Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§1. Введение.

Пусть $\xi_x(t),\ \ t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}$, – решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_x(t) = b(\xi_x(t))b'(\xi_x(t))\,dt + b(\xi_x(t))\,dw(t), \qquad \xi_x(0) = x, \tag{1}$$

где $w(t)$, $t \geqslant 0$. – стандартный винеровский процесс.

Относительно функции b будем предполагать выполнение следующих условий.

1. Функция b непрерывна и ограничена вместе со своими двумя первыми производными.

2. $\theta_0 = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x) > 0$.

3. Существует $b_0 > 0$, такое что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = b_0$.

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} b''(x) = 0$.

5. $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 \cdot |b(x) - b_0|\,dx < \infty$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 \cdot |b'(x)|\,dx < \infty$.

Заметим, что изменяя масштаб времени, мы всегда можем добиться того, чтобы b_0 равнялось единице, что и будем предполагать в дальнейшем.

В наших построениях процесс $w(t)$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором мы фиксируем фильтрацию $\{\mathcal{F}_{\leqslant t}\}$, где $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ – σ-алгебра, порожденная процессом w до момента времени t. Условия, наложенные на функцию $b(x)$, заведомо гарантируют нам существование сильного решения уравнения (1).

Пусть $V(x)$ – непрерывная ограниченная функция, удовлетворяющая условиям

$$V(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0 \ \text{ и } \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^2\,|V(x)|\,dx < \infty.$$

Ключевые слова: случайные процессы, резольвента, локальное время, случайные операторы.

Работа второго автора выполнена при поддержке РНФ (грант No. 22-21-00016).

Обозначим
$$v_0 = -\inf_{y\in\mathbb{R}} V(y) \geqslant 0.$$

Семейство процессов $\xi_x(t)$, $x \in \mathbb{R}$, является однородным марковским семейством и порождает полугруппу ограниченных операторов
$$P^t : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),$$
где $C(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$ с равномерной нормой, а оператор P^t определяется формулой
$$P^t f(x) = \mathbb{E} f(\xi_x(t))\, e^{-\int\limits_0^t V(\xi_x(s))\,ds}. \tag{2}$$

Далее, пусть $f \in C(\mathbb{R})$. Определим функцию $u(t,x)$, полагая
$$u(t,x) = \mathbb{E} f(\xi_x(t))\, e^{-\int\limits_0^t V(\xi_x(s))\,ds}. \tag{3}$$

Известно, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова, которое в данном случае имеет вид
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(b^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - V(x)u, \tag{4}$$
и начальному условию
$$u(0,x) = \lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = f(x).$$

Мы будем брать в качестве начальной функции в (3) произвольную функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$, при этом у функции $u(t,x)$ может потеряться непрерывность по t в нуле, и в этом случае удобнее говорить не о классическом, а о слабом (обобщенном) решении (см., например, [1], гл. III) уравнения (4).

Соответствующее утверждение может быть сформулировано не в терминах уравнений, а в терминах функций от операторов. Именно, рассмотрим самосопряженный оператор $\mathcal{A}_0$, определенный на множестве $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = W_2^2(\mathbb{R})$ и действующий на функцию $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ как
$$\mathcal{A}_0 f(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\Big(b^2(x)\frac{df}{dx}\Big). \tag{5}$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим самосопряженный оператор, заданный на $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = W_2^2(\mathbb{R})$ и действующий на f как
$$\mathcal{A} f(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\Big(b^2(x)\frac{df}{dx}\Big) + V(x)f(x). \tag{6}$$

Уравнение (4) означает, что справедливо операторное равенство

$$P^t = e^{-t\mathcal{A}}, \tag{7}$$

что, в свою очередь, означает, что (2) можно рассматривать как вероятностное представление экспоненты оператора $\mathcal{A}$. В настоящей работе будут введены случайные процессы, дающие возможность строить аналогичное вероятностное представление, но не для экспоненты, а для резольвенты оператора $\mathcal{A}$. Указанные случайные процессы будут определены как ядра некоторых случайных операторов.

Поясним основные идеи предлагаемого подхода для случая когда $V \equiv 0$. Прежде всего заметим, что резольвента $(\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}$ есть преобразование Лапласа по t операторнозначной функции $e^{-t\mathcal{A}_0}$. В частности, отсюда следует, что для любого λ, такого что $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и любой $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено

$$(\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1} f = \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau} P^\tau f \, d\tau = \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau} e^{-\tau\mathcal{A}_0} f \, d\tau. \tag{8}$$

Учитывая (2), мы можем рассматривать правую часть последнего равенства как среднее значение случайного оператора $\mathcal{R}^0_\lambda$, где

$$\mathcal{R}^0_\lambda : f \mapsto \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau} f(\xi_x(\tau)) \, d\tau.$$

В нашей предыдущей работе [5] было показано, что с вероятностью единица оператор $\mathcal{R}^0_\lambda$ является интегральным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ и были исследованы свойства его ядра. Кроме того, в этой же работе аналогичное семейство случайных интегральных операторов было построено также и для случая $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Настоящая работа содержит обобщение результатов [5] на случай, когда в (6) потенциал V отличен от тождественного нуля, но достаточно быстро убывает на бесконечности. Существенное отличие от этого случая от рассматриваемого в [5] состоит в том, что у оператора $\mathcal{A}$, в отличие от оператора $\mathcal{A}_0$, может появиться отрицательный дискретный спектр, поэтому в формуле (8), вообще говоря, нельзя заменить $\mathcal{A}_0$ на $\mathcal{A}$.

Так же как и в [5], для решения поставленной задачи мы будем использовать методы теории рассеяния, именно – использовать обобщенное преобразование Фурье, отвечающее абсолютно непрерывному спектру оператора $\mathcal{A}$.

§2. Собственные функции непрерывного спектра оператора $\mathcal{A}$.

Пусть функция $b(x)$ удовлетворяет условиям 1–5 с константой $b_0 = 1$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_0$, заданный на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$ формулой (5). Известно (см., например, [6], гл. VII, §24, теорема 5), что оператор $\mathcal{A}_0$ является самосопряженным положительным оператором, а его спектр $\sigma(\mathcal{A})$ является непрерывным двукратным и совпадает с $[0, \infty)$.

Далее, оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + V(x)$ является относительно компактным возмущением оператора $\mathcal{A}_0$. Отсюда следует (см. теорема 4, гл. 9 [2]), что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_0$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}$. Из условий на функцию $V(x)$ также вытекает (см. [9], § XIII.3), что вне $[0, \infty)$ у оператора $\mathcal{A}$ может появиться только конечное число однократных собственных значений. Обозначим эти собственные значения через

$$-k_1^2/2 < -k_2^2/2 < \cdots < -k_N^2/2, \tag{9}$$

а отвечающие им собственные функции – через

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N.$$

Функции φ_j принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и являются при каждом $j = 1, \ldots, N$ решениями уравнения

$$\mathcal{A}\varphi_j(x) = -\frac{k_j^2}{2}\,\varphi_j(x).$$

Обозначим через H_{ac} абсолютно непрерывное подпространство оператора $\mathcal{A}$ (другими словами – ортогональное дополнение в $L_2(\mathbb{R})$ к линейной оболочке векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$).

Пусть $\varphi(x, k)$ – собственные функции непрерывного спектра оператора $\mathcal{A}$. Эти функции являются при каждом $k \in \mathbb{R}$ решениями уравнения

$$\mathcal{A}\varphi(x, k) = \frac{k^2}{2}\,\varphi(x, k) \tag{10}$$

и в смысле обобщенных функций (см. [7]) удовлетворяют соотношениям

$$\int \varphi(x,k)\overline{\varphi(x,k')}\,dx = \delta(k-k') \tag{11}$$

и

$$\int \varphi(x,k)\overline{\varphi(x',k)}\,dk = t(x,x'), \tag{12}$$

где δ – дельта-функция Дирака, а $t(x,x')$ – ядро ортогонального проектора P_{ac} на H_{ac}.

Строго говоря, выбор семейства $\varphi(x,k)$ осуществляется не единственным способом, мы осуществим указанный выбор таким образом, чтобы семейство $\varphi(x,k)$ допускало аналитическое продолжение по k в верхнюю полуплоскость и чтобы при $\operatorname{Im} k > 0$ функция $\varphi(x,k) \to 0$ экспоненциально быстро при $x \to +\infty$ (относительно возможности такого выбора см. [8], §XI.6 и далее).

Функции $\varphi(x,k)$ задают ядро изометрического оператора $\Psi : \mathrm{H}_{ac} \to L_2(\mathbb{R})$, сплетающего оператор $\mathcal{A}$ и оператор умножения на $\frac{k^2}{2}$. Именно, введем изометрический оператор

$$\Psi : f(x) \mapsto (L_2)\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M} f(x)\overline{\varphi(x,k)}\,dx = (\Psi f)(k), \tag{13}$$

$$\Psi^* : g(k) \mapsto (L_2)\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M} g(k)\varphi(x,k)\,dk = (\Psi^* g)(x). \tag{14}$$

Для операторов Ψ^*, Ψ справедливы соотношения

$$\Psi^*\Psi = \mathrm{P}_{ac}, \quad \Psi\Psi^* = I \quad \text{(тождественное отображение)}. \tag{15}$$

Оператор Ψ сплетает оператор $\mathcal{A}$ и оператор умножения на $\frac{k^2}{2}$, что означает, что равенство $\mathcal{A}f = h$ эквивалентно равенству

$$\frac{k^2}{2}(\Psi f)(k) = (\Psi h)(k).$$

Сплетающий оператор позволяет эффективно строить функции от оператора, в том смысле, что для всякой борелевской функции F равенство $F(\mathcal{A})f = h$ эквивалентно равенству $F(\frac{k^2}{2})(\Psi f)(k) = (\Psi h)(k)$ и, соответственно,

$$\mathcal{D}(F(\mathcal{A})) = \Big\{ f \in L_2(\mathbb{R}) \,:\, F\Big(\frac{k^2}{2}\Big)(\Psi f)(k) \in L_2(\mathbb{R}) \Big\}. \tag{16}$$

В рамках настоящей работы для каждой $f \in \mathrm{H}_{ac}$ функцию $(\Psi f)(k)$ будем называть k-представлением функции f, а саму функцию $f(x)$ будем называть ее x-представлением. Таким образом, каждый элемент H_{ac} мы можем рассматривать как в x-представлении так и в k-представлении.

В случае, когда $b(x) \equiv 1$, а $V \equiv 0$ (то есть $\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$) унитарный оператор Ψ есть просто преобразование Фурье, в этом случае

$$\varphi(x,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}.$$

Нам понадобится ряд свойств функций $\varphi(x,k)$.

Отметим прежде всего, что для любых $t \geqslant 0$, $k, x \in \mathbb{R}$ в силу (7) и (10) мы имеем

$$\mathbb{E}\varphi(\xi_x(t),k) e^{-\int_0^t V(\xi_x(s))\,ds} = e^{-\frac{k^2 t}{2}} \varphi(x,k). \tag{17}$$

Прочие необходимые для наших целей свойства функций $\varphi(x,k)$ мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 1. *Существует константа $L > 0$, такая что для любых $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{R}$ справедливо*

$$|\varphi(x,k)| \leqslant L.$$

Доказательство практически полностью повторяет доказательство соответствующего утверждения в [5].

Лемма 2. *Функции $\varphi(x,k)$ не обращаются в нуль в области $\operatorname{Im} k > 0$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im} k > 0$, соответственно $k^2 \notin [0,\infty)$. Как уже было отмечено, функция $\varphi(x,k)$ экспоненциально убывает при $x \to \infty$.

Допустим противное, пусть для некоторого числа a выполнено $\varphi(a,k) = 0$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_+$ в пространстве $L_2[a,\infty) \cap \mathrm{H}_{ac}$, определенный на множестве

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_+) = \bigl\{ f \in W_2^2([a,\infty)) \cap \mathrm{H}_{ac},\ f(a) = 0 \bigr\}$$

и действующий на функцию $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ по тому же правилу, что и $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_+ f(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Bigl(b^2(x)\frac{df}{dx}\Bigr) + V(x)f(x).$$

Если $\varphi(a,k)=0$, то $\varphi(\cdot,k)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_+)$ и

$$\mathcal{A}_+\varphi(x,k)=\frac{k^2}{2}\,\varphi(x,k),$$

что означает, что $\varphi(\cdot,k)$ является собственной функцией оператора $\mathcal{A}_+$, отвечающей собственному значению $k^2/2$. Но $\mathcal{A}_+$ — самосопряженный неотрицательный оператор и, тем самым, не может иметь спектра вне $[0,\infty)$. $\square$

Следующая лемма показывает, что классическое утверждение о связи гладкости исходной функции и наличия моментов у ее преобразования Фурье остается справедливым и для изометрического оператора Ψ.

Лемма 3. *Пусть функция g для некоторого $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\mathbb{R}}(1+|k|^{2\alpha})|g(k)|^2\,dk<\infty.$$

Тогда $\Psi^*g\in W_2^\alpha(\mathbb{R})$.

Доказательство. Выберем и зафиксируем число μ, полагая $\mu=0$ в случае, когда у оператора $\mathcal{A}$ нет отрицательных собственных значений, а в противном случае, выберем $\mu>k_1^2/2$, где число $k_1^2/2$ определено (9). Рассмотрим оператор $\mathcal{B}$, действующий по правилу $\mathcal{B}u=-u''+\mu u$ на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{B})=W_2^2(\mathbb{R})$. Отметим, что формы, соответствующие (см. [2]) операторам $\mathcal{A}+\mu I$ и $\mathcal{B}$, заданы на одной и той же области определения ($W_2^1(\mathbb{R})$) и эквивалентны (тем самым, существуют положительные константы c_1, c_2 : $c_1\mathcal{B}<\mathcal{A}+\mu I<c_2\mathcal{B}$). Из этого и теоремы 2, гл. 10, §4 книги [2] немедленно следует, что для любого $\theta\in(0,1)$ выполнено

$$c_1^\theta\mathcal{B}^\theta<(\mathcal{A}+\mu I)^\theta<c_2^\theta\mathcal{B}^\theta,$$

откуда, в частности, следует, что область определения формы, соответствующей $(\mathcal{A}+\mu I)^\theta$, совпадает с W_2^θ — областью определения, соответствующей $\mathcal{B}^\theta$. $\square$

§3. Ядра случайных операторов

В этом параграфе для каждого $\lambda=a+bi\in\mathbb{C}$ мы определим случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$, дающий возможность строить вероятностное представление резольвенты, но не самого оператора $\mathcal{A}$, а его сужения $\mathcal{A}_{ac}$

на абсолютно непрерывное подпространство H_{ac}. Как было показано выше, размерность ортогонального дополнения H_{ac} в $L_2(\mathbb{R})$ всегда конечна.

Пусть сначала $a = \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$. В этом случае положим

$$\mathcal{R}^t_\lambda f(x) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} (\mathrm{P}_{\mathrm{ac}} f)(\xi_x(\tau)) e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\, d\tau. \tag{18}$$

Правая часть (18) корректно определена для всех непрерывных ограниченных f, далее мы покажем, что с вероятностью единица оператор $\mathcal{R}^t_\lambda$ продолжается до ограниченного оператора в $L_2(\mathbb{R})$ и найдем его ядро.

Первым шагом мы получим формальное (в виде обобщенной функции) выражение для ядра $\mathcal{R}^t_\lambda$, а потом покажем, что с вероятностью единица $\mathcal{R}^t_\lambda$ является интегральным оператором, а полученное формальное выражение действительно является его ядром.

Пользуясь тождеством

$$\mathrm{P}_{ac} f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) t(x,y)\, dy, \tag{19}$$

получаем

$$\int\limits_0^t e^{\lambda\tau} (\mathrm{P}_{\mathrm{ac}} f)(\xi_x(\tau)) e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\, d\tau$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} t(\xi_x(\tau), y) e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\, d\tau\, dy.$$

Последняя формула показывает, что ядро $r_\lambda(t,x,y)$ оператора $\mathcal{R}^t_\lambda$, если оно существует, должно иметь вид

$$r_\lambda(t,x,y) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, t(\xi_x(\tau), y) e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\, d\tau. \tag{20}$$

Трудность состоит в том, что формулой (20) ядро $r_\lambda(t,x,y)$ определено только как обобщенная функция. Чтобы преодолеть эту трудность, ниже мы рассмотрим функцию $r_\lambda(t,x,\,\cdot\,)$ (при фиксированном x) в k-представлении и покажем, что ее k-представление $(\Psi r_\lambda)(t,x,k)$

с вероятностью единица принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, что показывает, что $r_\lambda(t,x,\cdot\,)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ (напомним, что Ψ – изометрический оператор из H_{ac} в $L_2(\mathbb{R})$) и, в частности, определена как функция, а не как обобщенная функция.

Итак, вычислим Ψ-преобразование функции $r_\lambda(t,x,y)$ по переменной y. В силу (12), имеем

$$t(\xi_x(\tau),y)=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(\xi_x(\tau),k)\overline{\varphi(y,k)}\,dk. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), получаем

$$r_\lambda(t,x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\varphi(y,k)}\int\limits_0^t\varphi(\xi_x(\tau),k)e^{\lambda\tau}e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau\,dk$$

или

$$\overline{r_\lambda(t,x,y)}=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(y,k)\int\limits_0^t\overline{\varphi(\xi_x(\tau),k)}e^{\overline{\lambda}\tau}e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau\,dk$$

$$=\Psi^*\Big[\int\limits_0^t\overline{\varphi(\xi_x(\tau),\,\cdot\,)}e^{\overline{\lambda}\tau}e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau\Big](y) \tag{22}$$

Из (22) и (15) немедленно вытекает, что

$$\overline{(\Psi\overline{r_\lambda})(t,x,k)}=\int\limits_0^t\varphi(\xi_x(\tau),k)e^{\lambda\tau}e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau. \tag{23}$$

Итак, при $a=\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$ мы определяем $\overline{(\Psi\overline{r_\lambda})(t,x,k)}$ формулой (23). Пока это только формальное определение, но далее (теорема 1) мы придадим этой формуле точный смысл.

Отметим также, что функция

$$h_\lambda(t,x,k)=\overline{(\Psi\overline{r_\lambda})(t,x,k)} \tag{24}$$

дает нам (также пока формальное) выражение для ядра оператора $\mathcal{R}_\lambda^t\Psi^*$.

Действительно, пусть $f\in\mathrm{H}_{ac}$, а $g=\Psi f$. Тогда

$$[(\mathcal{R}_\lambda^t\Psi^*)g](x)=\mathcal{R}_\lambda^t f(x)=\int dy\int dk\,g(k)\varphi(y,k)\,r_\lambda(t,x,y)$$

$$= \int g(k) \int \varphi(y,k)\, r_\lambda(t,x,y)\, dy\, dk = \int g(k) \overline{\int \overline{\varphi(y,k)}\, \overline{r_\lambda(t,x,y)}\, dy}\, dk$$

$$= \int g(k) \overline{(\Psi \overline{r_\lambda})(t,x,k)}\, dk = \int g(k) h_\lambda(t,x,k)\, dk.$$

Пусть теперь $a = \operatorname{Re}\lambda > 0$. Важно отметить, что в этом случае выражение (8) теряет смысл, что означает, что в данном случае в преобразовании Лапласа надо выбирать другой контур интегрирования. Но буквально сделать это невозможно, для этого в (18) пришлось бы строить аналитическое продолжение $\xi_x(\tau)$ по переменной τ, что затруднительно. Поэтому при определении $\overline{\Psi \overline{r_\lambda}}$ мы будем пользоваться другими соображения.

При $|k| > \sqrt{2a}$ снова определим $\overline{\Psi \overline{r_\lambda}}$ формулой (23).

При $|k| < \sqrt{2a}$ по определению положим

$$h_\lambda(t,x,k) = \overline{(\Psi \overline{r_\lambda})(t,x,k)}$$
$$= -\frac{\varphi(x,k)}{\varphi(0,i|k|)} \int_0^t \varphi(\xi_0(\tau), i|k|) e^{-\lambda\tau} e^{-\int_0^\tau V(\xi_0(s))\, ds}\, d\tau. \tag{25}$$

Из леммы 2 следует, что при всех рассматриваемых k знаменатель в (25) не обращается в нуль.

Далее, при $|k| = \sqrt{2a}$ и $b = \operatorname{Im}\lambda > 0$ положим

$$h_\lambda(t,x,k) = \overline{(\Psi \overline{r_\lambda})(t,x,k)} \tag{26}$$

$$= i\frac{\varphi(x,k)}{\varphi(0,e^{\frac{i\pi}{4}}|k|)} \int_0^t \varphi(\xi_0(\tau), e^{\frac{i\pi}{4}}|k|) e^{i\lambda\tau} e^{-\int_0^\tau V(\xi_0(s))\, ds}\, d\tau. \tag{27}$$

При $|k| = \sqrt{2a}$ и $b = \operatorname{Im}\lambda < 0$ положим

$$h_\lambda(t,x,k) = \overline{(\Psi \overline{r_\lambda})(t,x,k)} \tag{28}$$

$$= -i\frac{\varphi(x,k)}{\varphi(0,e^{-\frac{i\pi}{4}}|k|)} \int_0^t \varphi(\xi_0(\tau), e^{-\frac{i\pi}{4}}|k|) e^{-i\lambda\tau} e^{-\int_0^\tau V(\xi_0(s))\, ds}\, d\tau. \tag{29}$$

Придадим теперь введенным выше формальным вычислениям строгий смысл. Для этого введем сначала пространство $\mathcal{H}_\alpha$, состоящее из

$L_2(\mathbb{R})$-значных случайных величин $f(x) = f(x, \omega)$ вида $f = \Psi^* g$ с нормой

$$\|f\|_\alpha^2 = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} (1 + |k|^{2\alpha}) |g(k)|^2 \, dk. \tag{30}$$

Замечание. Из леммы 3 и (15) вытекает, что если $f \in \mathcal{H}_\alpha$, то с вероятностью единица $f \in W_2^\alpha(\mathbb{R}) \cap \mathrm{H}_{ac}$. .

Следующие две теоремы показывают, что для всех λ, t с вероятностью единица оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ является ограниченным интегральным оператором в $L_2(\mathbb{R})$, а формулы (23), (25) определяют его ядро. Как и выше, положим $v_0 = -\inf_{y \in \mathbb{R}} V(y) \geqslant 0$.

Теорема 1. 1. *Для любого* $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}$ *существует предел*

$$\overline{r_\lambda(t, x, \cdot\,)} = (\mathcal{H}_\alpha) \lim_{M \to \infty} \overline{r_\lambda^M(t, x, \cdot\,)},$$

где

$$\overline{r_\lambda^M(t, x, \cdot\,)} = \Psi^* \overline{h_\lambda^M(t, x, \cdot\,)},$$

а функция $h_\lambda^M(t, x, k)$ *определяется как*

$$h_\lambda^M(t, x, k) = h_\lambda(t, x, k) \cdot \mathbf{1}_{[-M, M]}(k).$$

2. *Если* $a + v_0 = \operatorname{Re} \lambda + v_0 < 0$ *то для любого* $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}$ *существует предел*

$$\overline{r_\lambda(\infty, x, \cdot\,)} = (\mathcal{H}_\alpha) \lim_{t \to \infty} \overline{r_\lambda(t, x, \cdot\,)}.$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что из лемм 1, 2 следует, что для любых фиксированных M, t, x случайная функция $\overline{r_\lambda^M(t, x, \cdot\,)}$ принадлежит $\mathcal{H}_\alpha$.

Пусть теперь $M_n \uparrow \infty$ – произвольная возрастающая последовательность. Покажем, что последовательность $\overline{r_\lambda^{M_n}(t, x, y)}$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ фундаментальна в $\mathcal{H}_\alpha$.

При $m > n$ имеем

$$\|\overline{r_\lambda^{M_m}(t, x, y)} - \overline{r_\lambda^{M_n}(t, x, y)}\|_\alpha^2 = \mathbb{E} \int_{|k| \in [M_n, M_m]} (1 + |k|^{2\alpha}) |\overline{h_\lambda(t, x, k)}|^2 \, dk. \tag{31}$$

Так как $M_n \to \infty$, то не умаляя общности можно считать, что в (31) выполнено неравенство $|k| \geqslant M_n > \sqrt{2|a|}$, то есть в силу (23), (24)

$$h_\lambda(t,x,k) = \int\limits_0^t \varphi(\xi_x(\tau),k) e^{\lambda\tau} e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau.$$

Подставляя последнюю формулу в правую часть (31), получаем

$$\begin{aligned}
&\|\overline{r_\lambda^{M_m}(t,x,y)} - \overline{r_\lambda^{M_n}(t,x,y)}\|_\alpha^2 \\
&\quad = \mathbb{E} \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} (1+|k|^{2\alpha}) \Big| \int\limits_0^t \varphi(\xi_x(\tau),k) e^{\lambda\tau} e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau \Big|^2\,dk \\
&\qquad\qquad = 2\operatorname{Re}\mathbb{E} \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} (1+|k|^{2\alpha}) \int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \\
&e^{\lambda\tau_1} e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(\xi_x(s))\,ds} e^{\overline{\lambda}\tau_2} e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(\xi_x(s))\,ds} \cdot \varphi(\xi_x(\tau_1),k)\overline{\varphi(\xi_x(\tau_2),k)}\,dk. \qquad (32)
\end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались легко проверяемой формулой. Именно, для каждой функции $f \in L_1[0,t]$ справедливо соотношение

$$\Big| \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \Big|^2 = 2 \int\limits_{0<\tau_2<\tau_1<t} \operatorname{Re}[\overline{f(\tau_2)} f(\tau_1)]\,d\tau_1 d\tau_2.$$

Оценим отдельно при $\tau_1 > \tau_2$ величину

$$\mathbb{E}\Big[\varphi(\xi_x(\tau_1),k) e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(\xi_x(s))\,ds} \overline{\varphi(\xi_x(\tau_2),k) e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(\xi_x(s))\,ds}}\Big].$$

Используя свойства условных математических ожиданий, (17) и лемму 1, имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\varphi(\xi_x(\tau_1),k) e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(\xi_x(s))\,ds} \overline{\varphi(\xi_x(\tau_2),k) e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(\xi_x(s))\,ds}}\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}\Big[\overline{\varphi(\xi_x(\tau_2),k)} e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(\xi_x(s))\,ds} \cdot \mathbb{E}\Big(\varphi(\xi_x(\tau_1),k) e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(\xi_x(s))\,ds} \Big| \mathcal{F}_{\leqslant\tau_2}\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\overline{\varphi(\xi_x(\tau_2),k)} e^{-2\int\limits_0^{\tau_2} V(\xi_x(s))\,ds} \cdot \mathbb{E}\Big(\varphi(\xi_y(\tau_1-\tau_2),k) e^{-\int\limits_0^{\tau_1-\tau_2} V(\xi_y(s))\,ds}\Big)\Big|_{y=\xi_x(\tau_2)}\Big]
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\,\overline{\varphi(\xi_x(\tau_2),k) e^{-2\int\limits_0^{\tau_2} V(\xi_x(s))\,ds}}\,\varphi(\xi_x(\tau_2),k) e^{-\frac{k^2(\tau_1-\tau_2)}{2}}$$

$$= e^{-\frac{k^2(\tau_1-\tau_2)}{2}}\mathbb{E}\left|\varphi(\xi_x(\tau_2),k)e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(\xi_x(s))\,ds}\right|^2 \leqslant L^2\, e^{-\frac{k^2(\tau_1-\tau_2)}{2}}\, e^{2\tau_2 v_0},$$

где $v_0 = -\inf_{y\in\mathbb{R}} V(y) \geqslant 0$.

Подставляя полученную оценку в правую часть (32), получаем

$$\|\overline{r_\lambda^{M_m}(t,x,y)} - \overline{r_\lambda^{M_n}(t,x,y)}\|_\alpha^2$$

$$\leqslant 2L^2 \mathrm{Re} \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} (1+|k|^{2\alpha}) \int\limits_0^t e^{\lambda\tau_1}\,d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} e^{\overline{\lambda}\tau_2}\, e^{-\frac{k^2(\tau_1-\tau_2)}{2}}\,d\tau_2\,dk$$

$$= 2L^2 \mathrm{Re} \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} (1+|k|^{2\alpha}) \int\limits_0^t e^{\lambda\tau_1} e^{-\frac{k^2\tau_1}{2}}\,d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} e^{\overline{\lambda}\tau_2} e^{\frac{k^2\tau_2}{2}}\, e^{2\tau_2 v_0}\,d\tau_2\,dk$$

$$= 2L^2 \mathrm{Re} \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} \frac{1+|k|^{2\alpha}}{\overline{\lambda}+v_0+\frac{k^2}{2}} \int\limits_0^t \left(e^{2(a+v_0)\cdot\tau_1} - e^{(\lambda-\frac{k^2}{2})\tau_1}\right) d\tau_1\,dk. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь отдельно случаи $a+v_0 \neq 0$ и $a+v_0 = 0$. Пусть сначала $a+v_0 \neq 0$. Тогда правая часть (33) равна

$$2\mathrm{Re} \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} \frac{1+|k|^{2\alpha}}{\overline{\lambda}+v_0+\frac{k^2}{2}} \left(\frac{1}{2(a+v_0)}\big(e^{2(a+v_0)\cdot t}-1\big) - \frac{1}{\lambda-\frac{k^2}{2}}\big(e^{(\lambda-\frac{k^2}{2})t}-1\big)\right) dk.$$

Последнее выражение с некоторой константой $C = C(\lambda) > 0$ может быть оценено сверху величиной

$$C\big(e^{2(a+v_0)\cdot t}+1\big) \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} \frac{1+|k|^{2\alpha}}{k^2}\,dk \underset{m,n\to\infty}{\to} 0, \tag{34}$$

причем при $a+v_0 < 0$ сходимость в (34) равномерна по $t \geqslant 0$. Из этого, в частности, следует утверждение п. 2 теоремы.

Рассмотрим теперь случай $a+v_0 = 0$. В этом случае правая часть (33) равна

$$2\mathrm{Re} \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} \frac{1+|k|^{2\alpha}}{\overline{\lambda}+\frac{k^2}{2}} \int\limits_0^t \big(1-e^{(\lambda-\frac{k^2}{2})\tau_1}\big)\,d\tau_1\,dk.$$

$$= 2\mathrm{Re} \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} \frac{1+|k|^{2\alpha}}{\overline{\lambda}+\frac{k^2}{2}}\Big(t - \frac{1}{\lambda-\frac{k^2}{2}}\big(e^{(\lambda-\frac{k^2}{2})t}-1\big)\Big)\,dk$$

$$\leqslant C\,(t+1) \int\limits_{|k|\in[M_n,M_m]} \frac{1+|k|^{2\alpha}}{k^2}\,dk$$

для некоторой константы $C = C(\lambda)$. Для завершения доказательства остается заметить, что последнее выражение стремится к нулю при $m, n \to \infty$. □

Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что для любых фиксированных t, x с вероятностью 1

$$r_\lambda(t,x,\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}). \tag{35}$$

Таким образом, для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ на $L_2(\mathbb{R})$ определен случайный интегральный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ формулой

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y) f(y)\,dy, \tag{36}$$

при этом $t \in [0,\infty]$ при $a+v_0<0$ и $t\in[0,\infty)$ при $a+v_0 \geqslant 0$.

Теорема 2. *Для любого фиксированного* $0 \leqslant t < \infty$ *с вероятностью единица оператор* $\mathcal{R}_\lambda^t$ *является ограниченным оператором в* $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{H}_{ac}$, и $g = \Psi f$. Имеем

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = (\mathcal{R}_\lambda^t\,\Psi^* g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y)(\Psi^* g)(y)\,dy$$

$$= \langle \Psi^* g, \overline{r_\lambda(t,x,\cdot)}\rangle_{L_2} = \langle g, \Psi\overline{r_\lambda(t,x,\cdot)}\rangle_{L_2} = \int\limits_{\mathbb{R}} g(k)\overline{\Psi\overline{r_\lambda(t,x,k)}}\,dk. \tag{37}$$

Последняя формула показывает, что оператор $\mathcal{R}_\lambda^t\,\Psi^*$ есть интегральный оператор с ядром

$$h(t,x,k) = \overline{\Psi\overline{r_\lambda(t,x,k)}}. \tag{38}$$

Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ разложим H_{ac} в ортогональную сумму двух подпространств

$$L_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1. \tag{39}$$

При $a = \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$ положим

$$\mathcal{L}_0 = \{0\}, \quad \mathcal{L}_1 = L_2(\mathbb{R}),$$

а при $a > 0$ положим

$$\mathcal{L}_0 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \ \operatorname{supp} \Psi f \subset [-\sqrt{2a}, \sqrt{2a}]\},$$
$$\mathcal{L}_1 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \ \operatorname{supp} \Psi f \cap (-\sqrt{2a}, \sqrt{2a}) = \varnothing\}.$$

Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что ограниченными с вероятностью 1 являются сужения оператора $\mathcal{R}_\lambda^t$ на $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$. При этом подпространство $\mathcal{L}_0$ нетривиально только в случае $a > 0$.

В силу (25), (38), оператор $\mathcal{R}_\lambda^t \Psi^*$ на произвольную функцию g с носителем в интервале $[-\sqrt{2a}, \sqrt{2a}]$ действует как

$$\mathcal{R}_\lambda^t \Psi^{-1} g(x) = \int\limits_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} g(k) \overline{\Psi \overline{r_\lambda(t,x,k)}}\, dk$$
$$= -\int\limits_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} g(k) \frac{\varphi(x,k)}{\varphi(0, i|k|)} \int\limits_0^t \varphi(\xi_0(\tau), i|k|) e^{-\lambda\tau} e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_0(s))\, ds} d\tau\, dk.$$

Последняя формула показывает, что сужение оператора $\Psi \mathcal{R}_\lambda^t \Psi^*$ на множество функций с носителем в интервале $[-\sqrt{2a}, \sqrt{2a}]$ есть оператор умножения на случайную ограниченную функцию

$$\frac{-1}{\varphi(0, i|k|)} \int\limits_0^t \varphi(\xi_0(\tau), i|k|) e^{-\lambda\tau} e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_0(s))\, ds} d\tau. \tag{40}$$

В силу изометричности Ψ отсюда вытекает ограниченность сужения оператора $\mathcal{R}_\lambda^t$ на $\mathcal{L}_0$.

Пусть теперь $f \in \mathcal{L}_1$. В этом случае в силу (23) мы имеем

$$(\mathcal{R}_\lambda^t f)(x) = \int\limits_0^t f(\xi_x(\tau)) e^{\lambda\tau} e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\, ds} d\tau. \tag{41}$$

Хорошо известно (см. [3], гл. 2, §8), что с вероятностью единица функция $\xi_x(t)$ дифференцируема по переменной x для всех t, причем ее производная $\eta(t,x) = \frac{d}{dx}\xi_x(t)$ удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\eta(t,x) = \big(b(\xi_x(t)) b''(\xi_x(t)) + (b'(\xi_x(t)))^2\big)\eta(t,x)\, dt + b'(\xi_x(t))\eta(t,x)\, dw(t) \tag{42}$$

и начальному условию $\eta(0,x) = 1$.

Решая последнее уравнение, получаем

$$\eta(t,x)$$
$$=\exp\biggl(\int\limits_0^t\bigl[b(\xi_x(\tau))b''(\xi_x(\tau))+\frac{1}{2}(b'(\xi_x(\tau)))^2\bigr]\,d\tau+\int\limits_0^t b'(\xi_x(\tau))\,dw(\tau)\biggr). \tag{43}$$

Следующим шагом покажем, что существует константа $\beta > 0$, такая что

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\,0\leqslant s\leqslant t}(\eta(s,x))^{-1}\leqslant e^{\beta t}. \tag{44}$$

Из условий, наложенных на функцию $b(x)$, следует, что для этого достаточно доказать равномерную ограниченность по $s\in[0,t], x\in\mathbb{R}$ величины

$$\Bigl|\int\limits_0^s b'(\xi_x(\tau))\,dw(\tau)\Bigr|.$$

Используя (1) и формулу Ито, получаем

$$\int\limits_0^s b'(\xi_x(\tau))\,dw(\tau)=\int\limits_0^s\frac{b'(\xi_x(\tau))}{b(\xi_x(\tau))}\,d\xi_x(\tau)-\int\limits_0^s(b'(\xi_x(\tau)))^2\,d\tau$$
$$=\log b(\xi_x(s))-\log b(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^s\bigl(b(\xi_x(\tau))b''(\xi_x(\tau))+(b'(\xi_x(\tau)))^2\bigr)\,d\tau.$$

Подставляя последнее выражение в (43), получаем

$$(\eta(s,x))^{-1}=\frac{b(x)}{b(\xi_x(s))}\exp\biggl(-\frac{1}{2}\int\limits_0^s b(\xi_x(\tau))b''(\xi_x(\tau))\,d\tau\biggr).$$

Из последней формулы немедленно следует (44) с

$$\beta=\frac{1}{2}\|bb''\|_\infty\log\Bigl(\frac{\|b\|_\infty}{\theta_0}\Bigr).$$

Теперь, используя (41), получаем

$$\|\mathcal{R}_\lambda^t f\|_2\leqslant\int\limits_0^t e^{(a+v_0)\tau}\|f(\xi_\cdot(\tau))\|_2\,d\tau,$$

где $v_0 = -\inf_{y\in\mathbb{R}} V(y)$.

Оценим теперь равномерно по $\tau \in [0,t]$ величину $\|f(\xi_\cdot(\tau))\|_2$. Имеем

$$\|f(\xi_\cdot(\tau))\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(\xi_x(\tau))|^2\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)|^2(\eta(\tau,y))^{-1}\,dy \leqslant \|f\|_2^2\,e^{\beta\tau}.$$

Таким образом, мы получили

$$\|\mathcal{R}_\lambda^t f\|_2 \leqslant \int\limits_0^t e^{(a+v_0+\beta/2)\tau}\,d\tau\,\|f\|_2.$$

Из последней формулы, в частности, следует что в случае

$$a + v_0 + \beta/2 < 0$$

утверждение теоремы остается справедливым также и для $t = +\infty$. □

§4. Интегральное представление резольвенты.

Пусть, как и выше, $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, заданный на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = W_2^2(\mathbb{R}) = \bigl\{f \in L_2(\mathbb{R}) : k^2(\Psi f)(k) \in L_2(\mathbb{R})\bigr\}$$

и действующий на этой области определения по правилу

$$\mathcal{A}f(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\Bigl(b^2(x)\frac{df}{dx}\Bigr) + V(x),$$

а $\mathcal{A}_{ac}$ — его сужение на абсолютно непрерывное подпространство H_{ac}.

Как уже было отмечено,

$$\sigma(\mathcal{A}_{ac}) = \sigma_{ac}(\mathcal{A}) = [0,\infty),$$

причем, в силу (16), для $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_{ac})$ область определения оператора $(\mathcal{A}_{ac} - \lambda I)^{-1}$ имеет вид

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{ac} - \lambda I)^{-1} = \Bigl\{f \in \mathrm{H}_{ac} : \frac{(\Psi f)(k)}{\frac{k^2}{2} - \lambda} \in L_2(\mathbb{R})\Bigr\}. \tag{45}$$

Теорема 3. 1. *Пусть* $a+v_0 < 0$. *Тогда для любого* $f \in \mathrm{H}_{ac}$ *справедливо*

$$\mathbb{E}\int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(\infty,x,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_{ac} - \lambda I)^{-1}f(x).$$

2. *Пусть* $a + v_0 \geqslant 0$ *и* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{ac})$. *Тогда для любого* $f \in \mathrm{H}_{ac}$ *справедливо*

$$(L_2)\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_{ac}-\lambda I)^{-1}f(x). \tag{46}$$

3. *Пусть* $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_{ac})$. *Тогда для любого* $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{ac}-\lambda I)^{-1}$ *справедливо* (46).

Доказательство. Пусть сначала $a+v_0<0$, и $f \in \mathrm{H}_{ac}$. Пусть $g = \Psi f$. Тогда, пользуясь (23) и (38), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(\infty,x,y)f(y)\,dy = (\mathcal{R}_\lambda^\infty f)(x) = ((\mathcal{R}_\lambda^\infty \Psi^*)g)(x)$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi_x(\tau),k)e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds} g(k)\,dk\,d\tau. \tag{47}$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей (47). Используя (17), получим

$$\mathbb{E}\int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(\infty,x,y)f(y)dy = \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau}\,d\tau\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big[\varphi(\xi_x(\tau),k)e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\Big]g(k)dk$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau}\,d\tau\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{k^2\tau}{2}}\varphi(x,k)g(k)\,dk$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x,k)\frac{g(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda}\,dk = (\mathcal{A}_{ac}-\lambda I)^{-1}f(x). \tag{48}$$

Пусть теперь $a+v_0 \geqslant 0$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$ и $f \in \mathrm{H}_{ac}$. Как и выше, представим f в виде суммы $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in \mathcal{L}_0$, $f_1 \in \mathcal{L}_1$. Ясно, что в этом представлении f_0, $f_1 \in \mathrm{H}_{ac}$.

В силу линейности по f левой и правой части (46) достаточно доказать (46) отдельно для f_0 и f_1. Докажем сначала для f_1.

Пусть $g_1 = \Psi f_1$. Как и выше, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y)f_1(y)\,dy = (\mathcal{R}_\lambda^t f_1)(x) = ((\mathcal{R}_\lambda^t \Psi^*)g_1)(x)$$

$$= \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi_x(\tau), k) e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds} g_1(k)\,dk\,d\tau. \tag{49}$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей (49). Получим

$$\mathbb{E}\int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y) f_1(y) dy = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\varphi(\xi_x(\tau), k) e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds} g_1(k) dk\,d\tau$$

$$= \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\,d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{k^2\tau}{2}} \varphi(x,k) g_1(k)\,dk = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x,k) g_1(k) \frac{\left(1 - e^{(\lambda - \frac{k^2}{2})t}\right)}{\frac{k^2}{2} - \lambda}\,dk. \tag{50}$$

Так как $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{ac})$, то величина $-\lambda + \frac{k^2}{2}$ отделена от нуля, и при всех k справедлива оценка

$$\left|\frac{1}{\frac{k^2}{2} - \lambda}\right| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{51}$$

Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем, что для любого $f_1 \in \mathcal{L}_1$ при $t \to \infty$ семейство функций

$$g_1(k) \frac{1}{\frac{k^2}{2} - \lambda} \left(1 - e^{(\lambda - \frac{k^2}{2})t}\right)$$

сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к функции $\frac{g_1(k)}{\frac{k^2}{2} - \lambda}$.

Таким образом, мы получили

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E} \int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y) f_1(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x,k) \frac{g_1(k)}{\frac{k^2}{2} - \lambda}\,dk. \tag{52}$$

Докажем теперь (52) для произвольного $f_0 \in \mathcal{L}_0$. Пусть $g_0 = \Psi f_0$. В этом случае в силу (25)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y) f_0(y)\,dy = (\mathcal{R}_\lambda^t f_0)(x) = ((\mathcal{R}_\lambda^t \Psi^*) g_0)(x)$$

$$= -\int\limits_0^t e^{-\lambda\tau} \int\limits_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} \frac{\varphi(x,k)}{\varphi(0, i|k|)} \varphi(\xi_0(\tau), i|k|) e^{-\int\limits_0^\tau V(\xi_0(s))\,ds} g_0(k)\,dk\,d\tau. \tag{53}$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей (53). Получим

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} r_\lambda(t,x,y) f_0(y)\,dy &= \mathbb{E}((\mathcal{R}^t_\lambda \Psi^*) g_0)(x) \\
= -\int_0^t e^{-\lambda\tau}\,d\tau \int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} &\frac{\varphi(x,k)}{\varphi(0,i|k|)} \mathbb{E}\varphi(\xi_0(\tau),i|k|) e^{-\int_0^\tau V(\xi_0(s))\,ds} g_0(k)\,dk \\
&= -\int_0^t e^{-\lambda\tau}\,d\tau \int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} e^{\frac{k^2\tau}{2}} \varphi(x,k) g_0(k)\,dk \\
&= -\int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} \varphi(x,k) g_0(k) \int_0^t e^{-\lambda\tau} e^{\frac{k^2\tau}{2}}\,d\tau\,dk \\
&= \int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} \varphi(x,k) \frac{g_0(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda} \left(1 - e^{(\frac{k^2}{2}-\lambda)t}\right) dk.
\end{aligned}
$$

Снова используя (51) и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем, что при $t\to\infty$ последнее выражение стремится к величине

$$
\int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} \varphi(x,k) \frac{g_0(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda}\,dk.
$$

Пункт 2 теоремы, таким образом, полностью доказан.

Докажем теперь утверждение п. 3 теоремы. Итак, пусть $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$ и, значит, мы не можем пользоваться оценкой (51). Пусть

$$
f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{ac} - \lambda I)^{-1}.
$$

В силу (45), это означает, что функция

$$
\frac{g(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda}
$$

принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Соответственно, функции

$$\frac{g_0(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda} \quad \text{и} \quad \frac{g_1(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda} \tag{54}$$

также принадлежат $L_2(\mathbb{R})$.

Опять применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости и (54), получаем, что семейство функций

$$\mathbb{E}((\mathcal{R}_\lambda^t \Psi^*)g_0)(x) = \int\limits_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} \varphi(x,k)\frac{g_0(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda}\left(1-e^{(\frac{k^2}{2}-\lambda)t}\right)dk$$

сходится при $t \to \infty$ в $L_2(\mathbb{R})$ к функции

$$\int\limits_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} \varphi(x,k)\frac{g_0(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda}\,dk,$$

а семейство функций

$$\mathbb{E}((\mathcal{R}_\lambda^t \Psi^*)g_1)(x)$$

сходится при $t \to \infty$ в $L_2(\mathbb{R})$ к функции

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x,k)\frac{g_1(k)}{\frac{k^2}{2}-\lambda}\,dk,$$

что завершает доказательство теоремы. □

Список литературы

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М., 1973.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Лань, Санкт-Петербург, Москва, Краснодар, 2010.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* Наука, М., 1977.
4. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одном семействе комплексных стохастических процессов.* — Доклады Академии наук **501** (2021), 38–41.
5. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одном семействе случайных операторов.* — Теория вероятн. и ее примен., в печати.
6. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* Наука, М., 1969.
7. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Наука, М., 1958.

8. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики,* т. 3. Мир, М., 1978.
9. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики,* т. 4. Мир, М., 1977.

Ibragimov I. A., Smorodina N. V., Faddeev M. M. On the properties of a class of random operators.

We consider random operators arising when one constructs a probabilistic representation of the resolvent of an operator $-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\big(b^2(x)\frac{d}{dx}\big)+V(x)$. We prove that with probability one these operators are linear integral operators and study properties of their kernels.

ПОМИ РАН, Санкт-Петербург,
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru
E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: m.faddeev@spbu.ru

Поступило 31 августа 2022 г.