Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

М. В. Платонова

О ВЕРОЯТНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОЙ ГРУППЫ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§1. Введение

Хорошо известно, что для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности ($\sigma \in \mathbf{R}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sigma^2 V(x)u, \quad u(0,x) = \varphi(x) \tag{1}$$

справедливо вероятностное представление

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi\big(x + \sigma w(t)\big)\exp\Big(-\sigma^2\int\limits_0^t V(x+\sigma w(s))\,ds\Big), \tag{2}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Начальная функция φ и потенциал V при этом предполагаются непрерывными и ограниченными.

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении (1) число σ является комплексным, именно $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$. В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(x)u \tag{3}$$

и носит название уравнение Шрёдингера (см. [8], с. 331). Представление (2) в этом случае теряет смысл, так как мы должны подставить комплексную переменную в функцию вещественного аргумента.

Формально решение задачи Коши для уравнения (3) может быть записано с использованием интеграла (обычно его называют континуальным или функциональным интегралом) по мере Фейнмана. Мера Фейнмана является комплекснозначной конечно-аддитивной функцией, заданной на алгебре цилиндрических множеств. Именно, для любых $0 < t_1 < \cdots < t_n < T$ и каждого борелевского множества $A \subset \mathbf{R}^n$

Ключевые слова: эволюционные уравнения, пуассоновские случайные меры, формула Фейнмана–Каца.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 22-21-00016.

мера $P(U_{t_1,\ldots,t_n,A})$ цилиндрического множества $U_{t_1,\ldots,t_n,A} \subset \Omega$ вида

$$U_{t_1,\ldots,t_n,A} = \{h \in C_0[0,T] : (h(t_1), h(t_2), \ldots, h(t_n)) \in A\},$$

равна (здесь $x_0 = 0,\ t_0 = 0$)

$$\frac{e^{-\frac{in\pi}{4}}}{(2\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})^{1/2}} \int\limits_A e^{\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}} dx_1 \ldots dx_n. \qquad (4)$$

Известно (см., например, [1]), что комплекснозначная мера P, заданная формулой (4) на алгебре цилиндрических множеств, не может быть продолжена до счетно-аддитивной функции на σ-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами. Это означает, что в данном случае функциональный интеграл не является интегралом по σ-конечной мере в пространстве траекторий. Тем не менее, интеграл по мере Фейнмана может быть корректно определен для достаточно широкого класса функций (не только для цилиндрических). Подробное изложение теории интегрирования по мере Фейнмана можно найти в книге [9], в ней же содержится обширный обзор литературы по теории интеграла Фейнмана. Отметим еще, что этот подход не является вероятностным.

В работе [3] был предложен уже чисто вероятностный метод построения аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с вещественным ограниченным потенциалом средними значениями функционалов от стохастических процессов. Аппроксимирующие операторы имели вид математических ожиданий функционалов от некоторого точечного случайного поля. Поясним основные идеи предложенного в [3] подхода. Перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + U_0(x)u,$$

где $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$ и $U_0(x) = -iV(x)$, и посмотрим на это уравнение как на уравнение теплопроводности, но с комплексным коэффициентом при $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Если бы σ было вещественным числом, то решение задачи Коши можно было бы представить в виде формулы Фейнмана–Каца (2). Нам нужно придать смысл этому выражению для комплексного значения

$\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$. Далее, перепишем формулу Фейнмана–Каца в виде

$$u(t,x) = \mathbf{E}\, e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_k<t} dt_1 dt_2 \ldots dt_k\, U\big(x+w(t_1)\big) \ldots U\big(x+w(t_k)\big)\varphi\big(x+w(t)\big) \tag{5}$$

$$= \mathbf{E} \int\limits_{\mathcal{X}} \mathbf{P}_0(dX) \prod_{\tau\in\mathcal{X}\cap(0,t)} U(x+w(\tau))\varphi\big(x+w(t)\big),$$

где $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathbf{R}_+)$ – пространство конфигураций на $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{P}_0$ – пуассоновская мера на $\mathcal{X}$, мера интенсивности которой есть мера Лебега. Каждая точка X пространства $\mathcal{X}$ представляет из себя некоторую строго возрастающую локально конечную последовательность положительных чисел $0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$.

Важно отметить, что регуляризацию невозможно построить путем аппроксимации функций φ, U целыми аналитическими функциями. Действительно, даже если предположить, что функции φ, U могут быть продолжены на всю комплексную плоскость до целой функции, то немедленно возникнут проблемы с существованием математического ожидания в (5), так как функция U ограничена на вещественной оси и, значит, в комплексной плоскости растет по крайней мере экспоненциально.

Для построения регуляризации мы вместо винеровского процесса используем семейство $\xi_\varepsilon^{(1)}(t)$ центрированных скачкообразных процессов Леви, с мерой Леви специального вида, сосредоточенной на положительной оси. Это семейство процессов Леви при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к винеровского процессу.

В настоящей работе построена аналогичная вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для эволюционного уравнения

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\,\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + V(x)u, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{6}$$

где потенциал V – вещественнозначная ограниченная функция. Аппроксимирующие операторы также имеют вид математических ожиданий функционалов от точечного случайного поля. В случае отсутствия потенциала ($V \equiv 0$), такая вероятностная аппроксимация решения была построена в работе [7]. Для удобства читателей мы приведем необходимые результаты из [7] без доказательств (теорема 2). Отметим также, что аналогичная аппроксимация для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности высокого порядка была построена в работе [6].

§2. Случай отсутствия потенциала

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $[0,\infty)\times[0,\infty)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx)=\frac{dt\,dx}{x^{1+2m}}.$$

Для $\varepsilon>0$ определим сложный пуассоновский процесс $\xi_\varepsilon(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon(t)=\iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,e\varepsilon]} x\nu(ds,dx),$$

где e – основание натурального логарифма.

Представим начальную функцию φ в виде

$$\varphi(x)=P_+\varphi(x)+P_-\varphi(x)=\varphi_+(x)+\varphi_-(x),$$

где P_+, P_- – проекторы Рисса, определяемые на $L_2(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R})$ как

$$P_+\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp,\quad P_-\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp.$$

Отметим, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция φ_- аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость.

Положим

$$\sigma=e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)}.$$

Так выбранное комплексное число σ принадлежит верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$ и $\operatorname{Re}\sigma>0$.

При фиксированном $\varepsilon>0$ определим полугруппу операторов P^t_ε, которая действует на $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P^t_\varepsilon\varphi(x)=\mathbf{E}\left[(\varphi_- * h^t_\varepsilon)\big(x-\sigma\xi_\varepsilon(t)\big)+(\varphi_+ * h^t_\varepsilon)\big(x+\sigma\xi_\varepsilon(t)\big)\right],\qquad(7)$$

где функция $h_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t\int_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(i|p|\sigma x + \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} + \ldots + \frac{(i|p|\sigma x)^{2m-1}}{(2m-1)!}\Big)\,\frac{dx}{x^{1+2m}}\Big) \times \exp\Big(-t\int_\varepsilon^{e\varepsilon}\frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\,\frac{dx}{x^{1+2m}}\Big). \quad (8)$$

Теорема 1. 1. *Оператор P_ε^t является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$\exp\Big(-\frac{itp^{2m}}{(2m)!}\Big)\,H(t,\varepsilon,p),$$

где

$$H(t,\varepsilon,p) = \exp\Big(t\int_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} - \ldots - \frac{(i|p|\sigma x)^{2m}}{(2m)!} - \frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big)\,\frac{dx}{x^{1+2m}}\Big). \quad (9)$$

2. *Для любых t, ε, p справедливо неравенство*

$$\big|H(t,\varepsilon,p)\big| \leqslant 1.$$

Заметим, что в силу (9) генератор A_ε полугруппы P_ε^t есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{g}_\varepsilon(p)$, где

$$\widehat{g}_\varepsilon(p) = -\frac{ip^{2m}}{(2m)!} + \int_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} - \ldots - \frac{(i|p|\sigma x)^{2m}}{(2m)!} - \frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big)\,\frac{dx}{x^{1+2m}}. \quad (10)$$

Теорема 2. *Существует постоянная $C > 0$, такая что для любой функции $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\|P^t\varphi - P_\varepsilon^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon^2\|\varphi\|_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

Следствие 1. *Для любого $t \geqslant 0$ и $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|P^t\varphi - P^t_\varepsilon\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} = 0.$$

В следующем параграфе мы обобщим утверждение теоремы 2 (и следствия из нее) на случай гамильтониана общего вида. Для этого нам понадобится ввести ряд новых обозначений.

Для каждых $\varepsilon > 0$, $t > 0$ определим оператор $R^t_\varepsilon : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} R^t_\varepsilon\varphi(y) &= \varphi_+ * h^t_\varepsilon(y) + \varphi_- * h^t_\varepsilon(-y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipy}\,\widehat{\varphi}(p)\,\widehat{h}^t_\varepsilon(|p|)\,dp + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{ipy}\,\widehat{\varphi}(p)\,\widehat{h}^t_\varepsilon(|p|)\,dp, \end{aligned} \tag{11}$$

где функция h^t_ε определяется (8).

Через T_a обозначим оператор сдвига на a, действующий как

$$T_a\varphi(x) = \varphi(x+a).$$

В этих обозначениях формула (7) переписывается в виде

$$P^t_\varepsilon\varphi(x) = \mathbf{E}\,F^t_\varepsilon(x, \sigma\xi_\varepsilon(t)),$$

где функция

$$F^t_\varepsilon(x,y) = R^t_{\varepsilon,y}T_x\varphi(y) = \varphi_+ * h^t_\varepsilon(x+y) + \varphi_- * h^t_\varepsilon(x-y),$$

а нижний индекс y у оператора $R^t_{\varepsilon,y}$ обозначает действие этого оператора по переменной y.

§3. Построение эволюционного семейства операторных функционалов

Итак, мы показали, как строится вероятностная аппроксимация оператора эволюции в случае отсутствия потенциала. При этом в качестве аппроксимации оператора P^t использовался оператор $P^t_\varepsilon = e^{tA_\varepsilon}$, где A_ε – псевдодифференциальный оператор с символом (10). Оператор P^t_ε допускает вероятностное представление (7) в виде математического ожидания функционала от стохастического процесса. Далее мы построим аналог формулы Фейнмана–Каца для оператора $A_\varepsilon - iV$. Данная формула не может быть записана в терминах элементарных функций, поэтому мы определим ее через интегральное представление, как это было сделано в работе [3] для построения вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера. Для этого мы прежде всего должны построить функционал от траектории процесса, стоящий под знаком математического ожидания. Этот функционал будет построен в виде интеграла по пуассоновской случайной мере на положительной полуоси с лебеговой интенсивностью.

Перейдем непосредственно к построению требуемого функционала от траектории процесса. Обозначим $U(x) = -iV(x)+1$. Определим семейство операторов $N_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots$, зависящее от неотрицательных параметров $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k+1}$ и вещественных параметров $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$, действующих на функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$\begin{aligned}&\Big[N_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1})\varphi\Big](x)\\ &\quad= R^{\tau_1}_{\varepsilon,y_1} T^{y_1}_x U(y_1) R^{\tau_2}_{\varepsilon,y_2} T^{y_2}_{y_1} U(y_2)\ldots T^{y_k}_{y_{k-1}} U(y_k) R^{\tau_{k+1}}_{\varepsilon,y_{k+1}} T^{y_{k+1}}_{y_k}\varphi(y_{k+1}).\end{aligned}$$

Здесь оператор регуляризации $R^\tau_{\varepsilon,y}$ определен (11), нижний индекс y обозначает действие оператора $R^\tau_{\varepsilon,y}$ по переменной y. Запись $T^{y_1}_a$ означает, что оператор сдвига $T^{y_1}_a$ применяется по переменной y_1, то есть

$$T^{y_1}_a\varphi(y_1, y_2) = \varphi(y_1 + a, y_2).$$

Оператор N_k зависит также от переменной ε, но мы опустим этот индекс в обозначениях.

Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathbf{R}_+)$ – пространство конфигураций на $\mathbf{R}_+$. Каждая точка X пространства $\mathcal{X}$ представляет из себя некоторую строго возрастающую локально конечную последовательность положительных чисел $0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$. Далее, пусть $\mathbf{P}_0$ – пуассоновская мера на $\mathcal{X}$, мера интенсивности которой есть мера Лебега (см., напр., [5]).

Пусть $\gamma(\,\cdot\,)$ – измеримая локально ограниченная функция на $[0,\infty)$. Для каждой пары чисел s, t, таких что $0 \leqslant s \leqslant t$, определим оператор $H_{s,t}(\gamma, X)$, зависящий от $\gamma(\cdot)$ и конфигурации $X \in \mathcal{X}$.

Для любых t, s будем использовать обозначение

$$m(t,s) = \gamma(s) - \gamma(t).$$

Предположим, что $s, t \notin X$ и

$$l = \operatorname{card}\big(X \cap (0,s)\big), \quad k = \operatorname{card}\big(X \cap (s,t)\big).$$

Теперь определим оператор $H_{s,t}(\gamma, X)$, полагая

$$\Big[H_{s,t}(\gamma, X)\varphi\Big](x)$$
$$= \Big[N_k\big(t_{l+1} - s, t_{l+2} - t_{l+1}, \ldots, t_{l+k} - t_{l+k-1}, t - t_{l+k},$$
$$m(s, t_{l+1}), m(t_{l+1}, t_{l+2}), \ldots, m(t_{l+k-1}, t_{l+k}), m(t_{l+k}, t)\big)\varphi\Big](x).$$

Лемма 1. *При фиксированных X, γ семейство $H_{s,t}(\gamma, X)$ является эволюционным, то есть для любых $s \leqslant u \leqslant t$, таких что $s, u, t \notin X$, справедливо равенство*

$$H_{s,t}(\gamma, X) = H_{s,u}(\gamma, X) H_{u,t}(\gamma, X).$$

Доказательство. Докажем сначала вспомогательное утверждение: для любых $s_1, s_2, s_3, s_4 > 0$ и y_1, y_2, y_3, y_4 выполнено

$$N_1(s_1, s_2, y_1, y_2) N_1(s_3, s_4, y_3, y_4) = N_2(s_1, s_2 + s_3, s_4, y_1, y_2 + y_3, y_4). \quad (12)$$

Пусть $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$. Имеем

$$\Big[N_1(s_1, s_2, y_1, y_2) N_1(s_3, s_4, y_3, y_4)\varphi\Big](x) = R^{s_1}_{\varepsilon,y_1} T^{y_1}_x U(y_1) R^{s_2}_{\varepsilon,y_2} T^{y_2}_{y_1} R^{s_3}_{\varepsilon,y_3} T^{y_3}_{y_2} U(y_3) R^{s_4}_{\varepsilon,y_4} T^{y_4}_{y_3} \varphi(y_4). \quad (13)$$

Заметим, что

$$R^{s_2}_{\varepsilon,y_2} T^{y_2}_{y_1} R^{s_3}_{\varepsilon,y_3} T^{y_3}_{y_2} g(y_3) = R^{s_2}_{\varepsilon,y_2} T^{y_2}_{y_1} \Big(g * h^{s_3}_\varepsilon(y_2 - y_3)\Big)$$
$$= g * h^{s_2+s_3}_\varepsilon(y_1 - y_2 - y_3) = R^{s_2+s_3}_{\varepsilon,z} T^z_{y_1} g(z)\Big|_{z=y_2+y_3}.$$

Подставляя последнее выражение в правую часть (13), получим (12).

Теперь вернемся к доказательству леммы. Достаточно доказать наше утверждение в случае, когда $s = 0$, то есть

$$H_{0,t}(\gamma, X) = H_{0,u}(\gamma, X) H_{u,t}(\gamma, X).$$

Докажем наше утверждение в случае, когда $X \cap (0, t) = \{t_1, t_2\}$, $0 < t_1 < u < t_2 < t$, то есть

$$l = \operatorname{card}\big(X \cap (0, u)\big) = 1,$$
$$k = \operatorname{card}\big(X \cap (u, t)\big) = 1.$$

Общий случай рассматривается аналогично. Имеем

$$\begin{aligned}H_{0,u}(\gamma, X)H_{u,t}(\gamma, X) &= N_1(t_1, u-t_1, m(0,t_1), m(t_1,u))\\ &\quad N_1(t_2-u, t-t_2, m(u,t_2), m(t_2,t))\\ &= N_2(t_1, t_2-t_1, t-t_2, m(0,t_1), m(t_1,t_2), m(t_2,t)) = H_{0,t}(\gamma, X). \quad \square\end{aligned}$$

Определим теперь новое семейство операторов $\Phi_{s,t}(\gamma)$, зависящее от γ и ε, полагая

$$\Phi_{s,t}(\gamma) = \int\limits_{\mathcal{X}} \mathbf{P}_0(dX)H_{s,t}(\gamma, X) = \int\limits_{\mathcal{X}\cap[s,t]} \mathbf{P}_0(dX)H_{s,t}(\gamma, X).$$

Из независимости значений пуассоновской меры на непересекающихся интервалах и леммы 1 вытекает эволюционное свойство: для любых $s \leqslant u \leqslant t$

$$\Phi_{s,t}(\gamma) = \Phi_{s,u}(\gamma)\Phi_{u,t}(\gamma). \tag{14}$$

3.1. Построение вероятностной аппроксимации решения. Для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор Q_ε^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$

$$\Big[Q_\varepsilon^t \varphi\Big](x) = \mathbf{E}\Big[\Phi_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon(t)\big)\varphi\Big](x).$$

Теорема 3. 1. *Существует константа $C = C(V)$, такая что с вероятностью единица выполняется неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \Big|\Big[\Phi_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon(\cdot)\big)\varphi\Big](x)\Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L_2}.$$

2. *Для любого $x \in \mathbf{R}$ функция $\big[H_{0,t}(\sigma\xi_\varepsilon(\cdot), X)\varphi\big](x)$ как функция на $\Omega \times \mathcal{X}$ интегрируема по мере $\mathbf{P} \times \mathbf{P}_0$ и*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\Phi_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon(\cdot)\big)\varphi\Big](x) &= \int\limits_{\mathcal{X}} \mathbf{P}_0(dX)\mathbf{E}\Big[H_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon(\cdot), X\big)\varphi\Big](x)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{X}_k} \mathbf{P}_0(dX)\mathbf{E}\Big[H_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon(\cdot), X\big)\varphi\Big](x),\end{aligned} \tag{15}$$

где $\mathcal{X}_k = \{X \in \mathcal{X} : \mathrm{card}\ (X \cap (0,t)) = k\}$.

3. *Для любого* $k = 0, 1, \ldots$ *выполнено*

$$\int\limits_{\mathcal{X}_k} \mathbf{P}_0(dX)\mathbf{E}\Big[H_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon(\cdot), X\big)\varphi\Big](x)$$
$$= e^{-t} \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_k<t} dt_1 \ldots dt_k P_\varepsilon^{t_1} U P_\varepsilon^{t_2-t_1} U \ldots P_\varepsilon^{t_k-t_{k-1}} U P_\varepsilon^{t-t_k}\varphi(x). \tag{16}$$

Доказательство. Для всех $k \geqslant 1$ и $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t$ справедливо неравенство

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \sup_{y_j\in\mathbf{R}} \Big|\Big[N_k(t_1, t_2 - t_1, \ldots, t - t_k, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1})\varphi\Big](x)\Big| \leqslant \|V\|_\infty^k \|\varphi\|_{L_2}.$$

Таким образом для $X \in \mathcal{X}_k$, мы получаем

$$\Big|\Big[H_{0,t}\big(\sigma\xi_\varepsilon(\cdot), X\big)\varphi\Big](x)\Big| \leqslant \|V\|_\infty^k \|\varphi\|_{L_2}.$$

Интегрируя последнее неравенство по мере $\mathbf{P}_0$, получаем утверждение 1 теоремы. Утверждение пункта 2 очевидно. Утверждение пункта 3 следует из независимости приращений процесса $\xi_\varepsilon(t)$. □

Теорема 4. *Операторы* Q_ε^t *образуют однопараметрическую полугруппу*

$$Q_\varepsilon^{t+s} = Q_\varepsilon^t Q_\varepsilon^s$$

с генератором $A_\varepsilon - iV(x)$.

Доказательство. Полугрупповое свойство операторов Q_ε^t следует из независимости и однородности приращений процесса $\xi_\varepsilon(t)$, а также (14).

Для вычисления генератора полугруппы воспользуемся (15) и (16). Отметим, что в (15) достаточно оставить только слагаемые при $k = 0$ и $k = 1$. При $k = 0$ имеем

$$e^{-t} P_\varepsilon^t \varphi(x) = \varphi(x)(1 - t) + tA_\varepsilon\varphi(x) + o(t), \quad t \to 0.$$

При $k = 1$ имеем

$$e^{-t} \int\limits_0^t dt_1\, P_\varepsilon^{t_1}\, U\, P_\varepsilon^{t-t_1}\, \varphi(x) = t\, U(x)\varphi(x) + o(t), \quad t \to 0.$$

Из последних соотношений вытекает, что генератор полугруппы Q_ε^t есть $A_\varepsilon - iV(x)$. □

Через Q^t обозначим полугруппу

$$Q^t = \exp\Big(it\big(\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - V\big)\Big).$$

По определению полугруппа Q^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши для уравнения (6).

Предположим, что потенциал V имеет ограниченные производные до порядка $2m+2$. Обозначим

$$L = \max(\|V\|_\infty, \|V^{(1)}\|_\infty, \dots, \|V^{(2m+2)}\|_\infty).$$

Лемма 2. *Для любого $t \geqslant 0$ и $l = 0, 1, \dots, 2m+2$ существует положительная константа $C = C(l)$, такая что выполнено неравенство*

$$\|Q^t\|_{W_2^l \to W_2^l} \leqslant C(1 + t^l L^l).$$

Доказательство. Для простоты докажем утверждение леммы в случае $l = 1$. Случай $l > 1$ рассматривается аналогично. Заметим, что

$$\|Q^t\|_{L_2 \to L_2} \leqslant 1.$$

Положим $w = \frac{\partial u}{\partial x}$ и продифференцируем уравнение (6) по переменной x

$$i\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{\partial^{2m} w}{\partial x^{2m}} + Vw + V'u,\ w(0,x) = \varphi'(x) = \psi(x).$$

Тогда

$$w(t,x) = Q^t\psi + \int_0^t d\tau Q^{t-\tau}\big(V'(x)u(\tau,x)\big).$$

Отсюда следует, что

$$\|w(t,\cdot)\|_{L_2} \leqslant \|\psi\|_{L_2} + t\|V'\|_\infty\|\varphi\|_{L_2} \leqslant C(1 + tL)\|\varphi\|_{W_2^1}. \qquad \square$$

Лемма 3. *Для любого $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|Q_\varepsilon^t\|_{L_2 \to L_2} \leqslant 1.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что генератор полугруппы Q_ε^t имеет вид $A_\varepsilon - iV(x)$. $\square$

Теорема 5. *Пусть $V \in \mathbf{C}^{(2m+2)}(\mathbf{R})$. Тогда существует положительная константа C, такая что для любой функции $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ и любого $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|Q_\varepsilon^t\varphi - Q^t\varphi\|_{L_2} \leqslant C\varepsilon^2 t\Big(1 + \frac{t^{2m+2}L^{2m+2}}{2m+3}\Big)\|\varphi\|_{W_2^{2m+2}}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа e^{tA}. Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа $e^{t(A+B)}$ также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [4], гл. IX, §2, п. 1, с. 614)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \tag{17}$$

Положим

$$A = \frac{i(-1)^{m+1}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - iV, \quad A + B = A_\varepsilon - iV,$$

где оператор A_ε – оператор с символом $g_\varepsilon(p)$, определенным (10). Отсюда следует, что оператор

$$B = A_\varepsilon - \frac{i(-1)^{m+1}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}.$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(x)$. Получим

$$\widehat{B\varphi}(p) = \widehat{\varphi}(p) \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \Big(\exp(i\sigma|p|y) - \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{(i\sigma|p|y)^j}{j!} \Big) \frac{dy}{y^{1+2m}}.$$

Заметим, что при $|p| \leqslant \frac{1}{e\varepsilon}$ справедливо

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C\,\varepsilon^2\, |\widehat{\varphi}(p)|\, |p|^{2m+2},$$

а при $|p| > \frac{1}{e\varepsilon}$:

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C\,\varepsilon\, |\widehat{\varphi}(p)|\, |p|^{2m+1},$$

откуда следует, что

$$\|B\varphi\|_{L_2}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|\widehat{B\varphi}(p)\big|^2 dp \leqslant \int\limits_{|p| \leqslant \frac{1}{e\varepsilon}} C\varepsilon^4\, |p|^{4m+4} \big|\widehat{\varphi}(p)\big|^2 dp$$

$$+ \int\limits_{|p| > \frac{1}{e\varepsilon}} C\varepsilon^2\, |p|^{4m+2} \big|\widehat{\varphi}(p)\big|^2 dp \leqslant C\varepsilon^4 \|\varphi\|_{W_2^{2m+2}}^2. \tag{18}$$

Утверждение теоремы следует из лемм 2, 3 и (18):

$$\Big\| \int\limits_0^t Q_\varepsilon^\tau B Q^{t-\tau}\varphi\, d\tau \Big\|_{L_2} \leqslant \int\limits_0^t \|BQ^{t-\tau}\varphi\|_{L_2}\, d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_0^t C\,\varepsilon^2\, \|Q^{t-\tau}\varphi\|_{W_2^{2m+2}}\, d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_0^t C\,\varepsilon^2\,(1+(t-\tau)^{2m+2}L^{2m+2})\|\varphi\|_{W_2^{2m+3}}\, d\tau$$

$$\leqslant C\varepsilon^2\, t\left(1+\frac{t^{2m+2}L^{2m+2}}{2m+3}\right)\|\varphi\|_{W_2^{2m+2}}. \qquad \square$$

Теорема 6. *Пусть V – произвольный ограниченный вещественный потенциал. Тогда для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ выполнено*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|Q_\varepsilon^t\varphi - Q^t\varphi\|_{L_2} = 0.$$

Доказательство. Если $V \in \mathbf{C}^{(2m+2)}(\mathbf{R})$, то утверждение теоремы следует из теоремы 5 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [2], II.1.18). В общем случае зафиксируем последовательность $\{V_n\}$ из $\mathbf{C}^{(2m+2)}(\mathbf{R})$, сходящуюся к V почти всюду по мере Лебега и равномерно ограниченную. Тогда применяя снова формулу (17) с операторами

$$--A = \frac{i(-1)^{m+1}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - iV, \quad A+B = \frac{i(-1)^{m+1}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - iV_n,$$

получаем утверждение теоремы. $\square$

Список литературы

1. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах*, М., Наука, 1983.
2. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, М., Издательство иностранной литературы, 1962.
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация оператора эволюции.* — Функц. анализ и его прил. **52**, No. 2 (2018), 25–39.
4. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.
5. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы*, М., МЦНМО, 2007.
6. М. В. Платонова, *Аналог формулы Фейнмана–Каца для оператора высокого порядка.* — Теор. вероятн. и ее примен. **67**, No. 1 (2022), 81–99.

7. М. В. Платонова, С.В. Цыкин, *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка.* — Теор. вероятн. и ее примен. **65**, No. 4 (2020), 710–724.
8. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 1*, М., Мир, 1977.
9. О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, М., ЛЕНАНД, 2015, 336 с.

Platonova M. V. On a probabilistic approximation of a group of unitary operators.

We construct a probabilistic approximation of the Cauchy problem solution for a high-order Schrödinger equation with bounded potential in the form of expectations of functionals of a point random field.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 29 августа 2022 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: mariyaplat@gmail.com