Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

М. С. Ермаков

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С МАЛЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБОК ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

§1. Введение

При проверке гипотез и доверительном оценивании постоянно приходится работать с событиями, имеющими малые вероятности. Мы исследуем одну из таких задач, связанную с изучением малых вероятностей, возникающих при обнаружении сигнала в гауссовском белом шуме. Для критериев типа Неймана и критериев, имеющих тестовые статистики, являющиеся $\mathbb{L}_2$-нормами ядерных оценок плотности, дается полное описание непараметрических множеств альтернатив, вероятности ошибок II рода которых стремятся к нулю с заданной скоростью, когда мощность сигнала стремится к нулю.

Если задача непараметрической проверки гипотез состоит в проверке гипотезы об адекватности выбора статистической модели, то альтернативы могут быть любыми. Лишь бы они не принадлежали гипотезе. Поэтому естественно описать различимость любых непараметрических множеств альтернатив, не ограничиваясь предположением об их параметрической структуре или принадлежности какому-нибудь классу гладких функций [3, 11]. Это и делалось в работах [2, 6, 7] и эта линия исследований продолжается и в настоящей работе.

В работах [6, 7] были даны необходимые и достаточные условия равномерной состоятельности непараметрических множеств альтернатив для наиболее распространенных непараметрических критериев: Колмогорова, Крамера–фон Мизеса, хи-квадрат с числом зон, растущих вместе с ростом объема выборки, Неймана, Бикеля–Розенблатта. Результаты были получены для множеств альтернатив, задаваемых в терминах как функций распределения, так и плотности распределения.

Ключевые слова: критерии согласия, состоятельность, обнаружение сигнала, критерий Бикеля–Розенблатта, критерий Неймана, наибольшие множества.

Исследование поддержано грантом РФФИ 20-01-00273.

В данной работе для критериев типа Неймана [13] и Бикеля–Розенблатта [1,8] дано всеобъемлющее описание равномерно состоятельных непараметрических множеств альтернатив, имеющих заданную скорость стремления вероятностей ошибок второго рода к нулю. Такое описание дано как в терминах метода расстояний (асимптотики значений на альтернативах псевдометрики или метрики, порождающей тестовую статистику), так и в терминах скорости сходимости к нулю $\mathbb{L}_2$-норм сигналов, принадлежащих множествам альтернатив.

Пусть мы наблюдаем случайный процесс задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_\epsilon(t) = S(t)\,dt + \varepsilon\,d\,w(t), \quad \varepsilon > 0, \tag{1.1}$$

где $S \in \mathbb{L}_2(0,1)$ и $d\,w(t)$ – гауссовский белый шум.

Стоит задача проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0 \;:\; S(t) = 0, \quad t \in [0,1], \tag{1.2}$$

против семейства простых альтернатив

$$\mathbb{H}_\varepsilon \;:\; S(t) = S_\varepsilon(t), \quad t \in [0,1], \quad \varepsilon > 0. \tag{1.3}$$

Ясно, что асимптотика вероятностей ошибок второго рода для любых семейств непараметрических множеств альтернатив $\Psi_\varepsilon \subset \mathbb{L}_2(0,1)$ однозначно описывается такой постановкой задачи. Мы всегда можем выделить из множеств Ψ_ε семейство альтернатив S_ε, $\varepsilon > 0$, имеющих наихудший порядок асимптотики вероятностей ошибок второго рода и исследовать ее.

Работа организована следующим образом. В параграфе 2 приведены определения равномерной состоятельности в зонах вероятностей больших и умеренных уклонений. В параграфе 3 даны асимптотики вероятностей ошибок I и II рода в зоне больших и умеренных уклонений, когда тестовые статистики являются линейными комбинациями квадратов оценок коэффициентов Фурье сигнала. В параграфе 4 для зон вероятностей больших и умеренных уклонений вводится понятие наибольшего множества. Наибольшие множества для тестовой статистики являются наибольшими выпуклыми центрально-симметричными множествами, такими что если из них удалить шары в $\mathbb{L}_2$, имеющие центры в нуле и заданную скорость стремления к нулю радиусов при стремлении к нулю мощности шума, то мы получим равномерно состоятельное семейство множеств альтернатив в смысле вероятностей больших уклонений. В параграфе 5 мы показываем, что наибольшими множествами являются шары $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$, в пространстве Бесова $\mathbb{B}^s_{2\infty}$. Параметр s зависит от скорости сходимости $\mathbb{L}_2$-нормы $\|S_\varepsilon\|$ к нулю. Нами показывается, что любое семейство простых альтернатив S_ε, $\varepsilon > 0$, имеющее заданную скорость сходимости $\mathbb{L}_2$-нормы $\|S_\varepsilon\|$ к нулю, является состоятельным в постановке задачи вероятностей умеренных уклонений если и только если каждая функция S_ε допускает представление в виде суммы двух функций: функции $S_{1\varepsilon} \in \mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$ с той же самой скоростью сходимости к нулю, что и $\|S_\varepsilon\|$, и ортогональной функции $S_{2\varepsilon}$. С точки зрения содержательной интерпретации функции $S_{1\varepsilon}$ являются более гладкими, чем функции $S_{2\varepsilon}$, а функции $S_{2\varepsilon}$ – более быстро осциллирующими. В параграфе 6 доказываются аналогичные результаты, если тестовая статистика является $\mathbb{L}_2$-нормой ядерной оценки сигнала. В параграфе 7 приведены доказательства сформулированных теорем.

Мы будем использовать буквы c и C, а также эти буквы с различными индексами, для обозначения различных положительных постоянных. Обозначим через $1_{\{A\}}$ индикатор события A. Обозначим через $[a]$ целую часть вещественного числа a. Для любых двух последовательностей чисел a_n и b_n, $a_n \asymp b_n$ означает, что найдутся такие c и C, что $c < a_n/b_n < C$ для всех n, и $a_n = o(b_n)$, $a_n << b_n$ означает $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Наконец $a_n = O(b_n)$ и $a_n = \Omega(b_n)$ означает, что $a_n \leqslant Cb_n$ и $b_n \leqslant Ca_n$ соответственно. Для любого комплексного числа z обозначим $\bar{z}$ комплексно сопряженное число.

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

функцию стандартного нормального распределения.

Пусть ϕ_j, $1 \leqslant j < \infty$, – ортонормированная система функций в $\mathbb{L}_2(0,1)$. Для любого $P_0 > 0$ определим множество

$$\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0) = \Big\{ S : S = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j,\ \sup_{\lambda > 0} \lambda^{2s} \sum_{j > \lambda} \theta_j^2 \leqslant P_0,\ \theta_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}. \qquad (1.4)$$

При определенных ограничениях на базис ϕ_j, $1 \leqslant j < \infty$, функциональное пространство

$$\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty} = \Big\{ S : S = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j,\ \sup_{\lambda > 0} \lambda^{2s} \sum_{j > \lambda} \theta_j^2 < \infty,\ \theta_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}$$

является пространством Бесова $\mathbb{B}^s_{2\infty}$ (см. [16]). В частности, $\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}$ является пространством Бесова, если ϕ_j, $1 \leqslant j < \infty$, – тригонометрический базис.

Если $\phi_j(t) = \exp\{2\pi i j x\}$, $x \in (0,1)$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, обозначим

$$\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0) = \Big\{ S : f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j \phi_j, \ \sup_{\lambda > 0} \lambda^{2s} \sum_{|j| > \lambda} |\theta_j|^2 \leqslant P_0 \Big\}.$$

Поскольку функции ϕ_j здесь комплексные, то и θ_j – комплексные числа, и $\theta_j = \bar{\theta}_{-j}$ для всех $-\infty < j < \infty$.

Обозначим $\mathbb{B}^s_{2\infty}$ – банахово пространство, порожденное шарами $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$.

§2. Состоятельность в зоне больших и умеренных уклонений

Для любого критерия L_ε, $\varepsilon > 0$, обозначим $\alpha(L_\varepsilon) = \mathbf{E}_0(L_\varepsilon)$ – его вероятность ошибки первого рода и $\beta(L_\varepsilon, S) = \mathbf{E}_S(1 - L_\varepsilon)$ – его вероятность ошибки второго рода при альтернативе $S \in \mathbb{L}_2(0,1)$.

Пусть $r_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Если

$$|\log \beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon)| = \Omega(r_\varepsilon^2) \tag{2.1}$$

для всех критериев L_ε, $\alpha(L_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon$, таких что $r_\varepsilon^{-2} \log \alpha(L_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то скажем, что семейство альтернатив S_ε, $\varepsilon > 0$, является r_ε-состоятельным в смысле вероятностей больших уклонений (r_ε-LD-состоятельной).

Отметим, что любое r_ε-LD-состоятельное семейство альтернатив S_ε является состоятельным, в то время как обратное не является обязательным. Если (2.1) не имеет места, мы скажем что семейство альтернатив r_ε-LD-несостоятельно.

§3. Асимптотика вероятностей ошибок I и II рода квадратичных тестовых статистик

Используя ортонормированную систему функций ϕ_j, $1 \leqslant j < \infty$, мы можем задать стохастическое дифференциальное уравнение (1.1) в следующем виде (см. [10]):

$$y_{\varepsilon j} = \theta_j + \varepsilon \xi_j, \quad 1 \leqslant j < \infty, \tag{3.1}$$

где

$$y_{\varepsilon j} = \int\limits_0^1 \phi_j dY_\varepsilon(t), \quad \xi_j = \int\limits_0^1 \phi_j dw(t) \quad \text{и} \quad \theta_j = \int\limits_0^1 S\phi_j dt.$$

Обозначим $\boldsymbol{y}_\varepsilon = \{y_{\varepsilon j}\}_{j=1}^\infty$ и $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_j\}_{j=1}^\infty$. В случае альтернатив S_ε положим $\theta_{\varepsilon j} = \int\limits_0^1 S_\varepsilon\, \phi_j\, dt$.

Мы можем рассматривать $\boldsymbol{\theta}$ как вектор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ с нормой $\|\boldsymbol{\theta}\| = \Bigl(\sum\limits_{j=1}^\infty \theta_j^2\Bigr)^{1/2}$. В дальнейшем мы будем использовать одно и то же обозначение нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{L}_2$ и в $\mathbb{H}$. Смысл этого обозначения всегда будет ясен из контекста.

Мы рассматриваем тестовые статистики типа статистик критерия Неймана

$$T_\varepsilon(Y_\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^\infty \varkappa_{\varepsilon j}^2 y_{\varepsilon j}^2 - \rho_\varepsilon^2,$$

где $\rho_\varepsilon^2 = \sum\limits_{j=1}^\infty \varkappa_{\varepsilon j}^2$.

Определим критерий

$$L_\varepsilon = \mathbf{1}_{\{A_\varepsilon^{-1/2} T_\varepsilon > x_{\alpha_\varepsilon}\}}.$$

Предполагается, что коэффициенты $\varkappa_{\varepsilon j}^2$ удовлетворяют следующим условиям:

A1. Для каждого $\varepsilon > 0$ последовательность $\varkappa_{\varepsilon j}^2$ убывающая.

A2. Имеет место

$$C_1 < A_\varepsilon = \varepsilon^{-4} \sum_{j=1}^\infty \varkappa_{\varepsilon j}^4 < C_2. \tag{3.2}$$

Обозначим $\kappa_\varepsilon^2 = \kappa_{\varepsilon k_\varepsilon}^2$, где $k_\varepsilon = \sup\Bigl\{k \,:\, \sum\limits_{j<k} \varkappa_{\varepsilon j}^2 \leqslant \frac{1}{2}\rho_\varepsilon^2\Bigr\}$.

A3. Существуют такие C_1 и $\lambda > 1$, что для любого $\delta > 0$ и для каждого ε и $k_{\varepsilon(\delta)} = [(1+\delta)k_\varepsilon]$ имеет место $\varkappa_{\varepsilon, k_{\varepsilon(\delta)}}^2 < C_1(1+\delta)^{-\lambda}\varkappa_\varepsilon^2$.

A4. Имеет место $\varkappa_{\varepsilon 1}^2 \asymp \varkappa_\varepsilon^2$ при $\varepsilon \to 0$. Для любого $c > 1$ найдется C, такое что $\varkappa_{\varepsilon,[ck_\varepsilon]}^2 \geqslant C\varkappa_\varepsilon^2$ для всех $\varepsilon > 0$.

Обозначим $D_\varepsilon(S_\varepsilon) = \varepsilon^{-4} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varkappa_{\varepsilon j}^2 \, \theta_{\varepsilon j}^2 = \varepsilon^{-2} \bigl(T_\varepsilon(S_\varepsilon) + \rho_\varepsilon^2\bigr)$. Положим

$$B_\varepsilon(S_\varepsilon) = \frac{D_\varepsilon(S_\varepsilon)}{(2A_\varepsilon)^{1/2}}.$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Пусть* $x_{\alpha_\varepsilon} \to \infty$ *и* $x_{\alpha_\varepsilon} = o(k_\varepsilon^{1/6})$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда*

$$\alpha(L_\varepsilon) = (1 - \Phi(x_{\alpha_\varepsilon}))(1 + o(1)). \tag{3.3}$$

Пусть $\alpha_\varepsilon \to 0$, $x_{\alpha_\varepsilon} = O(B_\varepsilon(S_\varepsilon))$ *и*

$$D_\varepsilon(S_\varepsilon) \to \infty, \quad D_\varepsilon(S_\varepsilon) = o(k_\varepsilon^{1/6}), \quad B_\varepsilon(S_\varepsilon) - x_{\alpha_\varepsilon} = \Omega(B_\varepsilon(S_\varepsilon)) \tag{3.4}$$

при $\varepsilon \to 0$. *Тогда*

$$\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon) = \Phi(x_{\alpha_\varepsilon} - B_\varepsilon(S_\varepsilon))(1 + o(1)). \tag{3.5}$$

Пусть $x_{\alpha_\varepsilon} \to \infty$ *и* $x_{\alpha_\varepsilon} = o(k_\varepsilon^{1/2})$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда*

$$\sqrt{2|\log \alpha(L_\varepsilon)|} = x_{\alpha_\varepsilon}(1 + o(1)), \quad \alpha_\varepsilon \to 0 \tag{3.6}$$

при $\varepsilon \to 0$. *Пусть* $\alpha_\varepsilon \to 0$, $x_{\alpha_\varepsilon} = O(B_\varepsilon(S_\varepsilon))$ *и*

$$D_\varepsilon(S_\varepsilon) \to \infty, \quad D_\varepsilon(S_\varepsilon) = o(k_\varepsilon^{1/2}), \quad B_\varepsilon(S_\varepsilon) - x_{\alpha_\varepsilon} = \Omega(B_\varepsilon(S_\varepsilon)) \tag{3.7}$$

при $\varepsilon \to 0$. *Тогда*

$$\sqrt{2|\log \beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon)|} = (B_\varepsilon(S_\varepsilon) - x_{\alpha_\varepsilon})(1 + o(1)). \tag{3.8}$$

Пусть $\alpha_\varepsilon \to 0$, $x_{\alpha_\varepsilon} = O(B_\varepsilon(S_\varepsilon))$ *и*

$$r_\varepsilon \to \infty, \qquad \frac{B_\varepsilon(S_\varepsilon)}{r_\varepsilon} \to \infty, \quad B_\varepsilon(S_\varepsilon) - x_{\alpha_\varepsilon} = \Omega(B_\varepsilon(S_\varepsilon))$$

при $\varepsilon \to 0$. *Тогда* $r_\varepsilon^{-2}|\log \beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon)| \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Обозначим

$$\tau_\varepsilon^2 = \varepsilon^4 D_\varepsilon(S_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{\varepsilon j}^2 \, \theta_{\varepsilon j}^2.$$

Теорема 3.2. *Пусть имеет место* **A1–A4**. *Пусть* $x_{\alpha_\varepsilon} \to \infty$ *и* $k_\varepsilon = \Omega(x_{\alpha_\varepsilon}^2)$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда*

$$\log P_0(T_\varepsilon(Y_\varepsilon) > x_{\alpha_\varepsilon}) \leqslant -\frac{1}{2} \varkappa_{\varepsilon 1}^{-2} x_{\alpha_\varepsilon}(1 + o(1)). \tag{3.9}$$

Пусть $k_\varepsilon = \Omega(D_\varepsilon^2(S_\varepsilon))$ *и* $\varepsilon(\tau_\varepsilon - x_{\alpha_\varepsilon}^{1/2}) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$ *дополнительно. Тогда*

$$\log P_{S_\varepsilon}(T_\varepsilon(Y_\varepsilon) < x_{\alpha_\varepsilon}) \leqslant -\frac{1}{2}\varkappa_{\varepsilon 1}^{-2}(\tau_\varepsilon - x_{\alpha_\varepsilon}^{1/2})^2(1+o(1)). \tag{3.10}$$

Равенство в (3.10) *достигается для* $S_\varepsilon = \{\theta_{\varepsilon j}\}_{j=1}^\infty$, *где* $\theta_{\varepsilon 1} = \varkappa_{\varepsilon 1}^{-1}\tau_\varepsilon$ *и* $\theta_{\varepsilon j} = 0$ *for* $j > 1$.

В теоремах 3.1 and 3.2 коэффициенты $\varkappa_{\varepsilon j}^2$ имеют нормировку, отличную от нормировки коэффициентов $\kappa_{\varepsilon j}^2$ в [4]. В то же время теоремы 3.1 и 3.2 получаются простой модификацией доказательств лемм 2 и 3 в [4]. Чтобы использовать обозначения $\varkappa_{\varepsilon j}^2$ вместо $\kappa_{\varepsilon j}^2$ в доказательствах лемм 2 и 3 в [4], нужно взять

$$\kappa_{\varepsilon j}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{\varepsilon j}^2 \theta_{\varepsilon j}^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{\varepsilon j}^4}\, \varkappa_{\varepsilon j}^2, \quad 1 \leqslant j < \infty. \tag{3.11}$$

Нормировка (3.2) применялась в теоремах об асимптотической нормальности тестовых статистик $T_\varepsilon(Y_\varepsilon)$ в [3, 6].

§4. Наибольшие множества в зоне вероятностей умеренных уклонений

Определение наибольших множеств в зоне вероятностей умеренных уклонений аналогично определению наибольших множеств в [6], где они рассматривались для изучения равномерной состоятельности непараметрических множеств альтернатив в задачах непараметрической проверки гипотез. Единственным отличием данной работы по существу является использование в определении понятия $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-состоятельности, $0 < \omega \leqslant 1$, вместо понятия состоятельности. Так же, как и в [6], мы будем изучать наибольшие множества для альтернатив S_ε, сближающихся с гипотезой в $\mathbb{L}_2$-норме со скоростью ε^{2r}, $0 < r < 1/2$, при $\varepsilon \to 0$.

Пусть Ξ, $\Xi \subset \mathbb{L}_2(0,1)$, – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\Xi$. Обозначим $U = \{f : \|S\|_\Xi \leqslant 1,\ S \in \Xi\}$ шар в Ξ. Исходя из соображений состоятельности мы можем предполагать, что множество U компактно в $\mathbb{L}_2(0,1)$ (см. [6, 9]).

Определим подпространства Π_k, $1 \leqslant k < \infty$, по индукции.

Обозначим $d_1 = \max\{\|S\|, S \in U\}$ и зададим функцию $e_1 \in U$, такую что $\|e_1\| = d_1$. Обозначим Π_1 линейное подпространство в $\mathbb{L}_2(0,1)$, порожденное функцией e_1.

Для $i = 2, 3, \ldots$ обозначим $d_i = \max\{\rho(S, \Pi_{i-1}), S \in U\}$, где $\rho(S, \Pi_{i-1}) = \min\{\|S - g\|, g \in \Pi_{i-1}\}$. Зададим функцию e_i, $e_i \in U$, такую что $\rho(e_i, \Pi_{i-1}) = d_i$. Обозначим Π_i линейное подпространство, порожденное функциями $e_1, \ldots, e_i$.

Для любой функции $S \in \mathbb{L}_2(0,1)$ обозначим S_{Π_i} проекцию функции S на подпространство Π_i и положим $\widetilde{S}_i = S - S_{\Pi_i}$.

Множество U называется *наибольшим множеством* для тестовой статистики T_ε и функциональное пространство Ξ называется *наибольшим пространством*, если выполнены следующие два утверждения:

i. Любое семейство альтернатив $S_\varepsilon \in U$, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$ при $\varepsilon \to 0$, является $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-состоятельной.

ii. для любого $S \in \mathbb{L}_2(0,1)$, $S \notin \Xi$, найдутся последовательности i_n, j_{i_n}, $i_n \to \infty$, $j_{i_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, такие что $cj_{i_n}^{-r} < \|\widetilde{S}_{i_n}\| < Cj_{i_n}^{-r}$ и подпоследовательность альтернатив $\widetilde{S}_{i_n}$ является $j_{i_n}^{\omega}$-LD-несостоятельной для подпоследовательности сигналов $\widetilde{S}_{i_n}$, наблюдаемых в гауссовском белом шуме мощности $j_{i_n}^{-1/2}$.

§5. Необходимые и достаточные условия $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-состоятельности последовательностей простых альтернатив S_ε, сходящихся к гипотезе в $\mathbb{L}_2$

Нас будут интересовать необходимые и достаточные условия $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-состоятельности семейств простых альтернатив S_ε, $\varepsilon > 0$, сходящихся к гипотезе в $\mathbb{L}_2$, т.е. для которых $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$. Здесь $0 < r < 1/2$ и $0 < 2\omega < 1 - 2r$. Таким образом $r_\varepsilon \asymp \varepsilon^{-2\omega}$. Мы берем $k_\varepsilon \asymp \varepsilon^{-4+8r+4\omega}$.

Заметим, что в такой постановке задаче из **A1**–**A4** следует

$$\kappa_\varepsilon^2 \asymp \varepsilon^{4-4r-4\omega}, \quad \bar{A}_\varepsilon \doteq \varepsilon^{-4} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{\varepsilon j}^4 \asymp \varepsilon^{-4\omega} \tag{5.1}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Утверждения теорем этого параграфа и их последующие доказательства по существу повторяют формулировки и доказательства теорем 4.1 и 4.4–4.10 в [6] с указанными выше порядками $\kappa_\varepsilon^2, \bar{A}_\varepsilon$ и k_ε.

При доказательствах достаточно просто подставить приведенные выше порядки $\kappa_\varepsilon^2, \bar{A}_\varepsilon, k_\varepsilon$ в доказательства соответствующих теорем в [6]. Это будет продемонстрировано в доказательстве свойства *ii.* наибольших множеств в теореме 5.2. Остальные доказательства мы опустим. Поскольку их модификация довольно проста.

5.1. Аналитический вид необходимых и достаточных условий $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-состоятельности. Результаты приведены в терминах коэффициентов Фурье функций $S = S_\varepsilon = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta_{\varepsilon j}\phi_j$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Семейство альтернатив S_ε, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$, – $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-состоятельно если и только если найдутся c_1, c_2 и ε_0, такие что имеет место*

$$\sum_{|j|<c_2k_\varepsilon} |\theta_{\varepsilon j}|^2 > c_1\varepsilon^{4r} \tag{5.2}$$

для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Аналоги теоремы 5.1 и теоремы 5.6, приведенной ниже, справедливы и для постановки задачи параграфа 6. В постановке задачи параграфа 6 индексы j могут принимать отрицательные значения и $\theta_{\varepsilon j}$ могут быть комплексными числами. По этой причине мы пишем $|j|$ вместо j и $|\theta_{\varepsilon j}|$ вместо $\theta_{\varepsilon j}$ в (5.2) и (5.6).

5.2. Наибольшие множества. Качественная структура состоятельных последовательностей альтернатив.

Обозначим $s = \frac{r}{2-4r-2\omega}$. Тогда $r = \frac{(2-2\omega)s}{1+4s}$.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Тогда шары $\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$ являются наибольшими множествами для тестовых статистик $T_\varepsilon(Y_\varepsilon)$.*

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Тогда семейство альтернатив S_ε, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$, $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-состоятельна если и только если найдется наибольшее множество $\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$, и семейство функций $S_{1\varepsilon} \in \bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)$, $\|S_{1\varepsilon}\| \asymp \varepsilon^{2r}$, такие что $S_{1\varepsilon}$ ортогональна $S_\varepsilon - S_{1\varepsilon}$, т.е. имеет место*

$$\|S_\varepsilon\|^2 = \|S_{1\varepsilon}\|^2 + \|S_\varepsilon - S_{1\varepsilon}\|^2. \tag{5.3}$$

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *для любого* $\varepsilon^{-2\omega}$*-LD-состоятельного семейства простых альтернатив* S_ε, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$, *найдутся такие наибольшее множество* $\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$, *и семейство функций* $S_{1\varepsilon}$, $\|S_{1\varepsilon}\| \asymp \varepsilon^{2r}$, *принадлежащих наибольшему множеству* $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$, *что имеет место:*

$S_{1\varepsilon}$ *ортогональна* $S_\varepsilon - S_{1\varepsilon}$,

для любых критериев L_ε, *удовлетворяющих* (3.7), *найдется* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$, *такое что для* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *имеет место*

$$|\log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon) - \log\beta(L_\varepsilon, S_{1\varepsilon})| \leqslant \delta|\log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon)|, \tag{5.4}$$

$$|\log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon - S_{1\varepsilon})| \leqslant \delta|\log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon)|. \tag{5.5}$$

5.3. Взаимодействие состоятельных и несостоятельных последовательностей альтернатив. Чисто состоятельные последовательности. Скажем, что $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-состоятельное семейство альтернатив S_ε, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$, *чисто* $\varepsilon^{-2\omega}$*-LD-состоятельно*, если не существует несостоятельной подпоследовательности альтернатив $S_{1\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$, такой что $S_{1\varepsilon_i}$ ортогональна $S_{\varepsilon_i} - S_{1\varepsilon_i}$ и $\|S_{1\varepsilon_i}\| > c_1\varepsilon_i^{2r}$.

Теорема 5.5. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Пусть семейство альтернатив* S_ε, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$, *–* $\varepsilon^{-2\omega}$*-LD-состоятельно. Тогда для любой* $\varepsilon^{-2\omega}$*-LD-несостоятельного семейства альтернатив* $S_{1\varepsilon}$, $\|S_{1\varepsilon}\| \asymp \varepsilon^{2r}$, *имеет место*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon) - \log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon + S_{1\varepsilon})}{\log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon)} = 0.$$

Теорема 5.6. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Семейство альтернатив* S_ε, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$, *чисто* $\varepsilon^{-2\omega}$*-LD-состоятельно если и только если для любого* $\delta > 0$ *найдется такое* $C_1 = C_1(\delta)$, *что имеет место*

$$\sum_{|j| > C_1 k_\varepsilon} |\theta_{\varepsilon j}|^2 \leqslant \delta\varepsilon^{4r} \tag{5.6}$$

для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$.

Теорема 5.7. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Тогда семейство* S_ε, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$, *чисто* $\varepsilon^{-2\omega}$*-LD-состоятельно если и только если для любого* $\delta > 0$ *найдется наибольшее множество* $\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)$ *и семейство функций* $S_{1\varepsilon} \in \bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)$, *такие что* $\|S_\varepsilon - S_{1\varepsilon}\| \leqslant \delta\varepsilon^{2r}$ *для всех* $\varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$.

Теорема 5.8. *Пусть выполнены условия* **A1–A4**. *Тогда семейство альтернатив* S_ε, $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$, *чисто* $\varepsilon^{-2\omega}$*-LD-состоятельно если и только если для любой* $\varepsilon^{-2\omega}$*-LD-несостоятельной последовательности альтернатив* $S_{1\varepsilon_i}$, $\|S_{1\varepsilon_i}\| \asymp \varepsilon_i^{2r}$, $\varepsilon_i \to 0$ *при* $i \to \infty$, *имеет место*

$$\|S_{\varepsilon_i} + S_{1\varepsilon_i}\|^2 = \|S_{\varepsilon_i}\|^2 + \|S_{1\varepsilon_i}\|^2 + o(\varepsilon_i^{4r}). \tag{5.7}$$

Замечание 5.1. Пусть $\varkappa_{\varepsilon j}^2 > 0$ для $j \leqslant l_\varepsilon$, и пусть $\varkappa_{\varepsilon j}^2 = 0$ для $j > l_\varepsilon$, где $l_\varepsilon \asymp \varepsilon^{-4+8r+4\omega}$ при $\varepsilon \to 0$. Анализ доказательства теорем показывает, что теоремы 3.1, 3.2 и 5.1–5.8 остаются справедливыми для этой постановки задачи, если условие **A4** заменить на

A5. Для любого c, $0 < c < 1$, найдется c_1, такое что $\varkappa_{\varepsilon,[cl_\varepsilon]}^2 \geqslant c_1 \varkappa_{\varepsilon 1}^2$ для всех $\varepsilon > 0$.

При этом во всех соответствующих доказательствах мы полагаем $\varkappa_\varepsilon^2 = \varkappa_{\varepsilon 1}^2$ и $k_\varepsilon = l_\varepsilon$. Теорема 5.6 при этом справедлива со следующими изменением. Достаточно взять в ней $C_1(\varepsilon) < 1$. Доказательство соответствующих версий теорем 3.1, 3.2 и 5.1–5.8 аналогично и опускается.

§6. Критерии, основанные на ядерных оценках

Мы продолжим изучение задачи проверки гипотез (1.2), (1.3) для обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме. Дополнительно предположим, что сигнал S принадлежит множеству $\mathbb{L}_2^{\mathrm{per}}(\mathbb{R}^1)$ – 1-периодических функций, таких что $S \in \mathbb{L}_2(0,1)$. Это позволяет распространить нашу модель на вещественную прямую $\mathbb{R}^1$, положив $w(t+j) = w(t)$ для всех целых j и всех $t \in [0,1)$ (см. [6]).

Определим ядерные оценки

$$\widehat{S}_\varepsilon(t) = \frac{1}{h_\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K\Big(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\Big)\, dY_\varepsilon(u), \quad t \in (0,1), \tag{6.1}$$

где $h_\varepsilon > 0$, $h_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Предположим, что ядро K является четной ограниченной функцией, имеющей носитель, содержащийся в интервале $[-1/2, 1/2]$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt = 1$.

Обозначим $K_h(t) = \frac{1}{h} K\Big(\frac{t}{h}\Big)$, $t \in \mathbb{R}^1$ и $h > 0$.

Определим тестовые статистики

$$T_{1\varepsilon}(Y_\varepsilon) = T_{1\varepsilon h_\varepsilon}(Y_\varepsilon) = \varepsilon^{-2} h_\varepsilon^{1/2} \gamma^{-1} (\|\widehat{S}_\varepsilon\|^2 - \varepsilon^2 h_\varepsilon^{-1} \|K\|^2),$$

где

$$\gamma^2 = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t-s) K(s) ds \Big)^2 dt.$$

Статистика $\varepsilon^2 \, h_\varepsilon^{-1/2} \, \gamma \, T_{1\varepsilon}(Y_\varepsilon)$ является оценкой значения функционала

$$T_\varepsilon(S_\varepsilon) = \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{h_\varepsilon} \int K\Big(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\Big) S_\varepsilon(s) ds \Big)^2 dt.$$

Обозначим $L_\varepsilon = \mathbf{1}_{\{T_{1\varepsilon}(Y_\varepsilon) > x_{\alpha_\varepsilon}\}}$, где x_{α_ε} задается уравнением $\alpha(L_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon$.

Задача допускает рассмотрение в терминах оценок коэффициентов Фурье сигнала. Пусть мы наблюдаем реализацию случайного процесса $Y_\varepsilon(t)$, $t \in [0,1]$.

Для $-\infty < j < \infty$ обозначим

$$\widehat{K}(jh) = \int\limits_{-1}^{1} \exp\{2\pi i j t\} \, K_h(t) \, dt, \quad h > 0,$$

$$y_{\varepsilon j} = \int\limits_0^1 \exp\{2\pi i j t\} \, dY_\varepsilon(t), \quad \xi_j = \int\limits_0^1 \exp\{2\pi i j t\} \, dw(t),$$

$$\theta_{\varepsilon j} = \int\limits_0^1 \exp\{2\pi i j t\} \, S_\varepsilon(t) \, dt.$$

В этих обозначениях мы можем задать ядерную оценку в следующем виде:

$$\widehat{\theta}_{\varepsilon j} = \widehat{K}(jh_\varepsilon) \, y_{\varepsilon j} = \widehat{K}(jh_\varepsilon) \, \theta_{\varepsilon j} + \varepsilon \, \widehat{K}(jh_\varepsilon) \, \xi_j, \quad -\infty < j < \infty. \tag{6.2}$$

Тогда тестовая статистика T_ε допускает следующее представление:

$$T_\varepsilon(Y_\varepsilon) = \varepsilon^{-2} h_\varepsilon^{1/2} \gamma^{-1} \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\theta}_{\varepsilon j}|^2 - \varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{K}(jh_\varepsilon)|^2 \Big). \tag{6.3}$$

Если мы положим $|\widehat{K}(jh_\varepsilon)|^2 = \kappa_{\varepsilon j}^2$, то получим, что тестовые статистики $T_\varepsilon(Y_\varepsilon)$, рассматриваемые в этом параграфе и параграфах 3 и

5, почти не отличаются. Основное отличие постановки задачи параграфа 6 состоит в присутствии в модели цветного гауссовского белого шума. Другое отличие состоит в том, что $\widehat{K}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}^1$, может иметь нули. Результаты, аналогичные параграфу 3, были получены в [5].

Теорема 6.1. *Пусть* $\|S_\varepsilon\| \asymp \varepsilon^{2r}$ *и* $h_\varepsilon \asymp \varepsilon^{4-8r-4\omega}$, $0 < 2\omega < 1-2r$. *Тогда утверждения теорем* 5.1–5.8 *справедливы и для этой постановки задачи с тем отличием, что* $\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)$ *заменяется на* $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$.

Доказательство теорем базируется на следующем аналоге теоремы 3.1 (см. теоремы 2.1 и 2.2 [5]).

Теорема 6.2. *Пусть* $h_\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Пусть* $\alpha_\varepsilon \doteq \alpha(K_\varepsilon) = o(1)$.

Если

$$1 << \sqrt{2|\log \alpha_\varepsilon|} << h_\varepsilon^{-1/6},$$

то x_{α_ε} *задается уравнением* $\alpha_\varepsilon = (1-\Phi(x_{\alpha_\varepsilon}))(1+o(1))$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Если

$$\varepsilon^{-2} h_\varepsilon^{1/2} T_\varepsilon(S_\varepsilon) - \sqrt{|2\log\alpha_\varepsilon|} > c\varepsilon^{-2} h_\varepsilon^{1/2} T_\varepsilon(S_\varepsilon) \tag{6.4}$$

и

$$\varepsilon^2 h_\varepsilon^{-1/2} << T_\varepsilon(S_\varepsilon) << \varepsilon^2 h_\varepsilon^{-2/3} = o(1),$$

при $\varepsilon \to 0$, *то*

$$\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon) = \Phi(x_{\alpha_\varepsilon} - \gamma^{-1}\varepsilon^{-2} h_\varepsilon^{1/2} T_\varepsilon(S_\varepsilon))(1+o(1)). \tag{6.5}$$

Если

$$1 << \sqrt{2|\log \alpha_\varepsilon|} << h_\varepsilon^{-1/2},$$

то $x_{\alpha_\varepsilon} = \sqrt{|2\log\alpha_\varepsilon|}(1+o(1))$.

Если

$$\varepsilon^2 h_\varepsilon^{-1/2} << T_\varepsilon(S_\varepsilon) << \varepsilon^2 h_\varepsilon^{-1} = o(1),$$

и имеет место (6.4), *то*

$$2\log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon) = -(x_{\alpha_\varepsilon} - \gamma^{-1}\varepsilon^{-2} h_\varepsilon^{1/2} T_\varepsilon(S_\varepsilon))^2(1+o(1)). \tag{6.6}$$

Если $\frac{\varepsilon^2 x_{\alpha_\varepsilon}}{h_\varepsilon^{1/2} T_\varepsilon(S_\varepsilon)} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\log\alpha_\varepsilon)^{-1} \log\beta(L_\varepsilon, S_\varepsilon) = \infty.$$

Заметим, что

$$T_\varepsilon(S_\varepsilon) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{K}(jh_\varepsilon)|^2 |\theta_{\varepsilon j}|^2. \tag{6.7}$$

§7. Доказательство теорем

7.1. Доказательство теоремы 3.2. Применяя неравенство Чебышева, имеем для $z^2 = \kappa_\varepsilon^2 x_{\alpha_\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_S(T_\varepsilon - \tau_\varepsilon^2 < z^2 - \tau_\varepsilon^2) \\
&\leqslant \exp\{t(z^2 - \tau_\varepsilon^2)\}\mathbf{E}_0 \left[\exp\left\{-t\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2\,(y_j - \varepsilon^2) + 2t\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2\,y_j\,\theta_j\right\}\right] d\,y \\
&= \exp\{t(z^2 - \tau_\varepsilon^2)\}\lim_{m\to\infty}(2\pi\varepsilon^2)^{-m/2}\int\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1+2t\kappa_j^2\,\varepsilon^2}{\varepsilon^2}y_j^2\right)\right.\right. \\
&\left.\left.+t\sum_{j=1}^{m}\kappa_j^2\,\varepsilon^2 + 2t\sum_{j=1}^{m}\kappa_j^2 y_j\,\theta_j \pm \sum_{j=1}^{m}\frac{2\,t^2\,\kappa_j^4\,\theta_j^2\,\varepsilon^2}{1+2t\,\kappa_j^2\,\varepsilon^2}\right\}\right] d\,y \\
&= \exp\{t\,(z^2 - \tau_\varepsilon^2)\}\,\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\log(1 + 2\,t\,\kappa_j^2\,\varepsilon^2) + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\,t^2\,\kappa_j^4\,\theta_j^2\,\varepsilon^2}{1+2\,t\,\kappa_j^2\,\varepsilon^2}\right\}.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Заметим, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\log(1 + 2t\kappa_j^2\varepsilon^2) \asymp k_\varepsilon << \varepsilon^{-2}\tau_\varepsilon^2.$$

Легко видеть, что при условии $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\kappa_j^2\theta_j^2 = \mathrm{const}$ супремум по θ_j выражения под знаком второй экспоненты достигается, когда $\kappa^2\theta_1^2 = \tau_\varepsilon^2$.

Таким образом задача свелась к максимизации по t

$$\exp\Big\{t(z^2 - \tau_\varepsilon^2) + \frac{2t^2\kappa_\varepsilon^2\tau_\varepsilon^2\varepsilon^2}{1+2t\kappa_\varepsilon^2\varepsilon^2}\Big\}. \tag{7.2}$$

Прямыми вычислениями получаем, что максимум по t достигается для

$$2t = \varepsilon^{-2}\kappa_\varepsilon^{-2}(\tau_\varepsilon z^{-1} - 1). \tag{7.3}$$

Подставляя (7.3) в (7.2), получаем правую часть (3.10).

7.2. Доказательство теоремы 3.1. Тестовые статистики T_ε являются суммами независимых случайных величин. Поэтому к ним применимы стандартные рассуждения доказательства теоремы Крамера [14, 15]. Применительно к данной постановке задачи такие рассуждения были осуществлены в доказательстве леммы 4 в [4]. Если справедлива гипотеза, то рассуждения в доказательства теоремы 3.1 полностью совпадают с доказательством леммы 4 в [4]. Если имеет место альтернатива, отличия состоят только в оценке остаточных членов, возникающих при доказательстве леммы 4 в [4].

Такие отличия возникают в первую очередь в оценке остаточного члена в (3.51) в [4].

Если имеет место (3.7), то, используя $\varkappa_\varepsilon^2 \asymp \varepsilon^2 k_\varepsilon^{-1/2}$, получаем

$$\varepsilon^{-6} \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{\varepsilon j}^4\, \theta_{\varepsilon j}^2 \asymp \varepsilon^{-6}\, \varkappa_\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{\varepsilon j}^2\, \theta_{\varepsilon j}^2 \asymp k_\varepsilon^{-1/2}\, D_\varepsilon(S_\varepsilon), \tag{7.4}$$

или, в $\kappa_{\varepsilon j}$-обозначениях, (7.4) переписывается следующим образом

$$\varepsilon^{-6} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{\varepsilon j}^4\, \theta_{\varepsilon j}^2 \asymp \varepsilon^{-6}\, \kappa_\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{\varepsilon j}^2\, \theta_{\varepsilon j}^2 = o\left(\varepsilon^{-4}\, \kappa_\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{\varepsilon j}^4\right). \tag{7.5}$$

Используя (7.5), мы можем заменить остаточные члены в (3.53), (3.55)–(3.57) в [4] на множитель $(1 + o(1))$. Это позволяет заменить (3.43) в лемме 4 в [4] на (3.8).

Если имеет место (3.4), то

$$\begin{aligned}(B_\varepsilon(S_\varepsilon) - x_{\alpha_\varepsilon})\, \varepsilon^{-6} \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{\varepsilon j}^4\, \theta_{\varepsilon j}^2 &\asymp \varepsilon^{-2} \varkappa_\varepsilon^2 \left(\varepsilon^{-4} \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{\varepsilon j}^2\, \theta_{\varepsilon j}^2\right)^3 \\ &\asymp k_\varepsilon^{1/2} \left(\varepsilon^{-4} \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{\varepsilon j}^2\, \theta_{\varepsilon j}^2\right)^3 = o(1),\end{aligned} \tag{7.6}$$

или, в $\kappa_{\varepsilon j}$-обозначениях, мы имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-6} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{\varepsilon j}^4\, \theta_{\varepsilon j}^2 &\asymp \varepsilon^{-6}\, \kappa_\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{\varepsilon j}^2\, \theta_{\varepsilon j}^2 \\ &\asymp \varepsilon^{-6}\, \kappa_\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{\varepsilon j}^4 \asymp \varepsilon^{-6}\, k_\varepsilon\, \kappa_\varepsilon^6 = o(1).\end{aligned} \tag{7.7}$$

Используя (7.7), мы можем сохранить все оценки остаточных членов в доказательстве леммы 4 в [4] и получить, что эти оценки проходят и для доказательства (3.5).

Доказательство (3.3) и (3.6) получается аналогичными оценками. В указанных выше оценках достаточно положить $x_{\alpha_\varepsilon} = \varepsilon^{-4} \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa^2_{\varepsilon j}\, \theta^2_{\varepsilon j}$.

7.3. Доказательство теоремы 5.2. Покажем, что свойство *ii* в определении наибольшего множества верно. Проверка свойства *i* аналогична [6] и опускается.

Предположим противное. Тогда $S = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j\, \phi_j \notin \bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}$. Это означает, что найдется такая последовательность m_l, $m_l \to \infty$ при $l \to \infty$, что

$$m_l^{2s} \sum_{j=m_l}^{\infty} \tau_j^2 = C_l, \tag{7.8}$$

где $C_l \to \infty$ при $l \to \infty$.

Определим последовательность $\boldsymbol{\eta}_l = \{\eta_{lj}\}_{j=1}^{\infty}$, такую что $\eta_{lj} = 0$, если $j < m_l$, и $\eta_{lj} = \tau_j$, если $j \geqslant m_l$.

Положим $\widetilde{S}_l = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{lj}\, \phi_j$.

Для альтернатив $\widetilde{S}_l$ определим последовательность n_l, такую что

$$\|\boldsymbol{\eta}_l\|^2 \asymp \varepsilon_l^{4r} = n_l^{-2r} \asymp m_l^{-2s}\, C_l. \tag{7.9}$$

Тогда

$$n_l \asymp C_l^{-1/(2r)} m_l^{s/r} \asymp C_l^{-1/(2r)} m_l^{\frac{1}{2-4r-2\omega}}. \tag{7.10}$$

Отсюда получаем

$$m_l \asymp C_l^{(1-2r-\omega)/r}\, n_l^{2-4r-2\omega}. \tag{7.11}$$

В силу условия **A4**, (7.11) означает

$$\kappa^2_{n_l m_l} = o(\kappa^2_{n_l}). \tag{7.12}$$

Используя (5.1), **A2** и (7.12), получаем

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_l}(\boldsymbol{\eta}_l) &= n_l^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa^2_{\varepsilon_l j}\, \eta^2_{jl} \leqslant n_l^2\, \kappa^2_{\varepsilon_l m_l} \sum_{j=m_l}^{\infty} \theta^2_{n_l j} \\ &\asymp n_l^{2-2r}\, \kappa^2_{\varepsilon_l m_l} \asymp \varepsilon_l^{-4\omega}\, \kappa^2_{\varepsilon_l m_l}\, \kappa^{-2}_{\varepsilon_l} = o(\varepsilon_l^{-4\omega}). \end{aligned} \tag{7.13}$$

По теореме 3.1, (7.13) означает $\varepsilon^{-2\omega}$-LD-несостоятельность последовательности альтернатив $\widetilde{S}_l$.

7.4. Доказательство аналога Теоремы 5.2 для критериев, основанных на ядерных оценках. Пусть $S = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j\,\phi_j \notin \gamma U$ для всех $\gamma > 0$. Тогда найдется последовательность m_l, $m_l \to \infty$ при $l \to \infty$, такая что

$$m_l^{2s} \sum_{|j|\geqslant m_l}^{\infty} |\tau_j|^2 = C_l, \tag{7.14}$$

где $C_l \to \infty$ при $l \to \infty$.

Легко видеть, что мы можем определить последовательность m_l так, что

$$\sum_{m_l\leqslant|j|\leqslant 2m_l} |\tau_j|^2 \asymp \varepsilon_l^{4r} = n_l^{-2r} > \delta\, C_l\, m_l^{-2s}, \tag{7.15}$$

где δ, $0 < \delta < 1/2$, не зависит от l.

Определим последовательность $\boldsymbol{\eta}_l = \{\eta_{lj}\}_{j=-\infty}^{\infty}$, такую что $\eta_{lj} = \tau_j$, $|j| \geqslant m_l$, и $\eta_{lj} = 0$ в противном случае.

Обозначим

$$\widetilde{S}_l(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_{lj} \exp\{2\pi i j x\}.$$

Для альтернатив $\widetilde{S}_l(x)$ зададим последовательность n_l, такую что $\|\widetilde{S}_l(x)\| \asymp n_l^{-r}$.

Тогда

$$n_l \asymp C_l^{-1/(2r)}\, m_l^{s/r}.$$

Мы имеем $|\widehat{K}(\omega)| \leqslant \widehat{K}(0) = 1$ для всех $\omega \in R^1$ и $|\widehat{K}(\omega)| > c > 0$ для всех $|\omega| < b$. Следовательно, если мы положим $h_l = h_{n_l} = 2^{-1}b^{-1}m_l^{-1}$, то в силу (7.15), найдется $C > 0$, такая что для всех $h > 0$ имеет место

$$T_{\varepsilon_l}(\widetilde{S}_l, h_l) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{K}(jh_l)\,\eta_{lj}|^2 > C \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{K}(jh)\,\eta_{lj}|^2 = C T_{\varepsilon_l}(\widetilde{S}_l, h).$$

Следовательно, мы можем взять для дальнейших рассуждений $h = h_l$.

Используя (7.15), мы получаем

$$T_{\varepsilon_l}(\widetilde{S}_l) = \sum_{|j|>m_l} |\widehat{K}(jh_l)\,\eta_{lj}|^2 \asymp \sum_{j=m_l}^{2m_l} |\eta_{lj}|^2 \asymp n_l^{-2r}. \tag{7.16}$$

Если мы положим в оценках (7.10),(7.11), $k_l = [h_{\varepsilon_l}^{-1}]$ и $m_l = k_l$, то получим

$$h_{\varepsilon_l}^{1/2} \asymp C_l^{(2r-1+1)/(2r)}\, n_l^{2r-1+\omega}. \tag{7.17}$$

Используя (7.16) и (7.17), получаем

$$\varepsilon_l^{-2}\, T_{\varepsilon_l}(\widetilde{S}_l)\, h_{\varepsilon_l}^{1/2} \asymp C_l^{-(1-2r)/2}.$$

По теореме 6.2 это означает несостоятельность последовательности альтернатив $\widetilde{S}_l$.

Список литературы

1. P. J. Bickel, M. Rosenblatt, *On some global measures of deviation of density function estimates.* — Ann. Statist. **1** (1973), 1071–1095.
2. L. Comminges, A. Dalalyan, *Minimax testing of a composite null hypothesis defined via a quadratic functional in the model of regression.* — Electronic J. Statist. **7** (2013), 146—190.
3. M. C. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме.*— Теор. вероятн. и ее примен. **35** (1990), 704–715.
4. M. S. Ermakov, *Testing nonparametric hypothesis for small type* I *and type* II *error probabilities.* — Probl. Inform. Transmition **44** (2008), 54–73.
5. M. S. Ermakov, *Nonparametric signal detection with small type* I *and type* II *error probabilities.* — Statist. Inference Stoch. Processes **14** (2011), 1–19.
6. M. S. Ermakov, *On uniform consistency of nonparametric tests.* I. — J. Math. Sci. **258** (2021), 802—837.
7. M. C. Ермаков, *О равномерной состоятельности непараметрических критериев* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2022), 133–164.
8. J. Horowitz, V. Spokoiny, *An adaptive, rate-optimal test of a parametric mean-regression model against a nonparametric alternative.* — Econometrica **69** (2001), 599–631.
9. I. A. Ibragimov, R. Z. Has'minskii, *On the estimation of an infinitedimensional parameter in Gaussian white noise.* — Soviet Math. Dokl. **18** (1977), 1307–1309.
10. I. A. Ibragimov, R. Z. Has'minskii, *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*, Springer, N.Y. (1981).
11. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric goodness-of-fit testing under gaussian models.* — Lecture Notes in Statistics **169** Springer: N.Y. (2002).
12. G. Kerkyacharian, D. Picard, *Density estimation by kernel and wavelets methods: optimality of Besov spaces.* — Statist. Probab. Lett. **18** (1993), 327–336.
13. J. Neyman, *Smooth test for goodness of fit.* — Skand. Aktuarietidskr., **1–2** (1937), 149–199.
14. Л. В. Осипов, *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **17** (1972), 320—341.
15. В. В. Петров, *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **10** (1965), 310—322.

16. V. Rivoirard, *Maxisets for linear procedures.* — Statist. Probab. Lett. **67** (2004) 267–275.

Ermakov M. S. Nonparametric signal detection with small values of type I and type II error probabilities.

We consider problem of signal detection in Gaussian white noise. Test statistics are linear combinations of squares of estimators of Fourier coefficients or $\mathbb{L}_2$-norms of kernel estimators. We point out necessary and sufficient conditions when nonparametric sets of alternatives have a given rate of exponential decay for type II error probabilities.

Институт проблем машиноведения РАН и
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
Санкт-Петербург, Россия
Институт проблем машиноведения РАН
Большой пр. В.О., 61 Санкт-Петербург
Россия

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Университетский пр., 28, Петродворец
198504 Санкт-Петербург
Россия
E-mail: erm2512@gmail.com

Поступило 4 июля 2022 г.