Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

С. М. Новиков

НОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ О ПОВЕДЕНИИ ГАУССОВСКИХ МАКСИМУМОВ В ТЕРМИНАХ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

§1. Введение

Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – вещественная центрированная гауссовская стационарная последовательность. Обозначим $r(n) = \operatorname{cov}(X_0, X_n)$ функцию ковариации последовательности $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Предположим, что $r(0) = 1$.

Берман [1] доказал, что если

$$r(n) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

то почти наверное

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{2\log(n)}} = 1. \tag{2}$$

В частности, лемма Римана–Лебега влечет, что (2) выполнено для случая, когда спектральная мера ν_X последовательности $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Естественно попытаться ослабить условия на $r(n)$ так, чтобы (2) оставалось верным. Несложно проверить, что сходимости $r(n)$ к нулю по Чезаро недостаточно: возьмем $X_n = (-1)^n Z$, где Z стандартная гауссовская величина (со средним 0 и дисперсией 1). Тогда, очевидно, $r(n)$ сходится по Чезаро к 0, но (2) не выполнено.

Поэтому кажется разумным выдвинуть следующую гипотезу: "Условие сильной сходимости по Чезаро

$$\frac{|r(0)| + \cdots + |r(n)|}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

влечет (2)."

Ключевые слова: Гауссовская последовательность, стационарная последовательность, максимум, спектральная мера.

Работа выполнена при поддержке программы социальных инвестиций "Родные города" ПАО "Газпром нефть".

Заметим, что (3) эквивалентно

$$\frac{r^2(0)+\cdots+r^2(n)}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

что, в свою очередь, эквивалентно ([2, с. 303–305]) отсутствию атомов у спектральной меры ν_X, а также эквивалентно эргодичности и сильному перемешиванию для $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Известно ([1, теорема 5.1]), что если спектральная мера имеет атомы, то (2) не выполнено. Поэтому можно переформулировать нашу гипотезу: верно ли, что если спектральная мера ν_X не имеет атомов, то (2) выполнено?

Оказывается, ответ на этот вопрос отрицательный, а именно, верен следующий результат:

Теорема 1. *Существует центрированная вещественнозначная гауссовская последовательность $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, такая что ее спектральная мера ν_X не имеет атомов, но*

$$\frac{\max(X_1,\ldots,X_n)}{\sqrt{2\log(n)}} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5}$$

почти наверное.

Сперва мы докажем ослабленную версию теоремы 1, где сходимость почти наверное заменена на сходимость по вероятности.

Затем, чтобы вывести сходимость почти наверное, мы покажем эквивалентность различных типов сходимости нормированных гауссовских максимумов при некоторых условиях. Данная эквивалентность представляет и самостоятельный интерес.

Работа состоит из 4 разделов. Первый раздел – введение. Раздел 2 посвящен доказательству ослабленной версии теоремы 1. Раздел 3 содержит некоторые результаты об эквивалентности сходимости в среднем порядка p, сходимости по вероятности и сходимости почти наверное для гауссовских максимумов. Наконец, в заключении представлены некоторые возможные направления исследования в области поведения гауссовских максимумов в терминах спектральных мер.

§2. Доказательство ослабленной версии теоремы 1

Для ковариационной функции $\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ с $\rho(0) = 1$ обозначим $H(\rho, n, t) = \Pr[\max(X_1, \ldots, X_n) \geqslant t]$, где (X_n) – стационарная центрированная гауссовская последовательность с ковариационной функцией ρ.

Обозначим $\mathcal{N}(a, K)$ гауссовское распределение со средним a и матрицей ковариации K.

Поскольку отображение, которое переводит неотрицательно определенную матрицу K в $\mathcal{N}(0, K)$, является непрерывным отображением в пространство вероятностных мер, наделенное топологией слабой сходимости; поскольку отображение, которое переводит вектор в значение его наибольшей компоненты, непрерывно, и поскольку $\max(X_1, \ldots, X_n)$ имеет непрерывную функцию распределения, если X – вещественная стационарная гауссовская последовательность с функцией ковариации ρ, такая что $\rho(0) = 1$, теорема Гливенко–Кантелли влечет следующий факт:

Лемма 1. *Пусть (X_n) – центрированная стационарная гауссовская последовательность с функцией ковариации ρ_1. Также предположим, что $\rho_1(0) = 1$. Тогда для любого натурального $N > 0$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\rho_1, N, \varepsilon) > 0$, такое что если $\rho_2(n)$ – другая ковариационная функция, и, вдобавок, $\sup\limits_{|n| \leqslant N} |\rho_1(n) - \rho_2(n)| \leqslant \delta$, то*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |H(\rho_1, N, t) - H(\rho_2, N, t)| \leqslant \varepsilon.$$

Теперь по индукции по k построим возрастающую последовательность положительных чисел (α_k), $k \geqslant 1$.

Обозначим $\rho_k(n) = \prod\limits_{j=1}^{k} \cos(\frac{n}{2^{\alpha_j}})$. Каждая ρ_k – это функция ковариации, которая соответствует спектральной мере, являющейся распределением $\sum\limits_{l=1}^{k} \frac{\zeta_l}{2^{\alpha_l}}$, где ζ_l – н.о.р. величины, которые принимают значения 1 и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$.

Для удобства положим, что $\rho_0(n) = 1$ для всех n. Предположим, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, уже построены.

Пусть $k \geqslant 1$, и пусть $(\xi_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k})$; $(\eta_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k})$ – два набора из 2^k стандартных одномерных гауссовских величин (такие что в сумме получается 2^{k+1} н.о.р. случайных величин). Здесь $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ пробегают по $\{-1, 1\}$.

Тогда, очевидно, существует натуральное $f(k) > \max(f(k-1), 2)$, такое что

$$\Pr\left[\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\in\{-1,1\}} \frac{1}{\sqrt{2^k}}(|\xi_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}| + |\eta_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}|) \geqslant 2^{-k}\sqrt{2\log f(k)}\right] \leqslant 2^{-k}. \tag{6}$$

В силу известного факта, использовавшегося в доказательстве леммы 5.1 из [1] ([3, с. 488]), для центрированной гауссовской стационарной последовательности X с ковариационной функцией ρ_k имеет место следующее представление:

$$X_n = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\in\{-1,1\}} \frac{1}{\sqrt{2^k}} \times \left(\xi_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}\cos\left(n\sum_{l=1}^{k}\frac{\varepsilon_l}{2^{\alpha_l}}\right) + \eta_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}\sin\left(n\sum_{l=1}^{k}\frac{\varepsilon_l}{2^{\alpha_l}}\right)\right).$$

В частности, для любого $n \geqslant f(k)$ выполнено

$$|\max(X_1,\ldots,X_n)| \leqslant \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\in\{-1,1\}} \frac{1}{\sqrt{2^k}}(|\xi_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}| + |\eta_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}|).$$

Поэтому в силу (6), для любого $n \geqslant f(k)$ выполнено (независимо от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$)

$$H(\rho_k, n, 2^{-k}\sqrt{2\log(n)}) \leqslant 2^{-k}. \tag{7}$$

Теперь будем последовательно выбирать подходящие α_k. Возьмем $\alpha_1 = 1$. При $k \geqslant 2$ и фиксированных $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ по лемме 1 мы можем выбрать α_k так, чтобы

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ n\leqslant f(k)} |H(\rho_k, n, t) - H(\rho_{k-1}, n, t)| \leqslant 2^{-k}. \tag{8}$$

Определим $\rho_\infty(n) = \lim\limits_{k\to\infty}\rho_k(n)$. Ясно, что эта функция положительно определена, и $\rho_\infty(0) = 1$.

Заметим, что при $f(k+1) \geqslant n \geqslant f(k)$ в силу (7) и (8) мы имеем

$$H(\rho_\infty, n, 2^{-k}\sqrt{2\log(n)}) \leqslant H(\rho_k, n, 2^{-k}\sqrt{2\log(n)})$$
$$+\sum_{l=k}^{\infty} |H(\rho_{l+1}, n, 2^{-k}\sqrt{2\log(n)}) - H(\rho_l, n, 2^{-k}\sqrt{2\log(n)})|$$
$$\leqslant 2^{-k} + \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l-1} = 2\cdot 2^{-k}.$$

Поэтому,

$$\frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{\sqrt{2\log(n)}} \to 0, \quad n \to \infty \tag{9}$$

по вероятности, если последовательность $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ имеет функцию ковариации ρ_∞.

Но спектральная мера, соответствующая ρ_∞, является распределением $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k}{2^{\alpha_k}}$, где ζ_k независимы и принимают значения 1 и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Поэтому, спектральная мера, соответствующая функции ковариации ρ_∞, не имеет атомов.

§3. Связи между разными видами сходимости гауссовских максимумов

Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ – бесконечная последовательность конечных множеств. Обозначим $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $X = (X_i)_{i\in A}$ – центрированный гауссовский процесс. Обозначим $M_n = \max\limits_{i\in A_n} X_i$, $\sigma^2(n) = \max\limits_{i\in A_n} \mathbb{E}X_i^2$.

Теорема 2. *Предположим, что* $b\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $c\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ *– неубывающие функции. Если*

$$\frac{b(c(k+1))}{b(c(k))} \to 1, \quad k \to \infty, \tag{10}$$

и

$$\sum_{k\geqslant 1} \exp\left\{-\frac{b^2(c(k))\lambda^2}{\sigma^2(c(k))}\right\} < \infty \tag{11}$$

для любого $\lambda > 0$, *то следующие* 4 *условия эквивалентны* (*здесь* L *– некоторая константа*):

1) $\mathbb{E}\frac{M_n}{b(n)} \to L,\ n \to \infty.$

2) $\mathbb{E}|\frac{M_n}{b(n)} - L|^p \to 0,\ \ n \to \infty$ *для всех* $p \in [1, \infty)$.

3) $\frac{M_n}{b(n)} \to L,\ \ n \to \infty$ *по вероятности.*

4) $\frac{M_n}{b(n)} \to L,\ \ n \to \infty$ *почти наверное.*

Замечание 1. Эквивалентность 1)–3) выполнена без предположения о том, что множества A_n образуют возрастающую последовательность. Более того, для эквивалентности 1)–3) достаточно, чтобы вместо условий (10) и (11) выполнялось

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^2(n)}{\sigma^2(n)} = \infty, \tag{12}$$

что, как несложно проверить, вытекает из (10), (11).

Доказательство. Поскольку 2) влечет 1), и 4) влечет 3), достаточно доказать импликации 1) $\Rightarrow$ 4), 3) $\Rightarrow$ 2).

Из неравенства Бореля ([4, теорема 2.1.1]) следует, что

$$\Pr\left[\left|\frac{M_n}{b(n)} - \mathbb{E}\frac{M_n}{b(n)}\right| > \lambda\right] \leqslant 2\exp\left\{-\frac{b^2(n)\lambda^2}{\sigma^2(n)}\right\}. \tag{13}$$

1) $\Rightarrow$ 4): несложно проверить (из (10)), что если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M_{c(k)}}{b(c(k))} = L, \tag{14}$$

то также $\frac{M_n}{b(n)} \to L$. Из (11), (13) и леммы Бореля–Кантелли для событий $B_k = \left\{\left|\frac{M_{c(k)}}{b(c(k))} - \mathbb{E}\frac{M_{c(k)}}{b(c(k))}\right| > \lambda\right\}$, поскольку

$$\left\{\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{M_{c(k)}}{b(c(k))} - \mathbb{E}\frac{M_{c(k)}}{b(c(k))}\right| > \lambda\right\} \subset \limsup_k B_k,$$

следует, что для любого $\lambda > 0$

$$\Pr\left[\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{M_{c(k)}}{b(c(k))} - \mathbb{E}\frac{M_{c(k)}}{b(c(k))}\right| > \lambda\right] = 0.$$

Поэтому,

$$\left|\frac{M_{c(k)}}{b(c(k))} - \mathbb{E}\frac{M_{c(k)}}{b(c(k))}\right| \to 0,\ k \to \infty \tag{15}$$

почти наверное, что гарантирует выполнение (14).

Чтобы доказать замечание 1, необходимо проверить импликацию 1) $\Rightarrow$ 3) вместо 1) $\Rightarrow$ 4), но из (13) вытекает, что $\frac{M_n}{b(n)} - \mathbb{E}\frac{M_n}{b(n)} \to 0$ по вероятности при $n \to \infty$. Вместе с 1) эта сходимость влечет 3).

3) $\Rightarrow$ 2): Сперва докажем 3) $\Rightarrow$ 1): предположим, что 1) не выполнено, тогда существует бесконечная последовательность (n_k) и $\lambda > 0$, такое что для любого k $\left|\mathbb{E}\frac{M_{n_k}}{b(n_k)} - L\right| \geqslant 2\lambda$. Поэтому для всех k

$$\Pr\left[\left|\frac{M_{n_k}}{b(n_k)} - \mathbb{E}\frac{M_{n_k}}{b(n_k)}\right| > \lambda\right] \geqslant \Pr\left[\left|\frac{M_{n_k}}{b(n_k)} - L\right| < \lambda\right]. \qquad (16)$$

Левая часть (16) стремится к 0 при $k \to \infty$ в силу (12) и (13), правая часть, в свою очередь, стремится к 1 в силу сходимости по вероятности в 3). Получаем противоречие. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) доказана.

Чтобы получить импликацию 3) $\Rightarrow$ 2), заметим, что

$$\mathbb{E}\left|\frac{M_n}{b(n)} - L\right|^p \leqslant 2^p\left(\mathbb{E}\left|\frac{M_n}{b(n)} - \mathbb{E}\frac{M_n}{b(n)}\right|^p + \left|\mathbb{E}\frac{M_n}{b(n)} - L\right|^p\right).$$

В свою очередь,

$$\mathbb{E}\left|\frac{M_n}{b(n)} - \mathbb{E}\frac{M_n}{b(n)}\right|^p \leqslant \int\limits_0^\infty 2p\exp\left\{-\frac{b^2(n)\lambda^2}{\sigma^2(n)}\right\}\lambda^{p-1}\,d\lambda \to 0,\ n \to \infty$$

в силу (12),(13). Учитывая, что $\left|\mathbb{E}\frac{M_n}{b(n)} - L\right| \to 0$, получаем желаемую сходимость. $\square$

Следствие 1. *Если $\sigma(n)$ равномерно ограничены, $b\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ возрастающая, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} b(n) = \infty$, и*

$$\frac{b(n+1)}{b(n)} \to 1, \quad n \to \infty, \qquad (17)$$

то условия 1)–4) эквивалентны.

Доказательство. Достаточно доказать, что можно выбрать $c(n)$ так, чтобы (10) выполнялось, и в то же время $b(c(n+1)) - b(c(n)) \geqslant 1$.

Отметим, что существуют $N_1 < N_2 < \ldots$, такие что $\ln\left(\frac{b(n+1)}{b(n)}\right) \leqslant 2^{-k}$ при $n \geqslant N_k$.

Покажем, что можно выбрать $c(n)$ так, чтобы нашлись положительные $1 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$, которые удовлетворяют

$$\forall m \geqslant 0\ c(T_m) \geqslant N_{m+1}, \quad b(c(T_m)) \geqslant \frac{1}{e^{2^{-m-1}} - 1}, \qquad (18)$$

$$\forall m \geqslant 1\ \ln\left(\frac{b(c(k+1))}{b(c(k))}\right) \in [2^{-m}, 2\cdot 2^{-m}] \ \text{ при } \ k \in [T_{m-1}, T_m). \qquad (19)$$

Очевидно, можно выбрать $c(1)$ так, чтобы $c(T_0) \geqslant N_1$, $b(c(T_0)) \geqslant \frac{1}{e^{2^{-1}}-1}$. Далее, будем строить c и T_m по индукции: пусть c уже задана на $\{1,\ldots,T_l\}$, также предположим, что (18), (19) выполнены при $m \leqslant l$. Поскольку $c(T_l) \geqslant N_{l+1}$ и $\ln\left(\frac{b(n+1)}{b(n)}\right) \leqslant 2^{-l-1}$ при $n \geqslant N_{l+1}$, можно задать $c(T_l+1),\ldots,c(T_l+M)$ для сколь угодно большого M, чтобы $\ln\left(\frac{b(c(T_l+i+1))}{b(c(T_l+i))}\right) \in \left[2^{-l-1}, 2\cdot 2^{-l-1}\right]$ при $0 \leqslant i \leqslant M-1$.

Теперь можно положить $T_{l+1} = T_l + M$, где M столь велико, что $c(T_l+M) \geqslant N_{l+2}$, $b(c(T_l+M)) \geqslant \frac{1}{e^{2^{-l-2}}-1}$, тогда (18) и (19) будут выполнены уже для $m \leqslant l+1$.

Несложно показать, что из (18) и (19) следует, что $b(c(n+1)) - b(c(n)) \geqslant 1$ для всех n. Более того, (19) влечет (10), что и требовалось. $\square$

Пример. Если $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – стационарная последовательность, то условие из теоремы 2 выполнено для $b(n) = \sqrt{2\log(n)}$, $A_n = \{1,\ldots,n\}$: можно взять $c(k) = 2^k$. Другой подход состоит в том, чтобы применить Следствие 1. Значит, 1)–4) эквивалентны, что, в сумме с результатом из предыдущего раздела, дает доказательство теоремы 1.

Пример. В [5, 6] был доказан следующий результат:

Теорема 3. *Пусть $S(\cdot)$ – гауссовский процесс, заданный на группе перестановок $\mathcal{S}_n$ как*

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} X_{i,\pi(i)},$$

где $X_{i,j}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ – независимые стандартные нормальные случайные величины.

Тогда имеет место следующая сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\max_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)\right]}{n\sqrt{2\log n}} = 1. \tag{20}$$

Можно применить наши результаты к этому случаю и получить следующее

Следствие 1. *При указанных выше условиях*

$$\frac{\max_{\pi\in\mathcal{S}_n} S(\pi)}{n\sqrt{2\log n}} \to 1 \tag{21}$$

по вероятности.

Доказательство. Используем замечание 1 с

$$b(n) = n\sqrt{2\log(n)}, \quad \sigma^2(n) = n.$$

Поскольку (12) выполнено, 1)–3) эквивалентны, и сходимость (20) влечет сходимость по вероятности (21). □

§4. Заключение

В связи с полученными результатами в дальнейшем целесообразно глубже изучить вопрос о поведении величин

$$m(X) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{2\log(n)}}$$

и

$$M(X) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{2\log(n)}}$$

для спектральных мер ν_X, сингулярных с мерой Лебега.

Кажется разумным начать с мер канторовского типа, которые являются распределениями случайных рядов (к примеру, как выше, рассмотреть в качестве ν_X распределение величины $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k}{2^{\alpha_k}}$) и попробовать оценить $m(X)$ и $M(X)$ в терминах плотности множества $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ (множества "частот") в множестве натуральных чисел, учитывая, что таким методом построен наш пример с $M(X) = m(X) = 0$ почти наверное: он получен из лакунарного ряда. Если же, напротив, $\mathbb{Z}_{>0} \backslash \Lambda$ конечно, то спектральная мера оказывается равномерной на некотором конечном объединении отрезков, в частности, она абсолютно непрерывна, что влечет $m(X) = M(X) = 1$. Таким образом, естественно предположить, что чем плотнее Λ в $\mathbb{Z}_{>0}$, тем в некотором смысле ближе $m(X)$ и $M(X)$ к 1.

Благодарности

Автор благодарен Ю. А. Давыдову за полезные обсуждения и интерес к данной работе.

Список литературы

1. S. M. Berman, *Limit theorems for the maximum term in stationary sequences.* — Ann. Math. Statist. **35** (1964), 502–516.
2. I. P. Cornfeld, Ya. G. Sinai, S. V. Fomin, *Ergodic Theory*, Nauka, Moscow, 1980.

3. J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1953.
4. R. J. Adler, J. E. Taylor, *Random Fields and Geometry*, Springer, New York, 2007.
5. A. Tadevosyan, *Gaussian Assignment Process*, bachelor thesis, 2021.
6. G. Mordant and J. Segers, *Maxima and near-maxima of a Gaussian random assignment field*. — Statist. Probab. Lett. **173** (2021), Paper No. 109087, 8 pp.

Novikov S. M. New result on the behaviour of Gaussian maxima in terms of the covariance function.

It is a well-known result by Berman [1] that if the covariance function $r(n)$ of a stationary centered Gaussian sequence tends to zero as n tends to infinity, then the maximum of its first n elements is $\sqrt{2\log(n)}(1+o(1))$ almost surely. In this work we discuss whether or not the Cesàro convergence of $|r(n)|$ to zero necessarily implies the same asymptotic.

Лаборатория Чебышева,
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: svyatoslav4@mail.ru

Поступило 13 июля 2022 г.