^{d} H_i \cap N_\nu\Big| = 0\Big\} = 0. \tag{13}$$

Объединяя (13) по всем пересечениям d гиперплоскостей с рациональными направляющими векторами, получаем (12).

Заметим, что

$$\Big\{\exists\varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(0) \subset \mathrm{conv}(N_\nu)\Big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{B_{\frac{1}{n}}(0) \subset \mathrm{conv}(N_\nu)\Big\}, \qquad (14)$$

а также

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{|\mathrm{conv}\,(N_\nu)| = \infty |\, B_{\frac{1}{n}}(0) \subset \mathrm{conv}(N_\nu)\} \qquad (15)\\ &\leqslant \mathbb{P}\Big\{ \Big|\mathrm{conv}(N_\nu) \cap \Big(E \setminus B_{\frac{1}{n}}(0)\Big)\Big| = \infty\Big\} = 0.\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (12), (14) и (15), получаем, что с вероятностью 1 количество точек в выпуклой оболочке конечно.

Заметим, что вероятность того, что в выпуклой оболочке будет грань, содержащая хотя бы $d+1$ вершину, вследствие (12) не больше чем вероятность того, что есть $d+1$ точка, лежащая на гиперплоскости, не проходящей через 0. Поймем, что эта вероятность равна 0. Для этого воспользуемся формулой Сливняка-–Мекке (10). Возьмем $m = d+1$, а $f(x_1,\dots,x_{d+1})$ – это индикатор того, что точки $x_1,\dots,x_{d+1}$ лежат на одной гиперплоскости размера $d-1$, не проходящей через 0. Тогда величина слева в формуле (10) ограничивает сверху вероятность того, что в пуассоновском процессе существует $d+1$ точка, лежащая на одной гиперплоскости, не проходящей через 0. Справа в формуле (10) стоит

$$\int\limits_E \dots \int\limits_E \nu(\mathrm{aff}(x_1,\dots,x_d)) \cdot \mathbf{1}\{0 \notin \mathrm{aff}(x_1,\dots,x_d)\}\nu(\mathrm{d}x_1)\dots\nu(\mathrm{d}x_d).$$

Это равенство верно для всех $(x_1,\dots,x_d)$ за исключением тех, у которых $\dim(\mathrm{aff}(x_1,\dots,x_d)) \leqslant d–2$, и при этом $0 \notin \mathrm{aff}(x_1,\dots,x_d)$. Заметим, что мера ν удовлетворяет соотношению (2), поэтому мера таких точек в E^d равна 0 и на интеграл не влияет. Также заметим, что, аналогично, если $0 \notin \mathrm{aff}(x_1,\dots,x_d)$, то $\nu(\mathrm{aff}(x_1,\dots,x_d)) = 0$, следовательно и весь интеграл равен 0.

Шаг 2: Рассмотрим отображение h из (11). Поймем, что для любых $\xi \in \mathcal{M}_p(E) \setminus C(h)$ и открытого $U \subset \mathcal{M}_p(E)$, таких что $h(\xi) \in U$, существует открытое $V \subset \mathcal{M}_p(E)$, такое что

$\xi \in V \subset h^{-1}(U)$. Это будет означать, что ξ – это точка непрерывности h. Зафиксируем ξ и U и построим подходящее множество V. Заметим, что топология на $\mathcal{M}(E)$ порождается открытыми множествами вида

$$\Big\{\mu \in M_+(E)\colon \int\limits_E f_i(x)\mu(\mathrm{d}x) \in (a_i, b_i),\ i = 1, \dots, m\Big\}, \tag{16}$$

где $f_i \in C_K^+(E)$, $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$, поэтому достаточно рассматривать только множества U вида (16).

Из того, что $\xi \in (\mathcal{M}_p(E) \setminus C(h))$, следует, что $h(\xi)$ представимо в виде конечной суммы некоторых дельта мер: $h(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{Y_i}$. По определению h, ξ имеет вид

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_i} + \sum_{i} \delta_{\widehat{Y}_i}, \tag{17}$$

где $\widehat{Y}_i$ – это точки, не принадлежащие выпуклой оболочке ξ. По определению $C(h)$ и $\mathcal{M}_p(E)$, существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых $X_i \in B_\varepsilon(Y_i)$ в выпуклой оболочке точек $\{X_1, \dots, X_n\}$ останется n вершин общего положения, а также выполнено $\mathrm{conv}(\sum \delta_{\widehat{Y}_i}) + B_\varepsilon(0) \subset \mathrm{conv}(\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{X_i})$. Также потребуем, чтобы $0 \notin B_\varepsilon(Y_i)$ для любого $i = 1, \dots, n$, и чтобы эти шары попарно не пересекались. Теперь построим открытое множество V вида (16), содержащее ξ и лежащее в $h^{-1}(U)$.

Рассмотрим непрерывные функции со следующими условиями:

$$\widetilde{f}_{1,i}(x) = \begin{cases} \in [\frac{3}{4}, 1), & \text{если } \|x - Y_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}; \\ \in (0, \frac{3}{4}), & \text{если } \|x - Y_i\| \in (\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}); \\ 0, & \text{если } \|x - Y_i\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}; \end{cases} \tag{18}$$
$$\widetilde{a}_{1,i} = \frac{1}{2}, \widetilde{b}_{1,i} = \frac{3}{2}.$$

$$\widetilde{f}_{2,i}(x) = \begin{cases} \in [\frac{3}{4}, 1), & \text{если } \|x - Y_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}; \\ \in [0, \frac{3}{4}), & \text{если } \|x - Y_i\| \in (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon); \\ 0, & \text{если } \|x - Y_i\| \geqslant \varepsilon; \end{cases} \tag{19}$$

$$\widetilde{a}_{2,i} = \frac{1}{2}, \widetilde{b}_{2,i} = \frac{3}{2}.$$

Эти 2 функции дают то, что для любого η, удовлетворяющего ограничениям (18), (19), верно, что в $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y_i)$ содержится одна точка η. Еще построим непрерывную функцию $\widetilde{f}_0$:

$$\widetilde{f}_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin \operatorname{conv}(\sum \delta_{\widehat{Y}_i}) + B_\varepsilon(0); \\ 0, & \text{если } x \in \operatorname{conv}(\sum \delta_{\widehat{Y}_i}) + B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0); \\ \in (0, 1), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{20}$$

$$\widetilde{a}_0 = n - \frac{1}{2}, \widetilde{b}_0 = n + \frac{1}{2}.$$

Заметим, что для любого $\eta \in \mathcal{M}_p(E)$, удовлетворяющего ограничениям из (18), (19) и (20), верно, что $h(\eta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ и $\|X_i - Y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Теперь построим непрерывные функции $\widetilde{f}_i, i = 1, \ldots, m$, зависящие от окрестности U :

$$\widetilde{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{если существует j } : \|x - Y_j\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}; \\ 0, & \text{если для любого } j\colon \|x - Y_j\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}; \\ \in [0, f_i(x)), & \text{иначе;} \end{cases} \tag{21}$$

$$\widetilde{a}_i = a_i, \widetilde{b}_i = b_i.$$

Эти функции также из $C_K^+(E)$. Нетрудно видеть, что окрестность V, построенная с помощью функций и ограничений из (18), (19), (20) и (21), подходит.

4.2. Доказательство теоремы 3 в предположении условия 1. Сформулируем следующую лемму, ее доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1 в предположении условия 1 (см. раздел 4.1).

Лемма 1. *Пусть функция* $g\colon \mathcal{M}_p(E) \to \mathbb{R}^1$ *такова, что для любой* $Y \in \mathcal{M}_p(E) \setminus C(h)$ *с* $\operatorname{conv}(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{Y_i}$ *верно, что для любого* $\varepsilon_1 > 0$

существует $\varepsilon_2 > 0$, *такой что для любых* $X_1, \ldots, X_n$, *с условием* $X_i \in B_{\varepsilon_2}(Y_i), i = 1, \ldots, n$, *верно, что* $|g(Y) - g(\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i})| < \varepsilon_1$. *Тогда при выполнении условия* 1 *теоремы* 3 *верна следующая сходимость*

$$g\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{Z_i/b_n}\right)\right) \Rightarrow g\left(\operatorname{conv}\left(N_\nu\right)\right) \text{ в } \mathbb{R}^1.$$

Множество $C(h)$ *определено в разделе* 4.1.

Взяв в качестве g соответсвующие геометрические характеристики, получим теорему 3 в предположении условия 1.

4.3. Доказательство теоремы 1 в предположении условия 2. Предположим, что $\nu(H) = 0$ для любой линейной гиперплоскости H. Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 2. *Если* $\nu(H) = 0$ *для любой линейной гиперплоскости* H, *то для любого* $r > 0$ *выполнено*

$$\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{Z_i/b_n} \cap (E \setminus B_r(0))\right) \Rightarrow \operatorname{conv}\left(N_{\nu_r}\right) \text{ в } \mathcal{M}_p(E), \tag{22}$$

где мера ν_r *– это мера* ν, *суженная на* $E \setminus B_r(0)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h_r \colon \mathcal{M}_p(E) \to \mathcal{M}_p(E)$, заданную следующим образом:

$$h_r\left(\sum_i \delta_{Y_i}\right) = \operatorname{conv}\left(\sum_i \delta_{Y_i} \cap (E \setminus B_r(0))\right). \tag{23}$$

Применив функцию h_r к правой и левой части формулы (3), которая эквивалентна условию (5), получим правую и левую часть формулы (22). Для доказательства того, что левая часть (22) тоже слабо сходится к правой, воспользуемся теоремой о непрерывном отображении (см. раздел 3.1). Дальнейшее доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 1 в предположении условия 1.

Новым множеством $C(h)$ назовем множество элементов

$$Y = \sum_i \delta_{X_i} \in \mathcal{M}_p(E),$$

обладающих хотя бы одним из перечисленных свойств:

- количество точек X_i вне шара $B_{\frac{r}{2}}(0)$ бесконечно;

- существует i, такое что $|X_i| = r$;
- $\operatorname{conv}\left(\sum\limits_i \delta_{X_i} \cap (E \setminus B_r(0))\right)$ имеет грань, на которой лежит хотя бы $d+1$ точка из множества $\{X_i\}$.

Аналогично рассуждениям из раздела 4.1, имеем $\mathbb{P}\{N_\nu \in C(h)\} = 0$. Шаг 2 также аналогичен. В формуле (17) надо считать, что Y_i – это точки выпуклой оболочки $\operatorname{conv}\left(\sum\limits_i \delta_{Y_i} \cap (E \setminus B_r(0))\right)$, а точки $\widehat{Y}_i$ – это оставшиеся точки с условием, что $|\widehat{Y}_i| > r$. К существующим ограничениям на ε из шага 2 раздела 4.1 добавим еще условие, что $B_\varepsilon(Y_i) \cap B_r(0) = \varnothing$. Так как $h(\xi) \notin C(h)$, то существует такое $\widehat{\varepsilon} > 0$, что в $B_r(0) \setminus B_{\widehat{\varepsilon}}$ нет точек из $h(\xi)$. Тогда определим функцию $\widehat{f}_0$, как

$$\widehat{f}_0(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \notin \left(\operatorname{conv}(\sum \delta_{\widehat{Y}_i}) + B_\varepsilon(0)\right) \cup B_r(0); \\ 0, \text{ если } x \in \left(\operatorname{conv}(\sum \delta_{\widehat{Y}_i}) + B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)\right) \cup B_{\widehat{\varepsilon}}(0); \\ \in (0,1), \text{ иначе.} \end{cases} \tag{24}$$

$$\widetilde{a}_0 = n - \frac{1}{2},\ \widetilde{b}_0 = n + \frac{1}{2}.$$

Тогда функции (18), (19), (24) и (20) дадут окрестность V, содержащую ξ и лежащую в $h_r^{-1}(U)$, где U – это множество вида (16). Следовательно, $\mathcal{M}_p(E) \setminus C(h)$ – это множество точек непрерывности h_r. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Зафиксируем некоторое произвольное $k \in \mathbb{N}$ и $f_1, \ldots, f_k \in C_K^+(E)$ и для них докажем сходимость (9). Согласно критерию слабой сходимости в $\mathcal{M}(E)$ (см. раздел 3.2), отсюда будет следовать и теорема 1 в предположении условия 2.

Дальнейшее доказательство состоит в применении второй теоремы о совместной сходимости (см. раздел 3.1). Заметим, что в доказательстве этой теоремы (см. [2, теорема 3.5]) общая область определения требуется только для X_{M_n} и Y_n, чтобы уметь считать расстояние, и требование общей области определения для всех случайных величин излишне.

Обозначим

$$\xi_n = \operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^n \delta_{\frac{Z_i}{b_n}}\right), \quad \xi_0 = \operatorname{conv}(N_\nu). \tag{25}$$

Рассмотрим некоторую положительную убывающую последовательность $r(m) \to 0$ при $m \to \infty$ и определим функцию $g_m = h_{r(m)}$, где функция $h_{r(m)}$ взята из (23). Определим

$$\eta_{M_n} = g_M \left(\mathrm{conv}(\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{Z_i}{b_n}}) \right),$$

$$\eta_M = g_M \left(\mathrm{conv}\left(N_\nu\right)\right) \stackrel{d}{=} \mathrm{conv}\left(N_{\nu_{r(M)}}\right).$$

Также определим случайные величины $\{X_{M_n}, X_M, X, Y_n, n \geqslant 1, M \geqslant 1\}$

$$X_{M_n} = \left(\int\limits_E f_1 \mathrm{d}\eta_{M_n}, \ldots, \int\limits_E f_k \mathrm{d}\eta_{M_n} \right), \tag{26}$$

$$X_M = \left(\int\limits_E f_1 \mathrm{d}\eta_M, \ldots, \int\limits_E f_k \mathrm{d}\eta_M \right),$$

$$Y_n = \left(\int\limits_E f_1 \mathrm{d}\xi_n, \ldots, \int\limits_E f_k \mathrm{d}\xi_n \right),$$

$$X = \left(\int\limits_E f_1 \mathrm{d}\xi_0, \ldots, \int\limits_E f_k \mathrm{d}\xi_0 \right).$$

Применение второй теоремы о совместной сходимости (см. раздел 3.1) к этим случайным величинам докажет (9), а следовательно, и теорему 1 в предположении условия 2.

Сходимость (6) вытекает из леммы 2 и критерия сходимости в $\mathcal{M}(E)$, указанного в разделе 3.2.

Заметим, что существует $s > 0$, такое что

$$\mathrm{supp}(f_i) \subset (E \setminus B_s(0)) \ \text{ для всех } i = 1, \ldots, k. \tag{27}$$

В дальнейшем, мы считаем, что $r(m) < s$.

Покажем сходимость (7). Заметим, что случайные величины N_ν и $N_{\nu_{r(m)}}$ в силу свойств пуассоновского процесса могут быть заданы на одном вероятностном пространстве. Это не влияет на слабую сходимость, поэтому можно считать, что величины X_M, X из (26) также определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Заметим, что в силу этого, а также формулы (27), выполнено

$$X_m = X + \widehat{X_m},$$

где $\widehat{X}_m^i$ – это сумма значений функции f_i по всем точкам пуассоновского процесса N_ν, оказавшимся в $N_{\nu_{r(m)}}$, по модулю больших s, но не оказавшимся в $\operatorname{conv}(N_\nu)$. Будем называть такие точки лишними, и их множество обозначим через A_m. Докажем, что $\widehat{X}_m \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, это повлечет (7). Заметим, что

$$\mathbb{P}\{|\widehat{X}_m| > \varepsilon\} \leqslant \mathbb{P}\{|A_m| \geqslant 1\}.$$

Определение 1. *Назовем точку P из N_{ν_r} подозрительной, если $|P| > s$, где s из (27), $P \in \operatorname{conv}(N_{\nu_r})$, но любая опорная гиперплоскость $\operatorname{conv}(N_{\nu_r})$, проходящая через P, также пересекает $B_r(0)$. Исключение сделаем только для точек P из N_{ν_r}, для которых существует гиперплоскость, проходящая через 0, такая что $\operatorname{supp}(\nu)$ лежит целиком по одну сторону от этой гиперплоскости. С вероятностью 1 на отрезке $[0, P]$ точек нет, и такие точки лежат в выпуклой оболочке. Множество подозрительных точек мы обозначим через $\widehat{A}_m$.*

Заметим, что $A_m \subset \widehat{A}_m$ с вероятностью 1. Следовательно,

$$\mathbb{P}\{|A_m| \geqslant 1\} \leqslant \mathbb{P}\{|\widehat{A}_m| \geqslant 1\}.$$

Лемма 3.

$$|\widehat{A}_m| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty.$$

Доказательство. Как сказано ранее, $N_{\nu_{r(m)}}$ и N_ν могут быть заданы на одном вероятностном пространстве и связаны соотношением

$$N_{\nu_{r(m)}} = N_\nu \cap \left(E \setminus B_{r(m)}(0)\right).$$

Докажем, что имеет место сходимость почти наверное. Рассмотрим как меняются точки выпуклой оболочки $N_{\nu_{r(m)}}(\theta)$, где $\theta \in \Omega$. Заметим, что при фиксированном θ число точек по модулю, больших s, фиксировано и конечно с вероятностью 1. Также имеем $\widehat{A}_m(\theta) \supset \widehat{A}_n(\theta)$ при $m \leqslant n$. Если существует n, такое что $\widehat{A}_n(\theta) = \varnothing$, то $|\widehat{A}_m(\theta)| \to 0$ при $m \to \infty$. Иначе существует точка $P \in \cap_m \widehat{A}_m(\theta)$. Обозначим через S_m множество направляющих векторов тех гиперплоскостей, что являются опорными для $\operatorname{conv}(N_{\nu_{r(m)}})$, проходят через точку P и пересекают $B_{r(m)}(0)$. Заметим, что S_m – это непустой компакт, $S_m \supset S_{m+1}$, значит $\cap_m S_m \neq \varnothing$. Следовательно, существует гиперплоскость, проходящая через 0 и P, оставляющая все остальные точки $N_\nu(\theta)$ в одном гиперпространстве. Покажем, что с вероятностью 1 точка P не является подозрительной, поэтому вообще не должна лежать в $\widehat{A}_m$. Действительно, рассмотрим пересечение $\mathrm{supp}(\nu)$ и гиперпространства, не содержащего точек $N_\nu(\theta)$. Мера ν имеет вид (2), поэтому получившееся пересечение – это конус. Если X не лежит на $\partial(\mathrm{supp}(\nu))$, то получившееся пересечение имеет ненулевую меру. Заметим, что $\mathrm{supp}(\mu)$ – это компакт, там есть счетное всюду плотное множество направлений $\{l_1, l_2, \ldots\} \in \mathrm{supp}(\mu)$. Определим через $V(A)$ минимальный конус с центром в 0, содержащий множество A. Рассмотрим множество конусов вида $V(B_q(l_i))$, где $q \in \mathbb{Q}$. Их счетное число, $l_i \in \mathrm{supp}(\mu)$, что влечет $\nu(V(B_q(l_i))) \neq 0$ для всех $i \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\{\exists i \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}\colon V(B_q(l_i)) \text{ не содержит точек } N_\nu\} = 0.$$

Любой конус с ненулевой мерой ν содержит в себе некоторый $V(B_q(l_i))$, следовательно, $\mathrm{supp}(\nu)$ лежит по одну сторону от этой гиперплоскости. $\square$

Теперь докажем (8). Заметим, что η_{M_n} и ξ_n из (25) определены на одном вероятностном пространстве. Аналогично определим через $A_{M,n}(\theta)$ множество точек η_{M_n}, по модулю больших s из (27), принадлежащих $\mathrm{conv}(\eta_{M_n}(\theta))$, но не принадлежащих $\mathrm{conv}(\xi_n(\theta))$. Тогда

$$\mathbb{P}\{d(X_{M_n}, Y_n) > \varepsilon\} \leqslant \mathbb{P}\{|A_{M,n}| \geqslant 1\}.$$

Также определим через $\widehat{A}_{M,n}(\theta)$ множество точек $\eta_{M_n}(\theta)$, по модулю больших s из (27), принадлежащих $\mathrm{conv}(\eta_{M_n}(\theta))$, со свойством, что любая опорная гиперплоскость к $\mathrm{conv}(\eta_{M_n}(\theta))$ в этой точке также пересекает и $B_{r(m)}(0)$, за исключением точек, для которых существует гиперплоскость, проходящая через 0 и эту точку, оставляющая $\mathrm{supp}(\nu)$ с одной стороны от этой гиперплоскости. Аналогично лемме 3, $A_{M,n}(\theta) \subset \widehat{A}_{M,n}(\theta)$ почти наверное, следовательно,

$$\mathbb{P}\{|A_{M,n}| \geqslant 1\} \leqslant \mathbb{P}\{|\widehat{A}_{M,n}| \geqslant 1\}.$$

Рассмотрим функцию H, сопоставляющую $\sum\limits_i \delta_{X_i}$ число $\widehat{A}_{M,n}$. Аналогично лемме 1,

$$\mathbb{P}\{\mathrm{conv}(N_{\nu_{r(m)}}) \in \text{множество точек отсутствия непрерывности } H\} = 0,$$

следовательно, по теореме о непрерывном отображении (см. раздел 3.1) и лемме 2,

$$H\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{\frac{Z_i}{b_n}}\cap(E\setminus B_r(0))\right)\right)\Rightarrow H\left(\operatorname{conv}\left(N_{\nu_r}\right)\right)\ \text{в } \mathbb{R}^1.$$

Функция H целочисленная, следовательно

$$\mathbb{P}\Big\{H\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{\frac{Z_i}{b_n}}\cap(E\setminus B_r(0))\right)\right)\geqslant 1\Big\}\to\mathbb{P}\{H\left(\operatorname{conv}\left(N_{\nu_r}\right)\right)\geqslant 1\}.$$

Переписав это с другими обозначениями, получаем, что

$$\mathbb{P}\{|\widehat{A}_{M,n}|\geqslant 1\}\to\mathbb{P}\{|\widehat{A}_{M}|\geqslant 1\}\ \text{при } n\to\infty.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{d(X_{M_n},Y_n)>\varepsilon\}&\leqslant\lim_{M\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{|\widehat{A}_{M,n}|\geqslant 1\}\\&=\lim_{M\to\infty}\mathbb{P}\{|\widehat{A}_{M}|\geqslant 1\}=0.\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из леммы 3. Итого, формула (8) доказана, а следовательно доказана и теорема 1 в предположении условия 2.

4.4. Доказательство теоремы 3 в предположении условия 2. В этом параграфе аналогом $C(h)$ будет служить следующее множество.

Определение 2. *Множеством $\widehat{C}(h)$ назовем множество элементов $Y=\sum_i\delta_{X_i}\in\mathcal{M}_p(E)$, обладающих хотя бы одним из перечисленных свойств:*

- *существует $n\in\mathbb{N}$, такое что точек X_i вне шара $B_{\frac{1}{n}}(0)$ бесконечно много;*
- *существует $n\in\mathbb{N}$, такое что $|X_i|=\frac{1}{n}$;*
- *существует $n\in\mathbb{N}$, такое что $\operatorname{conv}\left(\sum_i\delta_{X_i}\cap\left(E\setminus B_{\frac{1}{n}}(0)\right)\right)$ имеет грань, на которой лежит хотя бы $d+1$ точка из множества $\{X_i\}$;*
- $0\notin\operatorname{conv}(\sum_i\delta_{X_i})$.

Лемма 4. *Пусть* $Y = \sum_i \delta_{X_i} \in \mathcal{M}_p(E) \setminus \widehat{C}(h)$, *а*

$$\operatorname{conv}\left(\sum_i \delta_{X_i} \cap \left(E \setminus B_{\frac{1}{n}}(0)\right)\right) = \sum_{i=1}^m \delta_{X_i}.$$

Обозначим через $D_{n,r}(Y)$ *следующее множество*

$$D_{n,r}(Y) = \{\widehat{Y} \in \mathcal{M}_p(E) \mid \operatorname{conv}\left(\widehat{Y} \cap \left(E \setminus B_{\frac{1}{n}}(0)\right)\right) = \sum_{i=1}^m \delta_{\widehat{X}_i},$$

$$\|\widehat{X_i} - X_i\| < r \text{ для всех } i = 1, \ldots, m\}.$$

Рассмотрим функцию $g\colon \mathcal{M}_p(E) \to \mathbb{R}$. *Пусть для любого* $Y \in \mathcal{M}_p(E) \setminus \widehat{C}(h)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $N \in \mathbb{N}$, *что для любого* $n > N$ *существует такое* $r(n)$, *что для любого* $\widehat{Y} \in D_{n,r(n)}(Y)$ *выполнено*

$$\left\|g(\widehat{Y}) - g(Y)\right\| < \varepsilon;$$

Тогда g *непрерывна на множестве* $\mathcal{M}_p(E) \setminus \widehat{C}(h)$.

Доказательство. Непрерывность в точке $Y \in \mathcal{M}_p(E)$ равносильна тому, что для любого интервала $I = (a, b)$, такого что $g(Y) \in I$, существует открытое $U \subset \mathcal{M}_p(E)$, такое что $Y \in U \subset g^{-1}(I)$. Зафиксируем Y и возьмем такое $\varepsilon > 0$, что $(g(Y) - \varepsilon, g(Y) + \varepsilon) \in I$.

Для ε и Y подберем N из условий леммы. Теперь можем взять $n = \max(N, N_1) + 1$ и подобрать $r(n)$ из условий леммы. Тогда $D_{n,r(n)}(Y)$ таково, что $Y \in D_{n,r(n)}(Y)$ и для любого $\widehat{Y} \in D_{n,r(n)}(Y)$ выполнено $\|g(\widehat{Y}) - g(Y)\| \leqslant \varepsilon$.

Аналогично лемме 2, можно подобрать открытое множество $U \subset \mathcal{M}_p(E)$, такое что $Y \in U \subset D_{n,r(n)}(Y)$, следовательно Y – это точка непрерывности g. □

Лемма 5. *Пусть функция* g, *определенная на множестве выпуклых компактов в* $\mathbb{R}^d$, *обладает следующими свойствами:*

(1) *для любых выпуклых компактов* $K \subset L$ *выполнено* $g(K) \leqslant g(L)$;
(2) *для любой последовательности вложенных выпуклых компактов* $K_n \subset K_{n+1}$, $K = \cup_n K_n$ *верно, что* $g(K_n) \to g(K)$ *при* $n \to \infty$;

(3) *для любой последовательности вложенных выпуклых компактов* $K_n \supset K_{n+1}$, $K = \cap_n K_n$ *верно, что* $g(K_n) \to g(K)$ *при* $n \to \infty$;

Тогда g *удовлетворяет условиям леммы* 4, *как функция, действующая на* $\mathcal{M}_p(E)$, *как на выпуклой оболочке носителя меры.*

Доказательство. В доказательстве conv() рассматривается не как мера, а как выпуклая оболочка носителя в $\mathbb{R}^d$. Обозначим $Y_n = Y \cap (E \setminus B_{\frac{1}{n}})(0)$. Обозначим через $r(n)$ расстояние от 0 до Y_n. Заметим, что для любого $Y \in \mathcal{M}_p(E) \setminus \widehat{C}(h)$ верно, что $\mathrm{conv}(Y), \mathrm{conv}(Y_n)$ – это выпуклые компакты, а также $r(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим $X \in D_{n,r}(Y), r < \frac{1}{n}$. Тогда $X \subset Y + B_{2r(n)}(0)$. Также заметим, что $X cap (E \setminus B_{\frac{1}{n}}(0)) \supset Y_n - B_{r(n)}(0)$. По свойству 1 получим

$$g\left(Y_n - B_{r(n)}(0)\right) \leqslant g\left(X \cap \left(E \setminus B_{\frac{1}{n}}(0)\right)\right) \leqslant g\left(X\right) \leqslant g\left(Y + B_{2r(n)}(0)\right).$$

В итоге имеем

$$|g\left(X\right) - g\left(Y\right)| \leqslant |g\left(Y + B_{2r(n)}(0)\right) - g\left(Y_n - B_{r(n)}(0)\right)|.$$

По предположениям 2 и 3 из условия леммы правая часть стремится к 0 при $n \to \infty$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N, что при $n > N, r(n) > 0$ выполнено условие леммы 4. □

Заметим, что объем, площадь поверхности и средняя ширина подходят под условия леммы 5. Также заметим, что $\mathbb{P}\{N_\nu \in \widehat{C}(h)\} = 0$.

Следовательно, по теореме о непрерывном отображении (см. раздел 3.1) и лемме 4 выполняется теорема 3 в предположении условия 2.

4.5. Доказательство теоремы 2. Для доказательства нам понадобится несложная лемма, являющаяся аналогом леммы из [2, лемма 6.1] и доказывающаяся аналогично.

Определение 3. *Обозначим через* $[a, b]$ *параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат и вершинами* $a, b \in E$. *Через* A^c *обозначим* $E \setminus A$.

Лемма 6. *Рассмотрим последовательность мер* $\mu_n \in \mathcal{M}(E)$. *Тогда*

$$\mu_n \xrightarrow{v} \mu_0 \text{ в } \mathcal{M}(E)$$

тогда и только тогда, когда $\mu_n([-y, x]^c) \to \mu_0([-y, x]^c)$ *для всех* $x, y \in (0, \infty]^d$, *таких что мера гиперплоскостей, содержащих стороны параллелепипеда* $[-y, x]$, *равна 0.*

Рассмотрим $K = [-y,x]^c$ из леммы 6. Определим функцию $h : \mathcal{M}_p(E) \to \mathbb{Z}_+$, сопоставляющую точечной мере количество точек, попавших в K.

Согласно теореме Скорохода (см. раздел 3.1), существуют такие случайные величины $Y_n \stackrel{d}{=} \operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{Z_i}{b_n}}\right)$ и $Y_0 \stackrel{d}{=} \operatorname{conv}(N_\nu)$, что $Y_n \stackrel{a.s}{\to} Y_0$ в $\mathcal{M}_p(E)$ при $n \to \infty$. Согласно [3, предложение 3.13], для любого θ начиная с какого-то места выполнено $h(Y_n(\theta)) = h(Y_0(\theta))$. Следовательно, $h(Y_n) \stackrel{a.s}{\to} h(Y_0)$, и

$$h\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{Z_i}{b_n}}\right)\right) \Rightarrow h\left(\operatorname{conv}(N_\nu)\right) \text{ в } \mathbb{R}^1 \text{ при } n \to \infty.$$

Все значения h из $\mathbb{Z}_+$, следовательно, при $n \to \infty$ выполнено

$$\mathbb{P}\Big\{h\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{Z_i}{b_n}}\right)\right) = 0\Big\} \to \mathbb{P}\{h\left(\operatorname{conv}(N_\nu)\right) = 0\}. \qquad (28)$$

Правая часть формулы (28) равна $e^{-\nu([-y,x]^c}$. Левая часть формулы (28) равна

$$\mathbb{P}\Big\{h\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{Z_i}{b_n}}\right)\right) = 0\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\frac{Z_i}{b_n} \in [-y,x] \text{ для всех } i = 1,\ldots,n\Big\}$$

$$= \mathbb{P}\Big\{\frac{Z_1}{b_n} \in [-y,x]\Big\}^n = \exp\left(n \cdot \ln\left(\mathbb{P}\Big\{\frac{Z_1}{b_n} \in [-y,x]\Big\}\right)\right).$$

Следовательно, (28) равносильно сходимости

$$n \cdot \ln\left(\mathbb{P}\Big\{\frac{Z_1}{b_n} \in [-y,x]\Big\}\right) \to -\nu\left([-y,x]^c\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Так как $b_n \to \infty$, то $\ln\left(\mathbb{P}\{\frac{Z_1}{b_n} \in [-y,x]\}\right) \sim -\mathbb{P}\left\{\frac{Z_1}{b_n} \in [-y,x]^c\right\}$, и по лемме 6 мы получаем требуемое.

Автор благодарит Д. Н. Запорожца за его неоценимую помощь при подготовке статьи.

Список литературы

1. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York, 1968.
2. S. Resnick, *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling.* Springer, New York, 2007.

3. S. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes.* Springer Science & Business Media, New York, 2008.
4. S. Resnick, *Point processes, regular variation and weak convergence.* — Adv. Appl. Probab. **18**, No. 1 (1986), 66–138.
5. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
6. N. Bingham, C. Goldie, J. Teugels, *Regular Variation.* Cambridge University Press, 1989.
7. J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux.* — Bull. Soc. Math. France **61** (1933), 55–62.
8. L. de Haan, *Multivariate regular variation and applications in probability theory.* in: Multivariate Analysis. VI, P. R. Krishnaiah (ed.), Elsevier, Pittsburgh, 1985, 281–288.
9. M. Meerschaert, *Regular variation and domains of attraction in* $\mathbb{R}^k$. — Stat. Prob. Lett. **4** (1986), 43—45.
10. M. Meerschaert, *Regular variation in* $\mathbb{R}^k$. — Proc. Am. Math. Soc. **102** (1988), 341—348.
11. S. Molchanov, *On regularly varying multivalued functions.* — in: Stability Problems for Stochastic Models, V. Kalashnikov et al. (eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1993, 121—129.
12. A. Yakymiv, *Tauberian theorems and asymptotics of infinitely divisible distributions in a cone.* — Theor. Probab. Appl. **48**, No. 3 (2004), 493—505.
13. A. Yakymiv, *Multivariate regular variation in probability theory.* — J. Math. Sci. **246** (2020), 580—586.
14. M. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzén, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes.* Springer Science & Business Media, 2012.
15. P. Billingsley, *Weak Convergence of Measures: Applications in Probability.* SIAM, Philadelphia, 1971.
16. O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability.* Springer Science & Business Media, New York, 1997.

Simarova E. N. Convex hulls of random vectors with regularly varying distribution.

We express the property of a random vector to have a regularly varying distribution in terms of the weak convergence of the convex hull of its normalized independent copies to the convex hull of the Poisson point process.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный университет,
14 линия В.О., дом 29,
С.-Петербург 199178, Россия
E-mail: katerina.1.14@mail.ru

Поступило 16 сентября 2022 г.