Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

А. К. Николаев

О ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

§1. Введение

Пусть $w(\tau)=(w_1(\tau),w_2(\tau))$, $\tau\geqslant 0$, $w(0)=(0,0)$ – двумерный винеровский процесс. Рассмотрим случайный линейный оператор

$$\mathcal{A}_\lambda^t\, f(x)=\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, f(x-w(\tau))\, d\tau, \tag{1}$$

заданный на функциях $f\in L_\infty\cap C(\mathbb{R}^2)$ при всех $t>0$ и $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda<0$.

Такой случайный оператор возникает при построении вероятностного представления резольвенты двумерного оператора Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Действительно, рассмотрим оператор $\mathcal{H}=-\frac{1}{2}\,\Delta$, заданный на области определения $\mathcal{D}\,(\mathcal{H})=W_2^2(\mathbb{R}^2)$ – пространстве Соболева функций, квадратично суммируемых на плоскости $\mathbb{R}^2$ и имеющих квадратично суммируемые первую и вторую производные (см. [1], с. 146). Резольвента оператора $\mathcal{H}$ допускает представление в виде преобразования Лапласа по τ полугруппы операторов $\mathcal{P}^\tau=e^{-\tau\mathcal{H}}$. Именно, в случае $\operatorname{Re}\lambda<0$ справедливо соотношение

$$(\mathcal{H}-\lambda\, I)^{-1}\, f(x)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda\,\tau}\,[e^{-\tau\mathcal{H}}\, f(x)]\, d\tau. \tag{2}$$

Ключевые слова: случайные процессы, двумерный винеровский процесс, резольвента двумерного оператора Лапласа.

Работа автора выполнена при финансовой поддержке программы социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”.

Далее, известно, что для операторной полугруппы $\mathcal{P}^\tau = e^{-\tau\mathcal{H}}$ имеет место вероятностное представление

$$e^{-\tau\mathcal{H}} f(x) = \mathbf{E} f(x - w(\tau)). \tag{3}$$

Соотношение (3) является следствием уравнения Колмогорова для полугруппы операторов, порожденной винеровским процессом.

Подставляя (3) в (2), окончательно получаем

$$(\mathcal{H} - \lambda I)^{-1} f(x) = \mathbf{E} \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau} f(x - w(\tau))\, d\tau. \tag{4}$$

Таким образом, резольвента оператора $\mathcal{H}$ допускает представление в виде потраекторного усреднения случайного оператора

$$\mathcal{A}_\lambda^\infty : f \longrightarrow \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau} f(x - w(\tau))\, d\tau,$$

который является предельным (при $t \to \infty$) случаем оператора $\mathcal{A}_\lambda^t$.

Заметим, что траектория двумерного винеровского процесса заметает на плоскости множество нулевой лебеговой меры и, значит, оператор $\mathcal{A}_\lambda^t$ не может быть продолжен до непрерывного оператора на всем пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

В настоящей работе будет построено семейство случайных операторов $\mathcal{R}_\lambda^t$, которые удовлетворяют следующим свойствам

1. При каждом $t > 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ является оператором свертки со случайной функцией $r_\lambda^t(x)$, которая с вероятностью 1 принадлежит классу Соболева $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$ при каждом $0 \leqslant \alpha < 1/2$ и, соответственно, продолжается до ограниченного оператора на всем $L_2(\mathbb{R}^2)$.

2. При каждом $t > 0$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{H})$ (через $\sigma(\mathcal{H}) = [0, \infty)$ обозначен спектр оператора $\mathcal{H}$) справедливо

$$(\mathcal{H} - \lambda I)^{-1} f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\, (f * r_\lambda^t)(x) \tag{5}$$

при всех $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

3. При каждом $t > 0$ и $\lambda \in \sigma(\mathcal{H})$ соотношение (5) справедливо при всех $f \in \mathcal{D}((\mathcal{H} - \lambda I)^{-1})$.

4. В случае $\operatorname{Re}\lambda < 0$ существует функция $r_\lambda^\infty(x)$, которая с вероятностью 1 лежит в классе Соболева $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$, и выполнено

$$(\mathcal{H} - \lambda I)^{-1} f(x) = \mathbf{E}\, (f * r_\lambda^\infty)(x)$$

при всех $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

Также в работе будет получена явная формула для функции $r_\lambda^t(x)$, выражающая ее в виде функционала от траектории двумерного винеровского процесса $w(\tau)$.

§2. Основные обозначения и определения

Через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ мы будем обозначать стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^2$, а через $\|\cdot\|$ – евклидову норму, порожденную соответствующим скалярным произведением.

Прямое преобразование Фурье функции $\psi(x) \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R}^2)$ определяется как

$$\widehat{\psi}(p) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)\, e^{i(p,x)}\, dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование – как

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\psi}(p)\, e^{-i(p,x)}\, dp.$$

Оператор A, действующий по правилу

$$(A\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(p,x)}\, \widehat{A}(p)\, \widehat{\psi}(p)\, dp,$$

называется псевдодифференциальным оператором с символом $\widehat{A}(p)$.

Далее через $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$ будем обозначать пространство Соболева функций, определенных на $\mathbb{R}^2$ (подробнее см. [1], с. 190). В пространстве $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$ мы выберем норму

$$\|\psi\|^2_{W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|p\|^{2\alpha})|\widehat{\psi}(p)|^2\, dp.$$

Через $L_\infty(\mathbb{R}^2)$ будем обозначать банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций, определенных на $\mathbb{R}^2$, с нормой $\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^2} |u(x)|$.

Через $J_0(r)$ в настоящей статье будет обозначаться функция Бесселя первого рода порядка 0. Она допускает интегральное представление

$$J_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ir\cos\varphi}\, d\varphi. \tag{6}$$

Отметим также, что функции Бесселя $J_0(r)$ удовлетворяют тождеству

$$\int_0^\infty r\, J_0(\alpha\, r)\, J_0(\beta\, r)\, dr = \frac{\delta\,(\alpha-\beta)}{\alpha}, \quad \alpha,\, \beta > 0. \tag{7}$$

которое следует понимать в смысле обобщенных функций (подробнее см. [5]).

Через $I_0(r)$ будет обозначаться модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 0. Она является функцией Бесселя чисто мнимого аргумента $I_0(r) = J_0(re^{i\pi/2})$ и допускает интегральное представление (см. [4], с. 201)

$$I_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}\, d\varphi. \tag{8}$$

Функция $I_0(r)$ при $r \to \infty$ имеет асимптотику (см. [4], с. 228)

$$I_0(r) = \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + O\Big(\frac{1}{r}\Big)\right). \tag{9}$$

§3. Определение оператора $\mathcal{R}^t_\lambda$. Случай $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$

При каждом $\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ и $t > 0$ определим случайный оператор $\mathcal{R}^t_\lambda$ на функциях $f(x) \in L_\infty \cap C(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\mathcal{R}^t_\lambda\, f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(x - \|w(\tau)\| \cdot \theta)\, dS(\theta)\right] d\tau, \tag{10}$$

где $dS(\theta)$ – длина элемента дуги единичной окружности S^1.

Ниже мы покажем, что оператор $\mathcal{R}^t_\lambda$ с вероятностью 1 продолжается до ограниченного интегрального оператора в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и изучим свойства его ядра.

Справедливо утверждение.

Теорема 1. 1. *Оператор* $\mathcal{R}^t_\lambda$ *является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$\widehat{r^t_\lambda}(p) = \int_0^t e^{\lambda\tau}\, J_0(\|p\|\, \|w(\tau)\|)\, d\tau, \quad p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{11}$$

2. *Функция* $r_\lambda^t(x)$, *определенная своим преобразованием Фурье* $\widehat{r_\lambda^t}(p)$, *с вероятностью* 1 *принадлежит классу Соболева* $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$ *при каждом* $0 \leqslant \alpha < 1/2$.

Доказательство. Найдем преобразование Фурье функции $[\mathcal{R}_\lambda^t f](x)$.

Заметим, что (10) может быть записано в виде

$$[\mathcal{R}_\lambda^t f](x) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \mathbf{E}_{\theta(\tau)}\, f(x - w(\tau))\, d\tau, \tag{12}$$

где $\mathbf{E}_{\theta(\tau)}$ – математическое ожидание, взятое по угловой компоненте

$$\theta(\tau) = \frac{w(\tau)}{\|w(\tau)\|}$$

двумерного винеровского процесса $w(\tau)$.

С учетом (12), выражение для функции $[\widehat{\mathcal{R}_\lambda^t f}](p)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
[\widehat{\mathcal{R}_\lambda^t f}](p) &= \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \mathbf{E}_{\theta(\tau)}\, e^{i(p, w(\tau))}\, d\tau \cdot \widehat{f}(p) \\
&= \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} e^{i(p, \|w(\tau)\| y)}\, dS(y) \right) d\tau \cdot \widehat{f}(p).
\end{aligned} \tag{13}$$

В последнем соотношении мы воспользовались тем, что случайный вектор $\theta(\tau)$ в каждый момент времени $\tau > 0$ имеет равномерное распределение на единичной окружности S^1.

Используя (6), окончательно получаем

$$[\widehat{\mathcal{R}_\lambda^t f}](p) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, J_0(\|p\|\, \|w(\tau)\|)\, d\tau \cdot \widehat{f}(p). \tag{14}$$

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно показать конечность интеграла

$$I_{t,\alpha,\lambda} = \int\limits_1^\infty q^{2\alpha}\, \mathbf{E} \left| \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, J_0(q\, \|w(\tau)\|)\, d\tau \right|^2 q\, dq. \tag{15}$$

Вычислим математическое ожидание, стоящее в (15). Для этого нам понадобится следующая легко проверяемая формула. Для каждой функции $\varphi \in L_1\,[0,t]$ справедливо соотношение

$$\Bigl|\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\Bigr|^2 = 2\cdot \int\limits_{0<\tau_2<\tau_1<t} \operatorname{Re}\,[\varphi(\tau_1)\,\overline{\varphi(\tau_2)}]\,d\tau_1 d\tau_2. \tag{16}$$

Используя (16), получаем

$$\mathbf{E}\Bigl|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\,J_0(q\,\|w(\tau)\|)\,d\tau\Bigr|^2$$
$$= 2\cdot\operatorname{Re}\int\limits_{0<\tau_2<\tau_1<t} e^{\lambda\tau_1}\,e^{\overline{\lambda}\tau_2}\,\mathbf{E}\,[J_0(q\,\|w(\tau_1)\|)\,J_0(q\,\|w(\tau_2)\|)]\,d\tau_1\,d\tau_2. \tag{17}$$

Обозначим через $M = M(q,\tau_1,\tau_2)$ математическое ожидание, стоящее в формуле (17). Найдем в явном виде виде выражение для функции $M(q,\tau_1,\tau_2)$.

Используя соотношение

$$J_0(q\,\|w(\tau)\|) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1} e^{iq\,(\theta,\,w(\tau))}\,dS(\theta),$$

получаем

$$M(q,\tau_1,\tau_2)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{S^1}\int\limits_{S^1}\mathbf{E}\,e^{iq\,(\theta_1,w(\tau_1)-w(\tau_2))}\mathbf{E}\,e^{iq(\theta_1-\theta_2,\,w(\tau_2))}\,dS(\theta_1)\,dS(\theta_2). \tag{18}$$

Далее, используя формулы

$$\mathbf{E}\,e^{iq\,(\theta_1,\,w(\tau_1)-w(\tau_2))} = e^{\frac{-(\tau_1-\tau_2)\,q^2}{2}}$$

и

$$\mathbf{E}\,e^{iq\,(\theta_1-\theta_2,\,w(\tau_2))} = e^{-\tau_2\,q^2\,(1-\cos\varphi)},$$

где φ – угол между векторами θ_1 и θ_2, преобразуем (18)

$$\begin{aligned} M(q,\tau_1,\tau_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\, e^{\frac{-(\tau_1-\tau_2)\,q^2}{2}} \int\limits_{S^1}\int\limits_{S^1} \mathbf{E}\, e^{iq\,(\theta_1-\theta_2,\,w(\tau_2))}\, dS(\theta_1)\, dS(\theta_2) \\ &= \frac{1}{2\pi}\, e^{\frac{-(\tau_1-\tau_2)\,q^2}{2}} \int\limits_0^{2\pi} e^{-\tau_2\, q^2\,(1-\cos\varphi)}\, d\varphi. \end{aligned} \tag{19}$$

С учетом интегрального представления для модифицированной функции Бесселя (8), окончательно получаем

$$M(q,\tau_1,\tau_2) = e^{\frac{-(\tau_1-\tau_2)\,q^2}{2}}\, e^{-\tau_2\, q^2}\cdot I_0(\tau_2\, q^2). \tag{20}$$

Далее, из (9) следует, что функция $e^{-\tau\, q^2}\cdot I_0(\tau\, q^2)$ допускает оценку $e^{-\tau\, q^2}\cdot I_0(\tau\, q^2) \leqslant \frac{C}{q\sqrt{\tau}}$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, J_0(q\,\|w(\tau)\|)\, d\tau\right|^2 \\ &= \int\limits_0^t \left(\mathrm{Re}\int\limits_{\tau_2}^t e^{\lambda(\tau_1-\tau_2)}\, e^{\frac{-(\tau_1-\tau_2)\,q^2}{2}}\, d\tau_1\right) e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\cdot\tau_2}\, e^{-\tau_2\, q^2}\, I_0(\tau_2\, q^2)\, d\tau_2 \\ &\leqslant \frac{C}{\left|\frac{q^2}{2}-\lambda\right|\cdot q} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, e^{2\mathrm{Re}\,\lambda\cdot\tau}\, d\tau \leqslant \frac{C(t,\lambda)}{\left|\frac{q^2}{2}-\lambda\right|\cdot q}. \end{aligned} \tag{21}$$

Окончательно получаем

$$I_{t,\alpha,\lambda} \leqslant C(t,\lambda)\int\limits_1^\infty \frac{dq}{q^{2-2\alpha}} < \infty,$$

что завершает доказательство п. 2 теоремы.

Отметим также, что в случае $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ в формуле (21) можно положить $t=\infty$. Это значит, что в метрике пространства $\mathcal{W}_2^\alpha$ измеримых случайных функций $g(x)$ с нормой

$$\|g\|_\alpha^2 = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^2} (1+\|p\|^{2\alpha})\, |\widehat{g}(p)|^2\, dp$$

существует предел

$$r_\lambda^\infty(x) = \lim_{t\to\infty} r_\lambda^t(x). \qquad \square$$

Следствие. *Из п. 2 теоремы следует, что оператор* $\mathcal{R}_\lambda^t$ *допускает продолжение на все пространство* $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Используя (7) и (11), можно получить явное выражение для функции $r_\lambda^t(x)$ как функционала от траектории двумерного винеровского процесса $w(\tau)$

$$\begin{aligned} r_\lambda^t(x) &= (L_2) \lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\|p\|<M} \left(\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, J_0(\|p\|\,\|w(\tau)\|) d\tau \right) e^{-i(p,x)}\, dp \\ &= (L_2) \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} \left(\int\limits_0^M q\, J_0(q\,\|x\|)\, J_0(q\,\|w(\tau)\|)\, dq \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi\,\|x\|} \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \delta\left(\|x\| - \|w(\tau)\|\right) d\tau, \qquad (22) \end{aligned}$$

где через q обозначена евклидова норма переменной $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, а через δ обозначена дельта-функция Дирака.

§4. Определение оператора $\mathcal{R}_\lambda^t$. Случай $\operatorname{Re}\lambda > 0$

Пусть $\lambda = a + i\,b$. Определим случайную функцию $r_\lambda^t(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ ее преобразованием Фурье, полагая

$$\widehat{r_\lambda^t}(p) = -\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau}\, e^{(p,\,w(\tau))}\, d\tau, \qquad (23)$$

если $\|p\| < \sqrt{2a}$, и

$$\widehat{r_\lambda^t}(p) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, J_0(\|p\|\,\|w(\tau)\|)\, d\tau \qquad (24)$$

в противном случае.

Справедливо утверждение.

Теорема 2. *Функция* $r_\lambda^t(x)$, *определенная формулами* (23) *и* (24), *с вероятностью* 1 *принадлежит классу Соболева* $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$ *при каждом* $0 \leqslant \alpha < 1/2$.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству п. 2 теоремы 1.

Следствие. *Из теоремы* 2 *следует, что оператор* $\mathcal{R}_\lambda^t$*, определенный с помощью формулы*

$$\mathcal{R}_\lambda^t\, f(x) = (f * r_\lambda^t)(x),$$

допускает продолжение на все пространство $L_2(\mathbb{R}^2)$.

§5. Представление резольвенты

Как и выше, обозначим через Δ двумерный оператор Лапласа и рассмотрим оператор $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\,\Delta$, заданный на области определения $\mathcal{D}\,(\mathcal{H}) = W_2^2(\mathbb{R}^2)$. Отметим, что оператор $\mathcal{H}$ является самосопряженным и положительно определенным на его области определения и имеет лишь абсолютно непрерывный спектр, сосредоточенный на положительной полуоси $\sigma\,(\mathcal{H}) = \sigma_{ac}\,(\mathcal{H}) = [0, \infty)$.

Через $R_\lambda = (\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}$ обозначим резольвенту оператора $\mathcal{H}$. В случае, если $\lambda \notin \sigma\,(\mathcal{H})$, область определения R_λ совпадает с $L_2(\mathbb{R}^2)$. В противном случае область определения оператора R_λ имеет вид

$$\mathcal{D}\,(R_\lambda) = \Big\{ f(x) \in L_2(\mathbb{R}^2) : \; \frac{\widehat{f}(p)}{\frac{\|p\|^2}{2} - \lambda} \in L_2(\mathbb{R}^2) \Big\}.$$

В импульсном представлении (то есть после преобразования Фурье) оператору R_λ соответствует унитарно эквивалентный ему оператор $\widehat{R_\lambda}$ (подробнее см. [2], с. 101), который на своей области определения действует по правилу

$$\widehat{R_\lambda}\, \widehat{f}(p) = \widehat{r}_\lambda(p) \cdot \widehat{f}(p),$$

где функция $\widehat{r}_\lambda(p)$ определена с помощью формулы

$$\widehat{r}_\lambda(p) = \frac{1}{\frac{\|p\|^2}{2} - \lambda}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. 1. *Если* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, *то при всех* $f \in L_2\,(\mathbb{R}^2)$ *выполнено*

$$R_\lambda\, f(x) = \mathbf{E}\,(f * r_\lambda^\infty)(x).$$

2. *Если* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{H})$, $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$, *то при всех* $f \in L_2\,(\mathbb{R}^2)$ *выполнено*

$$R_\lambda\, f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,(f * r_\lambda^t)(x).$$

3. *Если* $\lambda \in \sigma(\mathcal{H})$, *то при всех* $f \in \mathcal{D}\,(\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}$ *выполнено*

$$R_\lambda\, f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,(f * r_\lambda^t)(x).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Поскольку оператор $\mathcal{R}_\lambda^\infty$ действует на функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ по правилу

$$\mathcal{R}_\lambda^\infty\, f(x) = (r_\lambda^\infty * f)(x),$$

то в Фурье-образе он имеет вид

$$\widehat{\mathcal{R}_\lambda^\infty}\, \widehat{f}(p) = \widehat{r_\lambda^\infty}(p) \cdot \widehat{f}(p).$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\mathbf{E}\,[\widehat{\mathcal{R}_\lambda^\infty}\, \widehat{f}(p)] = \mathbf{E} \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau}\, J_0(\|p\|\, \|w(\tau)\|)\, d\tau \cdot \widehat{f}(p).$$

С учетом тождества

$$\mathbf{E}\, J_0\,(\|p\|\, \|w(\tau)\|) = \mathbf{E}\, e^{i\,(p,\, w(\tau))} = e^{-\frac{\tau\,\|p\|^2}{2}},$$

окончательно получаем

$$\mathbf{E}\,[\widehat{\mathcal{R}_\lambda^\infty}\, \widehat{f}(p)] = \frac{\widehat{f}(p)}{\frac{\|p\|^2}{2} - \lambda},$$

что завершает доказательство первого пункта теоремы.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Действие оператора $\widehat{\mathcal{R}_\lambda^t}$ на функции $\widehat{f}(p) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ определяется формулой

$$\widehat{\mathcal{R}_\lambda^t}\, \widehat{f}(p) = \widehat{r_\lambda^t}(p) \cdot \widehat{f}(p)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}\,[\widehat{\mathcal{R}_\lambda^t}\, \widehat{f}(p)] = \mathbf{E}\, \widehat{r_\lambda^t}(p) \cdot \widehat{f}(p).$$

Таким образом, для доказательства соответствующего утверждения достаточно показать то, что

$$\frac{\widehat{f}(p)}{\frac{\|p\|^2}{2} - \lambda} = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\, \widehat{r_\lambda^t}(p) \cdot \widehat{f}(p) \tag{25}$$

справедливо при всех $\widehat{f}(p) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H})$.

Найдем в явном виде выражение для математического ожидания, стоящего в (25). С учетом (23) и (24), получаем

$$\mathbf{E}\,\widehat{r^t_\lambda}(p) = H(t,\lambda,p) + \frac{1}{\frac{\|p\|^2}{2} - \lambda}, \tag{26}$$

где функция $H(t,\lambda,p)$ определена с помощью формулы

$$H(t,\lambda,p) = \frac{e^{\pm\, t\,(\frac{\|p\|^2}{2} - \lambda)}}{\lambda - \frac{\|p\|^2}{2}}$$

(знаки $+$ и $-$ отвечают случаям $\|p\| \leqslant \sqrt{2a}$ и $\|p\| > \sqrt{2a}$ соответственно).

Далее, напомним, что спектр оператора $\mathcal{H}$ сосредоточен на положительной полуоси $\sigma\,(\mathcal{H}) = [0,\infty)$. Заметим, что при каждом $t > 0$, $\lambda \notin \sigma\,(\mathcal{H})$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ и $p \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$|H(t,\lambda,p)| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}, \tag{27}$$

а при каждом $\lambda \notin \sigma\,(\mathcal{H})$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ имеет место сходимость

$$\lim_{t\to\infty} H(t,\lambda,p) = 0 \tag{28}$$

при почти всех $p \in \mathbb{R}^2$.

Таким образом, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, справедливо (25), что завершает доказательство второго пункта теоремы.

Докажем теперь утверждение пункта 3 теоремы. Поскольку $\lambda \in \sigma\,(\mathcal{H})$, мы уже не можем использовать оценку (27). Вместо этого заметим, что

$$\frac{\widehat{f}(p)}{\frac{\|p\|^2}{2} - \lambda} \in L_2(\mathbb{R}^2)$$

(последнее по определению означает, что $f(x) \in \mathcal{D}\,(\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}$). Снова используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, а также (26) и (28), получаем справедливость (25). $\square$

Список литературы

1. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Л., Изд–во Ленингр. ун-та, 1981.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л., Изд–во Ленингр. ун-та, 1980.

3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. 2-е изд.,М., Наука, 1974.
4. Г. Ватсон, *Теория бесселевых функций.* М., ИЛ 1949.
5. J. Ponce de Leon, *Revisiting the ortogonality of Bessel functions of the first kind on an infinite interval* — European J. Phys. **36**, No. 1 (2014), 015016.

Nikolaev A. K. On the probabilistic representation of the resolvent of the two-dimensional Laplacian.

In this paper we consider a family of random linear operators that arises in the construction of a probabilistic representation of the resolvent of the two-dimensional Laplacian. It is shown that with probability 1 the operators of this family are integral operators in $L_2(\mathbb{R}^2)$. The properties of the kernels of the corresponding operators are also investigated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023;
Исследовательская лаборатория
им. П. Л. Чебышева,
14-я линия Васильевского острова, 29,
199178, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolaiev.96@bk.ru

Поступило 8 сентября 2022 г.