Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

Т. Д. Мосеева

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ГРАНИЦЫ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

§1. Введение и основные результаты

Рассмотрим выпуклое тело K в $\mathbb{R}^d$ и обозначим через $|K|$ его объем (d-мерную меру Лебега). Обозначим через ∂K границу K, снабженную $(d-1)$-мерной мерой Хаусдорфа $\sigma_{\partial K}$. Для краткости мы будем использовать обозначение σ вместо $\sigma_{\partial K}$ в случаях, когда из контекста ясно, граница какого тела рассматривается. Также для краткости мы будем использовать обозначение $|\partial K| = \sigma(\partial K)$.

Пусть $l \in \{1, \dots, d\}$. Обозначим через $A_{d,l}$ множество всех аффиных l-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^d$ с мерой Хаара $\mu_{d,l}$, инвариантной относительно поворотов и параллельных переносов и нормированной следующим образом:

$$\mu_{d,l}\left(\left\{E \in A_{d,l} : E \cap \mathbb{B}^d \neq \varnothing\right\}\right) = \kappa_{d-l}, \tag{1}$$

где $\mathbb{B}^k$ есть k-мерный едичиный шар, а $\kappa_k := |\mathbb{B}^k|$. Обозначим также $\omega_k := |\mathbb{S}^{k-1}| = k\kappa_k$, где $\mathbb{S}^{k-1} = \partial\mathbb{B}^k$ – $(k-1)$-мерная единичная сфера.

Для конечного множества точек $x_1, \dots, x_n$ в $\mathbb{R}^d$ обозначим через $[x_1, \dots, x_n]$ их выпуклую оболочку. В частности, $[x_1, x_2]$ обозначает отрезок с концами в точках x_1 и x_2.

Рассмотрим сначала случай $d = 2$. Пусть K – выпуклая фигура на плоскости с C^1-гладкой границей. Рассмотрим прямую G, пересекающую K, выбранную в соответствии с мерой Хаара $\mu_{2,1}$.

В [6] Плейелем было получено тождество, позволяющее выразить значение интегрального функционала от длины хорды $G \cap K$ в терминах интегрирования по границе K. А именно, для любой функции

Ключевые слова: формула Бляшке–Петканчина, формула Цэле, тождество Плейеля, тождество Амбарцумяна–Плейеля, случайная хорда.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики "Базис" и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2022-287.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющей непрерывную производную и такой, что $h(0) = 0$, имеем:

$$\int\limits_{G\cap K\neq\varnothing} h(|G\cap K|)\mu_{2,1}(\mathrm{d}G) = \frac{1}{2}\int\limits_{(\partial K)^2} h'(|x_1 - x_2|)\cos\alpha_1\cos\alpha_2\,\sigma(\mathrm{d}x_1)\sigma(\mathrm{d}x_2), \tag{2}$$

где α_1 и α_2 – величины углов между касательными в точках x_1 и x_2 и хордой $[x_1, x_2]$, лежащих по одну сторону от хорды.

Кроме того, Плейель показал, что

$$\int\limits_{G\cap K\neq\varnothing} h(|G\cap K|)\mu_{2,1}(\mathrm{d}G) = \int\limits_{G\cap K\neq\varnothing} h'(|G\cap K|)|G\cap K|\cot\alpha_1\cot\alpha_2\mu_{2,1}(\mathrm{d}G). \tag{3}$$

Из равенства (2) можно вывести (см.[3, раздел 6.9]) явную форму дефекта в изопериметрическом неравенстве:

$$|\partial K|^2 - 4\pi|K| = 2\int\limits_{(\partial K)^2} \sin^2\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sigma(\mathrm{d}x_1)\sigma(\mathrm{d}x_2).$$

Амбарцумяном в [2] было получено комбинаторное доказательство тождества Плейеля, а также представлена его версия для выпуклых плоских многоугольников, также известная как тождество Амбарцумяна–Плейеля: пусть P – выпуклый многоугольник с длинами сторон $a_1, \ldots, a_n$, тогда

$$\int\limits_{G\cap P\neq\varnothing} h(|G\cap P|)\mu_{2,1}(\mathrm{d}G) = \int\limits_{G\cap P\neq\varnothing} h'(|G\cap P|)|G\cap P|\cot\alpha_1\cot\alpha_2\,\mu_{2,1}(\mathrm{d}G) + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{a_i} h(t)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Существует аналог тождества Плейеля для выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей (см. [1]):

$$\int\limits_{G\cap K\neq\varnothing} h(|G\cap K|)\mu_{3,1}(\mathrm{d}G)$$
$$= 4\int\limits_{(\partial K)^2} \frac{h'(|x_1-x_2|)}{|x_1-x_2|}\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\phi_0\,\sigma(\mathrm{d}x_1)\sigma(\mathrm{d}x_2),$$

где α_1, α_2 – величины углов между прямой, содержащей хорду $[x_1, x_2]$, и ее проекциями на касательные плоскости, а ϕ_0 – величина угла между проекциями нормалей в точках x_1, x_2 на ортогональное дополнение прямой, проходящей через точки x_1 и x_2.

Первый результат данной статьи – обобщение тождества Плейеля на случай произвольной размерности.

Теорема 1. *Рассмотрим выпуклое тело K в $\mathbb{R}^d$ с C^1-гладкой границей. Для любой функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющей непрерывную производную и такой, что $h(0) = 0$, имеем:*

$$\int\limits_{G\cap K\neq\varnothing} h(|G\cap K|)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G)$$
$$= \frac{1}{(d-1)\omega_d}\int\limits_{(\partial K)^2} \frac{h'(|x_1-x_2|)}{|x_1-x_2|^{d-2}}\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\phi_0\,\sigma(\mathrm{d}x_1)\sigma(\mathrm{d}x_2),$$

где α_1, α_2 – углы между прямой, содержащей хорду $[x_1, x_2]$, и ее проекциями на касательные плоскости, а ϕ_0 – угол между проекциями нормалей в точках x_1, x_2 на ортогональное дополнение прямой, проходящей через x_1 и x_2.

Для того, чтобы сформулировать дальнейшие результаты, нам понадобится ввести некоторые обозначения для подмножеств меньшей размерности. Для некоторых $E \in A_{d,l}$ и $k \in \{1, \dots, l\}$ обозначим через $A_{E,k}$ множество всех аффинных k-мерных плоскостей в $E \cong \mathbb{R}^l$, снабженное мерой Хаара $\mu_{E,k}$, инвариантной относительно движений и нормированной так же, как в (1). Для произвольного подмножества $M \subset \mathbb{R}^d$ обозначим

$$A_{M,k} = A_{\operatorname{aff} M,k}, \quad \mu_{M,k} = \mu_{\operatorname{aff} M,k},$$

где $\operatorname{aff} M$ есть аффинная оболочка M – пересечение всех аффинных плоскостей, содержащих M. Обозначим также через λ_E l-мерную меру Лебега на E и $\lambda_E(|K \cap E|)$ будем для краткости обозначать как $|K \cap E|$. Аналогично, для точек $x_0, \dots, x_l \in \mathbb{R}^d$ обозначим через $|[x_0, \dots, x_l]|$ l-мерную меру Лебега их выпуклой оболочки.

Следующий результат данной работы обощает тождество Амбарцумяна–Плейеля (4) на случай произвольной размерности. Для выпуклого многогранника P обозначим через $\mathcal{F}(P)$ множество его гиперграней.

Теорема 2. *Пусть P – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$. Тогда для любой функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющей непрерывную производную и такой, что $h(0) = 0$, выполнено*

$$\int\limits_{G \cap P \neq \varnothing} h(|G \cap P|)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G) = \frac{1}{(d-1)} \int\limits_{G \cap P \neq \varnothing} h'(|G \cap P|)|G \cap P| \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 \cos\phi_0\, \mu_{d,1}(\mathrm{d}G) + \sum_{F \in \mathcal{F}(P)} \int\limits_{A_{F,1}} H(|G \cap F|)\mu_{F,1}(\mathrm{d}G),$$

где α_1, α_2 – величины углов между прямой G и ее проекциями на касательные гиперплоскости, ϕ_0 – величина угла между проекциями нормалей в концах $G \cap P$ на ортогональное дополнение прямой G, а H – первообразная h.

Сформулируем формулу Бляшке–Петканчина ([8], теорема 7.2.7), широко используемую при работе с выпуклыми оболочками точек, случайно выбранных внутри данного выпуклого тела: пусть $h : (\mathbb{R}^d)^{l+1} \to \mathbb{R}$ – измеримая функция, $l \in \{1, \dots, d\}$, тогда

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{l+1}} h(x_0, \dots, x_l)\mathrm{d}x_0 \dots \mathrm{d}x_l = (l!)^{d-l} b_{d,l} \int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{E^{l+1}} h(x_0, \dots, x_l)|[x_0, \dots, x_l]|^{d-l} \lambda_E(\mathrm{d}x_0) \dots \lambda_E(\mathrm{d}x_l)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E), \tag{5}$$

где $b_{d,l} = \frac{\omega_{d-k+1} \cdots \omega_d}{\omega_1 \cdots \omega_l}$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится формула Цэле, являющаяся аналогом формулы Бляшке–Петканчина в случае, когда точки случайно выбираются на границе выпуклого тела ([9, 7]): пусть K – выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$, $h : (\mathbb{R}^d)^{l+1} \to \mathbb{R}$ – измеримая функция, $l \leqslant d$, тогда

$$\int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{(E\cap\partial K)^{l+1}} h(x_0,\dots,x_l)\mathbb{1}_{\{x_0,\dots,x_l \text{ в общем положении}\}}\sigma_{E\cap\partial K}(\mathrm{d}x_0)\dots\sigma_{E\cap\partial K}(\mathrm{d}x_l)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E)$$
$$= \frac{1}{(l!)^{d-l}b_{d,l}} \int\limits_{(\partial K)^{l+1}} h(x_0,\dots,x_l)\mathbb{1}_{\{x_0,\dots,x_l \text{ в общем положении}\}}\frac{1}{|[x_0,\dots,x_l]|^{d-l}}$$
$$\times \prod_{j=0}^{l} \|\mathrm{P}_{\mathrm{aff}(x_0,\dots,x_l)}(n_K(x_j))\|\sigma(\mathrm{d}x_0)\dots\sigma(\mathrm{d}x_l), \tag{6}$$

где $n_K(x)$ обозначает внешнюю нормаль к ∂K в точке x, а P_E есть ортогональная проекция на плоскость E.

В работе мы приводим следующее обобщение одновременно формул Бляшке–Петканчина и Цэле для выпуклых тел с гладкой границей:

Теорема 3. *Пусть K – выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей, $h(x_0,\dots,x_l)$ – непрерывная функция, $l \leqslant d$. Тогда для всех $k \in \{0,\dots,l+1\}$ имеем*

$$\int\limits_{(\partial K)^k} \int\limits_{(K)^{l-k+1}} h(x_0,\dots,x_l)\mathrm{d}x_0\dots\mathrm{d}x_{l-k}\sigma(\mathrm{d}x_{l-k+1})\dots\sigma(\mathrm{d}x_l)$$
$$= (l!)^{d-l}b_{d,l}\int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{(E\cap\partial K)^k} \int\limits_{(E\cap K)^{l-k+1}} h(x_0,\dots,x_l)|[x_0,\dots,x_l]|^{d-l}$$
$$\times \prod_{j=l-k+1}^{l} \|\mathrm{P}_E(n_K(x_j))\|^{-1}\lambda_E(\mathrm{d}x_0)\dots\lambda_E(\mathrm{d}x_{l-k})\sigma_{E\cap\partial K}(\mathrm{d}x_{l-k+1})$$
$$\dots\sigma_{E\cap\partial K}(\mathrm{d}x_l)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E),$$

где $n_K(x)$ обозначает внешнюю нормаль к K в точке x, а P_E есть ортогональная проекция на плоскость E.

Рассмотрим случай $k = l = 1$, когда одна точка выбирается на границе, а одна внутри K. Применяя теорему 3 к функции $h(x_0, x_1) = |x_0 - x_1|^n$ для некоторого целого n, получаем следующую формулу.

Следствие 1. *Для выпуклого тела K с гладкой границей имеем*

$$\int_{\partial K}\int_{K} |x_0 - x_1|^n \mathrm{d}x_0 \sigma(\mathrm{d}x_1) = \frac{\omega_d}{4(n+d)} \int_{A_{d,1}} |G \cap K|^{n+d} \left(\frac{1}{\sin\alpha_1} + \frac{1}{\sin\alpha_2}\right) \mu_{d,1}(\mathrm{d}G),$$

где α_i – угол между прямой G и касательной гиперплоскостью в точке x_i.

Это аналог формулы Кингмана [5], которая утверждает, что

$$\int_{K^2} |x_0 - x_1|^n \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_1 = \frac{\omega_d}{(n+d)(n+d+1)} \int_{A_{d,1}} |G \cap K|^{n+d+1} \mu_{d,1}(\mathrm{d}G).$$

Доказательство следствия 1. Применяя теорему 3 к функции $h(x_0, x_1) = |x_0 - x_1|^n$, получаем

$$\int_{\partial K}\int_{K} |x_0 - x_1|^n \mathrm{d}x_0 \sigma(\mathrm{d}x_1) = \frac{\omega_d}{4} \int_{A_{d,1}} \Big(\frac{1}{\sin\alpha_1} \int_{G\cap K} |x_0 - x_1|^{n+d-1} \lambda_G(\mathrm{d}x_0) + \frac{1}{\sin\alpha_2} \int_{G\cap K} |x_0 - x_2|^{n+d-1} \lambda_G(\mathrm{d}x_0)\Big) \mu_{d,1}(\mathrm{d}G).$$

Используя

$$\int_{G\cap K} |x_0 - x_i|^{n+d-1} \lambda_G(\mathrm{d}x_0) = \int_0^{|G\cap K|} x^{n+d-1} \mathrm{d}x = \frac{|G \cap K|^{n+d}}{n+d},$$

завершаем доказательство. □

Применяя (6) в случае многогранников, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть P – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$, $h(x_0,\dots,x_l)$ – измеримая функция, $l \leqslant d-1$. Тогда*

$$\int\limits_{(\partial P)^{l+1}} h(x_0,\dots,x_l)\sigma(\mathrm{d}x_0)\dots\sigma(\mathrm{d}x_l)$$

$$= (l!)^{d-l} b_{d,l} \sum_{\substack{(F_0,\dots,F_l)\in\mathcal{F}^{l+1}(P)\\ \exists F_i\neq F_j}} \int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{E\cap F_0} \dots \int\limits_{E\cap F_l} h(x_0,\dots,x_l)$$

$$\times |[x_0,\dots,x_l]|^{d-l} \prod_{j=0}^{l} \|\mathrm{P}_E(n_P(x_j))\|^{-1} \lambda_{E\cap F_0}(\mathrm{d}x_0)\dots\lambda_{E\cap F_l}(\mathrm{d}x_l)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E)$$

$$+ (l!)^{d-l-1} b_{d-1,l} \cdot \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \int\limits_{A_{F,l}} \int\limits_{(E\cap F)^{l+1}} h(x_0,\dots,x_l)$$

$$\times |[x_0,\dots,x_l]|^{d-l-1} \lambda_{E\cap F}(\mathrm{d}x_0)\dots\lambda_{E\cap F}(\mathrm{d}x_l)\mu_{F,l}(\mathrm{d}E),$$

где $n_P(x)$ обозначает внешнюю нормаль к P в точке x, а P_E есть ортогональная проекция на плоскость E.

Работа организована следующим образом. В разделах 2 и 3 приведены доказательства теоремы 1 и теоремы 2, далее приведено доказательство теоремы 3 в разделе 4. Доказательство теоремы 4 приводится в разделе 5.

§2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится понятие флаговых пространств.

Пусть $p, q \in \{0,\dots,d\}$ и пусть $E \in A_{d,p}$ – фиксированное p-мерное аффинное подпространство. Как было отмечено выше, через $A_{E,q}$ мы обозначаем пространство всех q-мерных аффинных подпространств, содержащихся в E, если $q \leqslant p$. В случае, когда $q \geqslant p$, обозначим через $A_{E,q}$ пространство всех q-мерных аффинных подпространств, содержащих E. Обозначим через $\mu_{E,q}$ инвариантную меру на $A_{E,q}$ (см. [8, раздел 7.1]).

Рассмотрим пары аффинных подпространств:

$$A(d,p,q) := \{(E,F) \in A_{d,p} \times A_{d,q} : E \subset F\}, \text{ если } p < q,$$
$$A(d,p,q) := \{(E,F) \in A_{d,p} \times A_{d,q} : E \supset F\}, \text{ если } p > q.$$

Нам понадобится следующая терема типа Фубини для флаговых пространств (см, например, [8, теорема 7.1.2]): если $0 \leqslant p < q \leqslant d-1$ и $h : A(d,p,q) \to \mathbb{R}$ – измеримая неотрицательная функция, тогда

$$\int\limits_{A_{d,q}} \int\limits_{A_{F,p}} h(E,F)\mu_{F,p}(\mathrm{d}E)\mu_{d,q}(\mathrm{d}F) = \int\limits_{A_{d,p}} \int\limits_{A_{E,q}} h(E,F)\mu_{E,q}(\mathrm{d}F)\mu_{d,p}(\mathrm{d}E). \quad (7)$$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Из равенства (6) с $l = 1$ следует, что для измеримой функции $h(x_1, x_2)$ имеем:

$$\int\limits_{A_{d,1}} h(x_1,x_2)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G) = \frac{1}{\omega_d} \int\limits_{(\partial K)^2} h(x_1,x_2)\frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{|x_1 - x_2|^{d-1}}\sigma(\mathrm{d}x_1)\sigma(\mathrm{d}x_2), \quad (8)$$

где α_1 и α_2 – углы между прямой $\mathrm{aff}(x_1, x_2)$ и касательными гиперплоскостями в точках x_1 и x_2.

Применяя равенство (7) с $p = 1, q = 2$, получаем:

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_{d,1}} h(|G\cap K|)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G) &= \int\limits_{A_{d,1}} \int\limits_{A_{G,2}} h(|G\cap K|)\mu_{G,2}(\mathrm{d}E)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G) \\ &= \int\limits_{A_{d,2}} \int\limits_{A_{E,1}} h(|G\cap K|)\mu_{E,1}(\mathrm{d}G)\mu_{d,2}(\mathrm{d}E).\end{aligned}$$

Применение тождества Плейеля (3) к внутреннему интегралу и выпуклому плоскому телу $K \cap E$ влечет

$$\int\limits_{A_{E,1}} h(|G\cap K|)\mu_{E,1}(\mathrm{d}G) = \int\limits_{A_{E,1}} h'(|G\cap K|)|G\cap K| \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{E,1}(\mathrm{d}G),$$

где ψ_1 и ψ_2 – величины углов между касательными к $K \cap F$ в концах хорды $G \cap K$ и прямой G, лежащих по одну сторону от G.

Вновь применяя (7), получаем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{A_{d,1}} h(|G\cap K|)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G) \quad (9)\\ &= \int\limits_{A_{d,1}} \int\limits_{A_{G,2}} h'(|G\cap K|)|G\cap K| \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{G,2}(\mathrm{d}E)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G)\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{A_{d,1}} h'(|G\cap K|)|G\cap K| \left(\int\limits_{A_{G,2}} \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{G,2}(\mathrm{d}E)\right) \mu_{d,1}(\mathrm{d}G)$$
$$= \frac{1}{\omega_d} \int\limits_{(\partial K)^2} \frac{h'(|x_1-x_2|)}{|x_1-x_2|^{d-2}} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$
$$\times \left(\int\limits_{A_{G,2}} \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{G,2}(\mathrm{d}E)\right) \sigma(\mathrm{d}x_1)\sigma(\mathrm{d}x_2), \qquad (10)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались равенством (8).

Рассмотрим внутренний интеграл в последнем выражении. Заметим, что пространство $A_{G,2}$ параметризуется прямыми в ортогональном дополнении G, проходящими через начало координат.

Обозначим через u_E единичный вектор в ортогональном дополнении $\mathrm{aff}(x_1,x_2)$, соответствующий плоскости E (т.е. E содержит u_E). Через $t_1(E)$ и $t_2(E)$ обозначим единичные векторы, коллинеарные касательным к $E\cap K$ в точках x_1 и x_2, лежащие в той же полуплоскости E, что и u_E. Обозначим через u_1 нормированную проекцию n_{x_1} на ортогональное дополнение $\mathrm{aff}(x_1,x_2)$, через t_1 – нормированную проекцию вектора x_2-x_1 на касательную гиперплоскость в точке x_1. Векторы u_2 и t_2 определяются аналогично.

Лемма 1.

$$\cot\psi_1 = (u_1,u_E)\cdot\cot\alpha_1 \text{ и } \cot\psi_2 = (u_2,u_E)\cdot\cot\alpha_2.$$

Доказательство. По определению

$$\cos\psi_1 = \frac{(x_2-x_1,t_1(E)))}{|x_2-x_1|} \text{ и } \sin\psi_1 = (u_E,t_1(E)),$$
$$\cos\alpha_1 = \frac{(x_2-x_1,t_1)}{|x_2-x_1|} \text{ и } \sin\alpha_1 = (u_1,t_1).$$

Таким образом, нам достоточно доказать, что

$$\frac{(x_2-x_1,t_1(E)))}{(u_E,t_1(E))} = (u_1,u_E)\cdot\frac{(x_2-x_1,t_1)}{(u_1,t_1)}.$$

Заметим, что из определения u_1 следует, что

$$n_{x_1} = u_1 + \frac{x_1-x_2}{|x_1-x_2|}.$$

Следовательно,

$$(x_2 - x_1, t_1) = |x_2 - x_1| \cdot (u_1 - n_{x_1}, t_1) = |x_2 - x_1| \cdot (u_1, t_1)$$

и

$$(x_2 - x_1, t_1(E)) = |x_2 - x_1| \cdot (u_1 - n_{x_1}, t_1(E)) = |x_2 - x_1| \cdot (u_1, t_1(E)).$$

Кроме того,

$$t_1(E) = (t_1(E), \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|}) \cdot \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|} + (t_1(E), u_E) \cdot u_E,$$

откуда

$$(u_1, t_1(E)) = (t_1(E), u_E) \cdot (u_1, u_E) \text{ and } (u_E, t_1(E)) = (t_1(E), u_E).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{(x_2 - x_1, t_1(E)))}{(u_E, t_1(E))} &= \frac{|x_2 - x_1| \cdot (u_1, t_1(E))}{(t_1(E), u_E)} \\ &= \frac{|x_2 - x_1|(t_1(E), u_E) \cdot (u_1, u_E)}{(t_1(E), u_E)} \\ &= |x_2 - x_1| \cdot (u_1, u_E) = (u_1, u_E) \cdot \frac{(x_2 - x_1, t_1)}{(u_1, t_1)}. \end{aligned}$$

Доказательство второго утверждения леммы аналогично. □

Из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_{A_{G,2}} \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{G,2}(\mathrm{d}E) \\ &\qquad = \int\limits_{A_{G,2}} \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 \cdot (u_1, u_E) \cdot (u_2, u_E) \mu_{G,2}(\mathrm{d}E) \\ &\qquad\qquad = \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 \cdot \int\limits_{\mathbb{S}^{d-2}} (u_1, u_E) \cdot (u_2, u_E) \tilde{\sigma}(\mathrm{d}u_E), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\tilde{\sigma}$ – равномерная вероятностная мера на $\mathbb{S}^{d-2}$.

Подставляя (11) в (9), получаем

$$\int\limits_{A_{d,1}} h(|G\cap K|)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G) = \frac{1}{\omega_d}\int\limits_{(\partial K)^2} \frac{h'(|x_1-x_2|)}{|x_1-x_2|^{d-2}}\cos\alpha_1\cos\alpha_2$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{S}^{d-2}}(u_1,u_E)\cdot(u_2,u_E)\tilde\sigma(\mathrm{d}u_E)\right)\sigma(\mathrm{d}x_1)\sigma(\mathrm{d}x_2).$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-2}}(u_1,u_E)\cdot(u_2,u_E)\tilde\sigma(\mathrm{d}u_E) = \frac{1}{d-1}(u_1,u_2),$$

так как $(u_1,u_2)=\cos(\phi_0)$.

Последнее утверждение следует из того, что если точка u_F равномерно распрелена на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ ($n=d-1$), то вектор, образованный первыми $n-2$ ее координатами, равномерно распределен на единичном шаре $\mathbb{B}^{n-2}$ (см. [4, следствие 4]).

Выберем систему координат так, чтобы первые $n-2$ координаты u_1 и u_2 стали нулевыми. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}(u_1,u_E)\cdot(u_2,u_E)\tilde\sigma(\mathrm{d}u_E)$$
$$=\int\limits_{\mathbb{B}^{n-2}}\int\limits_{\sqrt{1-|z|^2}\mathbb{S}^1}(x+z,u_1)\cdot(x+z,u_2)\tilde\sigma(\mathrm{d}x)\tilde\lambda(\mathrm{d}z)$$
$$=\int\limits_{\mathbb{B}^{n-2}}\int\limits_{\sqrt{1-|z|^2}\mathbb{S}^1}(x,u_1)\cdot(x,u_2)\tilde\sigma(\mathrm{d}x)\tilde\lambda(\mathrm{d}z)$$
$$=\int\limits_{\mathbb{B}^{n-2}}\int\limits_{\mathbb{S}^1}(1-|z|^2)(x,u_1)\cdot(x,u_2)\tilde\sigma(\mathrm{d}x)\tilde\lambda(\mathrm{d}z)$$
$$=\int\limits_{\mathbb{S}^1}(x,u_1)\cdot(x,u_2)\tilde\sigma(\mathrm{d}x)\cdot\int\limits_{\mathbb{B}^{n-2}}(1-|z|^2)\tilde\lambda(\mathrm{d}z)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(x)\cos(x-\phi_0)\mathrm{d}x\int\limits_{\mathbb{B}^{n-2}}(1-|z|^2)\tilde\lambda(\mathrm{d}z). \quad (12)$$

Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(x-\phi_0)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(\phi_0)+\cos(2x-\phi_0))\mathrm{d}x = \pi\cos(\phi_0) \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^{n-2}} (1-|z|^2)\tilde{\lambda}(\mathrm{d}z) &= \frac{1}{\kappa_{n-2}} \int_{\mathbb{B}^{n-2}} (1-|z|^2)\lambda(\mathrm{d}z) \\ &= \frac{1}{\kappa_{n-2}} \int_{\mathbb{S}^{n-3}} \int_0^1 (1-r^2) r^{n-3} \mathrm{d}r \sigma(\mathrm{d}\phi) \qquad (14) \\ &= (n-2)\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} = \frac{2}{d-1}. \end{aligned}$$

Подстановка (13) и (14) в (12) завершает доказательство.

§3. Доказательство теоремы 2

Пусть P – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$. Как и в доказательстве теоремы 1, имеем:

$$\int_{A_{d,1}} h(|G\cap P|)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G) = \int_{A_{d,2}} \int_{A_{E,1}} h(|G\cap P|)\mu_{E,1}(\mathrm{d}G)\mu_{d,2}(\mathrm{d}E). \quad (15)$$

Применяя тождество Амбарцумяна–Плейеля к плоскому многоугольнику $P\cap E$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{A_{E,1}} h(|G\cap P|)\mu_{E,1}(\mathrm{d}G) = \int_{A_{E,1}} & h'(|G\cap P|)|G\cap P| \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{E,1}(\mathrm{d}G) \\ & + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{a_i} h(t)\mathrm{d}t, \quad (16) \end{aligned}$$

где ψ_1 и ψ_2 – величины углов между касательными к $P\cap E$ в концах хорды $G\cap P$ и прямой G, лежащих по одну сторону от G, а a_i – длины сторон $E\cap P$.

Второе слагаемое в правой части (16) может быть переписано следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{0}^{a_i} h(t)\mathrm{d}t = \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \int_{0}^{|E\cap F|} h(t)\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Подставляя (16) и (17) в (15) и применяя (7), получаем

$$\begin{aligned}\int_{A_{d,1}} & h(|G\cap P|)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G)\\ &= \int_{A_{d,1}} h'(|G\cap P|)|G\cap P| \left(\int_{A_{G,2}} \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{G,2}(\mathrm{d}E)\right)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G)\\ &\qquad + \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \int_{A_{d,2}} \int_{0}^{|E\cap F|} h(t)\mathrm{d}t\mu_{d,2}(\mathrm{d}E). \end{aligned}\tag{18}$$

Для вычисления $\int\limits_{A_{G,2}} \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{G,2}(\mathrm{d}E)$ мы можем воспользоваться леммой 1, которая верна для $\mu_{d,2}$-почти всех прямых G, пересекающих P (а именно, для тех G, которые пересекают ∂P в относительных внутренностях двух разных гиперграней).

Таким образом, для $\mu_{d,2}$-почти всех прямых G имеем:

$$\begin{aligned}\int_{A_{G,2}} \cot\psi_1 \cot\psi_2 \mu_{G,2}(\mathrm{d}E) &= \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 \cdot \int_{\mathbb{S}^{d-2}} (u_1, u_E)\cdot(u_2, u_E)\tilde{\sigma}(\mathrm{d}u_E)\\ &= \frac{1}{d-1}(u_1, u_2)\cot\alpha_1\cot\alpha_2.\end{aligned}\tag{19}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части равенства (18). Заметим, что для фиксированной гиперграни F,

$$\int\limits_{A_{d,2}} \int\limits_{0}^{|E\cap F|} h(t)\mathrm{d}t\mu_{d,2}(\mathrm{d}E) = \int\limits_{A_{F,1}} \int\limits_{0}^{|G\cap F|} h(t)\mathrm{d}t\mu_{F,1}(\mathrm{d}G)$$
$$= \int\limits_{A_{F,1}} H(|G\cap F|)\mu_{F,1}(\mathrm{d}G). \qquad (20)$$

Подстановка (19) и (20) в (18) влечет

$$\int\limits_{A_{d,1}} h(|G\cap P|)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G)$$
$$= \frac{1}{d-1}\int\limits_{A_{d,1}} h'(|G\cap P|)|G\cap P|\cot\alpha_1\cot\alpha_2\cos(\phi_0)\mu_{d,1}(\mathrm{d}G)$$
$$+ \sum_{F\in\mathcal{F}(P)}\int\limits_{A_{F,1}} H(|G\cap F|)\mu_{F,1}(\mathrm{d}G),$$

что завершает доказательство.

§4. Доказательство теоремы 3

Доказательство теоремы 3 почти повторяет предложенное в [7], но так как оно обобщается на случай, когда некоторые точки лежат внути тела, мы приведем его расширенную версию здесь.

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{I}(h) = \int\limits_{(\partial K)^k}\int\limits_{(K)^{l-k+1}} h(x_0,\dots,x_l)\prod_{j=l-k+1}^{l}\|\mathrm{P}_{\mathrm{aff}(x_0,\dots,x_l)}(n_K(x_j))\|$$
$$\mathrm{d}x_0\dots\mathrm{d}x_{l-k}\sigma(\mathrm{d}x_{l-k+1})\dots\sigma(\mathrm{d}x_l).$$

Применяя формулу Штейнера, получаем

$$\mathcal{I}(h) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^k \int\limits_{(K^\varepsilon\setminus K)^k}\int\limits_{(K)^{l-k+1}} h(x_0,\dots,x_{l-k},\overline{x_{l-k+1}},\dots,\overline{x_l})$$
$$\times\prod_{j=l-k+1}^{l}\|\mathrm{P}_{\mathrm{aff}(x_0,\dots,x_l)}(n_K(\overline{x_j}))\|\mathrm{d}x_0\dots\mathrm{d}x_l,$$

где K^ε – ε-окрестность K и для точки $x\notin K$ обозначим через $\overline{x}$ ближайшую к x точку K.

Применив формулу Бляшке–Петканчина (см. (5)), получим

$$\mathcal{I}(h) =(l!)^{d-l}b_{d,l}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^k\int\limits_{A_{d,l}}\int\limits_{(E\cap(K^\varepsilon\setminus K))^k}\int\limits_{(E\cap K)^{l-k+1}} h(x_0,\dots,x_{l-k},\overline{x_{l-k+1}},\dots,\overline{x_l})$$
$$\times\prod_{j=l-k+1}^{l}\|\mathrm{P}_{\mathrm{aff}(x_0,\dots,x_l)}(n_K(\overline{x_j}))\|\,|[x_0,\dots,x_l]|^{d-l}\mathrm{d}x_0\dots\mathrm{d}x_l\mu_{d,l}(\mathrm{d}E).$$

Точка x в $E\cap(K^\varepsilon\setminus K)$ определяется точкой в $E\cap K$, ближайшей к x, и расстоянием $t(x)$ от x до $E\cap\partial K$. Тогда $0\leqslant t(x)\leqslant h_E(x)$, где $h_E(x)$ – длина пересечения $K^\varepsilon\setminus K$ с прямой в E, проходящей через x и ортогональной $E\cap\partial K$. Используя обобщение формулы Штейнера, примененное к $E\cap(K^\varepsilon\setminus K)$, и непрерывность подынтегральной функции, получаем:

$$\mathcal{I}(h) = (l!)^{d-l}b_{d,l}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{A_{d,l}}\int\limits_{(E\cap\partial K)^k}\int\limits_{(E\cap K)^{l-k+1}} h(x_0,\dots,x_l)|[x_0,\dots,x_l]|^{d-l}$$
$$\times\prod_{j=l-k+1}^{l}\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\mathrm{P}_{\mathrm{aff}(x_0,\dots,x_l)}(n_K(x_j))\|\int\limits_0^{h_E(x_j)}\mathrm{d}t\right)\lambda_E(\mathrm{d}x_0)\dots\lambda_E(\mathrm{d}x_{l-k})$$
$$\times\sigma_{E\cap\partial K}(\mathrm{d}x_{l-k+1})\dots\sigma_{E\cap\partial K}(\mathrm{d}x_l)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E).$$

Применяя

$$h_E(x)\leqslant\varepsilon\|\mathrm{P}_{\mathrm{aff}(x_0,\dots,x_l)}(n_K(x))\|^{-1}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}h_E(x) = \|\mathrm{P}_{\mathrm{aff}(x_0,\dots,x_l)}(n_K(x))\|^{-1},$$

получаем

$$\mathcal{I}(h) = (l!)^{d-l} b_{d,l} \int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{(E\cap\partial K)^k} \int\limits_{(E\cap K)^{l-k+1}} h(x_0,\ldots,x_l)|[x_0,\ldots,x_l]|^{d-l}$$
$$\times \lambda_E(\mathrm{d}x_0)\ldots\lambda_E(\mathrm{d}x_{l-k})\sigma_{E\cap\partial K}(\mathrm{d}x_{l-k+1})\ldots\sigma_{E\cap\partial K}(\mathrm{d}x_l)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E),$$

что завершает доказательство.

§5. Доказательство теоремы 4

В равенстве (6) соотношение $\|\mathrm{P}_{\mathrm{aff}(x_0,\ldots,x_l)}(n_P(x_k))\| = 0$ выполнено в том и только в том случае, когда все точки x_k лежат в одной гиперграни P. Таким образом, для измеримой функции h имеем

$$\int\limits_{(\partial P)^{l+1}} h(x_0,\ldots,x_l)\sigma(\mathrm{d}x_0)\ldots\sigma(\mathrm{d}x_l)$$
$$= \int\limits_{(\partial P)^{l+1}} h(x_0,\ldots,x_l)\mathbb{1}_{\{x_1,\ldots,x_l \text{ не все в одной гиперграни}\}}\sigma(\mathrm{d}x_0)\ldots\sigma(\mathrm{d}x_l)$$
$$+ \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \int\limits_{F^{l+1}} h(x_0,\ldots,x_l)\lambda_F(\mathrm{d}x_0)\ldots\lambda_F(\mathrm{d}x_l).$$

Применяя (6) к первому слагаемому и (5) ко второму слагаемому, получаем следующее:

$$\int\limits_{(\partial P)^{l+1}} h(x_0,\ldots,x_l)\sigma(\mathrm{d}x_0)\ldots\sigma(\mathrm{d}x_l)$$
$$= (l!)^{d-l} b_{d,l} \int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{(E\cap\partial P)^{l+1}} h(x_0,\ldots,x_l)\mathbb{1}_{\{x_1,\ldots,x_l \text{ не все в одной гиперграни}\}}$$
$$\times |[x_0,\ldots,x_l]|^{d-l} \prod_{j=0}^{l} \|\mathrm{P}_E(n_P(x_j))\|^{-1} \sigma_{E\cap\partial P}(\mathrm{d}x_0)\ldots\sigma_{E\cap\partial P}(\mathrm{d}x_l)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E)$$
$$+ (l!)^{d-l-1} b_{d-1,l} \cdot \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \int\limits_{A_{F,l}} \int\limits_{(E\cap F)^{l+1}} h(x_0,\ldots,x_l)$$
$$\times |[x_0,\ldots,x_l]|^{d-l-1} \lambda_{E\cap F}(\mathrm{d}x_0)\ldots\lambda_{E\cap F}(\mathrm{d}x_l)\mu_{F,l}(\mathrm{d}E)$$
$$= (l!)^{d-l} b_{d,l} \sum_{\substack{(F_0,\ldots,F_l)\in\mathcal{F}^{l+1}(P) \\ \exists F_i\neq F_j}} \int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{E\cap F_0} \cdots \int\limits_{E\cap F_l} h(x_0,\ldots,x_l)$$

$$\times |[x_0, \dots, x_l]|^{d-l} \prod_{j=0}^{l} \|\mathrm{P}_E(n_P(x_j))\|^{-1} \lambda_{E\cap F_0}(\mathrm{d}x_0) \dots \lambda_{E\cap F_l}(\mathrm{d}x_l)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E)$$

$$+ (l!)^{d-l-1} b_{d-1,l} \cdot \sum_{F\in\mathcal{F}(P)} \int\limits_{A_{F,l}} \int\limits_{(E\cap F)^{l+1}} h(x_0, \dots, x_l)$$

$$\times |[x_0, \dots, x_l]|^{d-l-1} \lambda_{E\cap F}(\mathrm{d}x_0) \dots \lambda_{E\cap F}(\mathrm{d}x_l)\mu_{F,l}(\mathrm{d}E),$$

что завершает доказательство теоремы 4.

Список литературы

1. R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry: with Applications to Mathematical Stereology,* John Wiley & Sons (1982).
2. R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability,* Cambridge University Press, No. 33 (1990).
3. R. V. Ambartzumian, J. Mecke, D. Stoyan, *Introduction to Stochastic Geometry* (1989).
4. F. Barthe, O. Guédon, S. Mendelson, A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the l_n^p-ball.* — Ann. Probab. **33** No. 2 (2005), 480–513.
5. J. F. C. Kingman, *Random secants of a convex body* — J. Appl. Probab., **6** No. 3 (1969), 660–672.
6. A. Pleijel, *Zwei kurze Beweise der isoperimetrischen Ungleichung.* — Archiv Math. **7** No. 4 (1956), 317–319.
7. M. Reitzner, *Random points on the boundary of smooth convex bodies* — Trans. Amer. Math. Soc. **354** No. 6 (2002), 2243–2278.
8. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry,* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin (2008).
9. M. Zähle, *A kinematic formula and moment measures of random sets.* — Math. Nachr. **149** No. 1 (1990), 325–340.

Moseeva T. D. Integral identities for the boundary of a convex body.

We present the multidimensional versions of the Pleijel and Ambartzumian–Pleijel identities. We also obtain the generalization of both the Blaschke–Petkantschin and Zähle formulae considering the case when some points are chosen inside the convex body and some on the boundary. Moreover, a version of the Zähle formula for the polytopes is derived.

Международный
математический институт
им. Леонарда Эйлера, Россия
E-mail: polezina@yandex.ru

Поступило 31 августа 2022 г.