Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

М. К. Досполова

СМЕШАННЫЙ ОБЪЕМ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

§1. Введение

1.1. Внутренние объемы. Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – непустое выпуклое компактное множество, $\dim K$ – размерность K (то есть размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего K). Одной из важнейших геометрических характеристик компакта K являются его *внутренние объемы* $V_0(K), \ldots, V_d(K)$, которые определяются как коэффициенты в формуле Штейнера (см., например, [20, соотношение 14.5])

$$\mathrm{Vol}_d(K + \lambda B^d) = \sum_{k=0}^{d} \kappa_{d-k} V_k(K) \lambda^{d-k}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{1}$$

где через $\mathrm{Vol}_d(\,\cdot\,)$ обозначен объем (d-мерная мера Лебега), B^k – это k-мерный единичный шар и $\kappa_k := \mathrm{Vol}_k(B^k) = \pi^{k/2}/\Gamma(\frac{k}{2}+1)$ – это объем B^k ($\kappa_0 := 1$). Другими словами, объем окрестности представляется многочленом, коэффициенты которого зависят от множества K.

Внутренние объемы играют важную роль в выпуклой геометрии (см., например, [19]). В частности, можно показать [20, раздел 6.2], что $V_d(\,\cdot\,)$ – это d-мерный объем, $V_{d-1}(\,\cdot\,)$ – половина площади поверхности для d-мерных выпуклых компактов, $V_1(\,\cdot\,)$ – средняя ширина с точностью до постоянного множителя и $V_0(\,\cdot\,) \equiv 1$.

Более того, нормировка в формуле (1) подобрана так, что внутренние объемы множества не зависят от размерности. Это означает, что при вложении K в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant d$ внутренние объемы будут такими же. Это наблюдение позволило Судакову [6] и Шеве [11] обобщить понятие внутреннего объема на случай бесконечномерного K следующим образом.

Ключевые слова: смешанные объемы, внутренние объемы, теорема Судакова, теорема Цирельсона, GB-множество, изонормальный процесс, естественная модификация, спираль Винера.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2022-289.

Пусть H – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Тогда для произвольного непустого выпуклого множества $K \subset H$ определим $V_k(K), k = 0, 1, \ldots$, формулой

$$V_k(K) = \sup_{K' \subset K} V_k(K') \in [0, \infty], \tag{2}$$

где супремум берется по всем конечномерным выпуклым компактным подмножествам K' в K.

В следующем подразделе сформулированы результаты, демонстрирующие глубокую связь между внутренними объемами некоторых выпуклых компактов и гауссовскими процессами.

1.2. Теоремы Судакова и Цирельсона. Будем называть центрированный гауссовский случайный процесс $(\xi(h))_{h\in H}$, параметрическим множеством которого является сепарабельное гильбертово пространство H, *изонормальным*, если его ковариационная функция имеет вид

$$\operatorname{cov}(\xi(h), \xi(g)) = \langle h, g\rangle,$$

где через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначено скалярное произведение на H.

В своей работе [6, предложение 14] В. Н. Судаков обнаружил связь между первым внутренним объемом и математическим ожиданием супремума гауссовского процесса.

Теорема 1 (Судаков)**.** *Для выпуклого компакта $K \subset H$*

$$V_1(K) = \sqrt{2\pi}\,\mathbf{E}\sup_{h\in K} \xi(h). \tag{3}$$

Позже Б. С. Цирельсон [9, теорема 6] обобщил теорему 1. Пусть

$$\{\xi_i(h)\colon h \in H\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

обозначают k независимых копий изонормального процесса. Тогда *k-мерный спектр* выпуклого компактного множества $K \subset H$ определяется как следующее случайное множество:

$$\operatorname{Spec}_k K := \{(\xi_1(h), \ldots, \xi_k(h))\colon h \in K\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Для формулировки результата Цирельсона нам предварительно потребуется понятие GB-множества. Подмножество K сепарабельного гильбертова пространства H называется *GB-множеством*, если существует модификация изонормального процесса с параметрическим множеством K, имеющая ограниченные почти наверное по модулю реализации (см. подробные определения и свойства в разделе 3). Известно [6, теорема 1], что свойство выпуклого K быть GB-множеством равносильно тому, что $V_1(K) < \infty$. В последнем случае $V_k(K) < \infty$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ (см., например, [11]).

Теорема 2 (Цирельсон)**.** *Для всех выпуклых компактных GB-множеств $K \subset H$ и всех $k = 0, 1, \ldots$*

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbf{E} \operatorname{Vol}_k(\operatorname{Spec}_k K). \tag{4}$$

Замечание 1. В случае, когда $K \subset \mathbb{R}^d$, $k \leqslant d$, последнюю формулу можно переписать в виде

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbf{E} \operatorname{Vol}_k(AK),$$

где A – стандартная гауссовская матрица размера $k \times d$ (то есть элементы A – независимые стандартные гауссовские случайные величины), $\operatorname{Spec}_k K = AK := \{Ax : x \in K\} \subset \mathbb{R}^k$.

Замечание 2. Строго говоря, в теореме 1 нам нужно наличие *сепарабельной* модификации у процесса ξ, а в теореме 2 – так называемой *естественной* модификации у ξ_i (подробнее см. в пунктах 3.3, 3.4). Мы покажем, что в условиях теорем 1, 2 соответствующие модификации действительно существуют (см. утверждение 1).

Основная цель данной работы – получить обобщение теоремы 2 на случай *смешанных объемов*, определенных в следующем подразделе.

1.3. Смешанные объемы. Минковский доказал [17], что для произвольных непустых выпуклых компактов $K_1, \ldots, K_s \subset \mathbb{R}^d$ функционал $\operatorname{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_s K_s)$ при $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geqslant 0$ является однородным многочленом степени d с неотрицательными коэффициентами:

$$\operatorname{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_s K_s) = \sum_{i_1=1}^{s} \cdots \sum_{i_d=1}^{s} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d} \widetilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}). \tag{5}$$

Коэффициенты $\widetilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d})$ являются однозначно определенными, если предположить, что они симметричны относительно перестановок $K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}$. Коэффициент $\widetilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d})$ называется *смешанным объемом* $K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}$.

Несложно понять (см., например, [19, параграф 5.1]), что внутренние объемы являются частными случаями смешанных, а именно, верна формула

$$V_k(K) = \frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}} \widetilde{V}_d(\underbrace{K, \dots, K}_{k \text{ раз}}, B^d, \dots, B^d). \tag{6}$$

Теория смешанных объемов находит широкое применение в выпуклой и алгебраической геометрии [1, глава 4], неравенствах [19] и теории гауссовских распределений [2]. Некоторые из свойств смешанных объемов приведены в подразделе 3.5.

Далее мы сформулируем основные результаты данной работы.

§2. Основные результаты

2.1. Обобщение теоремы Цирельсона. Для того чтобы обобщить теорему 2 на случай смешанных объемов, предварительно зададим изонормальный гауссовский случайный процесс согласно Цирельсону [8].

Рассмотрим линейное топологическое пространство с центрированной гауссовой мерой (E, γ) и его ядро $E_0 \subset E$ (определения и свойства см. в разделе 3). Поскольку ядро является гильбертовым пространством, то на E_0 задано скалярное произведение, которое мы будем обозначать через $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{E_0}$ (оно однозначно определяется мерой γ). Для каждого $\theta \in E_0$ линейный непрерывный по $\eta \in E_0$ функционал $\langle \theta, \eta \rangle_{E_0}$ имеет единственное (с точностью до совпадения почти всюду) продолжение до линейного измеримого по $x \in E$ функционала (см. [4, параграф 9, лемма 2] или [10, утверждение 2.10.8]), которое мы обозначим через $\langle \theta, x \rangle$; причем

$$\int_E \langle \theta, x \rangle^2 \gamma(dx) = \|\theta\|^2 = \langle \theta, \theta \rangle. \tag{7}$$

Тем самым, для всякого множества $K \subset E_0$ определен изонормальный гауссовский случайный процесс $\langle \theta, x \rangle$, где $\theta \in K$, а x пробегает пространство E, наделенное гауссовой мерой γ.

Для формулировки и доказательства основного результата мы будем использовать ядро E_0 в качестве H и процесс $\langle \theta, \cdot \rangle$ в качестве изонормального процесса.

Перепишем теорему 2 согласно обозначениям этого подраздела для дальнейшего удобства. Формула (4) для $k = 0, 1, \dots$ приобретает вид

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \int\limits_E \int\limits_E \dots \int\limits_E \mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K))\gamma(dx_1)\dots\gamma(dx_k).$$

Здесь $K \subset E_0$ – выпуклый GB-компакт,

$$\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K) := \{(\langle\theta, x_1\rangle, \dots, \langle\theta, x_k\rangle) : \theta \in K\} \subset \mathbb{R}^k$$

– совместный спектр для $x_1, \dots, x_k \in E$ на K.

Теперь введем понятие смешанного объема для бесконечномерных выпуклых множеств аналогично (2).

Пусть $K_1, \dots, K_k \subset H$ – непустые выпуклые подмножества бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства H. Тогда *смешанный объем* $\widetilde{V}(K_1, \dots, K_k)$ множеств $K_1, \dots, K_k$ определяется как

$$\widetilde{V}(K_1, \dots, K_k) = \sup_{K_i' \subset K_i} \frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}} \widetilde{V}_d(K_1', \dots, K_k', \underbrace{B^d, \dots, B^d}_{d-k \text{ раз}}), \tag{8}$$

где супремум берется по всем конечномерным выпуклым компактным подмножествам $K_i' \subset \mathbb{R}^d, K_i' \subset K_i, d \geqslant k, i = 1, \dots, k$.

Замечание 3. Нормировка в формуле (8) подобрана так, чтобы для $K_i : \dim K_i < \infty$ и $K_i \subset \mathbb{R}^d$, правая часть (8) не зависела от d, как и в выражении для внутреннего объема через смешанный (6). Поэтому определение $\widetilde{V}(K_1, \dots, K_k)$ корректно.

Доказательство замечания 3 можно найти в подразделе 4.

Все готово для формулировки основного результата работы.

Теорема 3. *Для выпуклых GB-компактов $K_i \subset E_0$, $i = 1, \dots, k$ и $k = 1, 2 \dots$,*

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(K_1, \dots, K_k) &= \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\ \mathbf{E}\ \widetilde{V}_k(\mathrm{Spec}_k K_1, \dots, \mathrm{Spec}_k K_k) \\ &= \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \int\limits_E \dots \int\limits_E \widetilde{V}_k(\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_1), \dots, \\ &\qquad \mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_k))\gamma(dx_1)\dots\gamma(dx_k).\end{aligned}$$

Замечание 4. GB-свойство множеств K_i обеспечивает ограниченность (и выпуклость) почти наверное множеств $\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_i)$.

Доказательство теоремы 3 приведено в подразделе 5. Далее представлен второй основной результат данной работы.

2.2. Пример: смешанный объем замкнутых выпуклых оболочек двух ортогональных спиралей Винера. Напомним для начала определение введенной Колмогоровым [3] *спирали Винера*, являющейся важным объектом функционального анализа [3].

Множество функций

$$\{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\colon t\in[0,1]\}\subset L^2[0,1]$$

называется *спиралью Винера*.

Напомним, что *выпуклой оболочкой* множества F называется наименьшее выпуклое множество, содержащее F.

Гао и Витале [14] вычислили внутренние объемы замкнутой выпуклой оболочки K спирали Винера:

$$V_k(K)=\frac{\kappa_k}{k!}=\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)k!}. \tag{9}$$

Вероятно это был первый результат, который давал формулу для внутренних объемов нетривиального бесконечномерного выпуклого компакта в явном виде. Позже аналогичные результаты появились и для других бесконечномерных выпуклых компактов [15].

В частности, из (9) следует, что $V_1(K)<\infty$, поэтому K является GB-множеством (см. теорему 7 в пункте 3.4).

Спираль Винера тесно связана с винеровским процессом. Пусть $\{W(t)\colon t\geqslant 0\}$ – стандартное броуновское движение. Рассмотрим двумерное стандартное броуновское движение

$$\{X^{(2)}(t)=(W_1(t),W_2(t))\colon t\geqslant 0\},$$

где $W_1(t),W_2(t)$ – независимые копии $W(t)$. Несложно понять, что Spec_2K по распределению совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой двумерного броуновского движения $\{X^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}$.

Пусть в $L^2[0,2]$ заданы две спирали Винера S_1 и S_2:

$$S_1=\{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\colon t\in[0,1]\}\subset L^2[0,2]$$

и

$$S_2=\{\mathbb{1}_{[1+t,2]}(\cdot)\colon t\in[0,1]\}\subset L^2[0,2].$$

Соответствующие им замкнутые выпуклые множества обозначим через K_1 и K_2.

В нашей следующей теореме мы вычисляем $\widetilde{V}(K_1, K_2)$.

Теорема 4. *Для замкнутых выпуклых оболочек* K_1 *и* K_2 *двух ортогональных спиралей Винера имеем*

$$\widetilde{V}(K_1, K_2) = 2.$$

В доказательстве теоремы 4 используется теорема 3 (см. раздел 6).

Закончим вводную часть описанием того, как организована статья. В следующем разделе собраны необходимые нам понятия, определения и факты из теории случайных процессов и выпуклой геометрии, которые дополняют сведения, представленные в двух первых разделах. В частности, в пункте 3.4 сформулировано и доказано вспомогательное к теореме 3 утверждение 1 об одной из интерпретаций GB-свойства выпуклых компактов. Разделы 4 и 5 содержат доказательства замечания 3 и основной теоремы 3 соответственно. Наконец, в разделе 6 доказана теорема 4.

§3. Предварительные сведения

3.1. Гауссовские векторы в линейных пространствах. Следуя [5, главы 1, 4] и [4, параграфы 8, 9], приведем определение и основные свойства гауссовского вектора в линейном пространстве.

Пусть E – линейное топологическое пространство, E^* – пространство линейных непрерывных функционалов на E. *Случайный вектор* X со значениями в E определяется как измеримое отображение из некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ в E. Вместе с этим предполагается, что соответствующая σ-алгебра пространства E является достаточно большой, чтобы все линейные непрерывные функционалы на E были измеримы относительно нее.

Случайный вектор $X \in E$ называется *гауссовским*, если $f(X)$ – нормальная случайная величина для всех $f \in E^*$.

Элемент $a \in E$ будем называть *математическим ожиданием* X, если $\mathbf{E}f(X) = f(a)$ для всех $f \in E^*$. Линейный оператор $C : E^* \to E$ называется *ковариационным оператором* вектора X, если для любых $f_1, f_2 \in E^*$

$$\operatorname{cov}(f_1(X), f_2(X)) = f_1(Cf_2),$$

где через $\operatorname{cov}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ обозначена ковариация случайных величин. Ковариационный оператор C обладает следующими свойствами:

(1) $f(Cg) = g(Cf)\ \ \forall f, g \in E^*$ (симметричность);

(2) $f(Cf) \geqslant 0 \ \ \forall f \in E^*$ (неотрицательная определенность).

Определение гауссовского вектора осмысленно, когда запас линейных непрерывных функционалов на E достаточно велик. Для этого будем всюду далее молчаливо предполагать, что E – локально выпуклое линейное топологическое пространство, а распределение вектора X является радоновой мерой. В таком случае у любого гауссовского вектора X существуют математическое ожидание и ковариационный оператор [4, параграф 8], которые однозначно определяют распределение X. Поэтому аналогично конечномерному случаю будем обозначать через $N(a, C)$ распределение гауссовского вектора X с математическим ожиданием a и ковариационным оператором C. При сделанных предположениях распределения всех гауссовских векторов имеют вид $N(a, C)$.

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда вектор X *центрированн*, то есть $a = 0$.

3.2. Измеримые линейные функционалы и ядро. Рассмотрим гауссовский вектор X со значениями в линейном пространстве E. Будем предполагать, что $a = 0$. Обозначим через $\gamma = N(0, C)$ распределение X в E.

По определению гауссовского вектора случайная величина $f(X)$ имеет нормальное распределение, поэтому

$$\mathbf{E} f^2(X) = \int\limits_E |f(x)|^2 \gamma(dx) < \infty.$$

Тем самым, задано каноническое вложение I^* пространства E^* в гильбертово пространство $L_2(E, \gamma)$. Замыкание образа $I^*(E^*)$ в $L_2(E, \gamma)$ будем называть пространством *измеримых линейных функционалов* и обозначать E^*_γ.

Скалярное произведение в E^*_γ наследуется из $L_2(E, \gamma)$:

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{E^*_\gamma} = \int\limits_E g_1(x) g_2(x) \gamma(dx) = \mathbf{E} g_1(X) g_2(X);$$
$$\|g\|^2_{E^*_\gamma} = \mathbf{E} g(X)^2.$$

Далее будем рассматривать оператор I^* как вложение $I^* : E^* \to E^*_\gamma$. Определим сопряженный к I^* оператор $I : E^*_\gamma \to E$ следующим соотношением:

$$f(Ig) = \langle I^* f, g\rangle_{E^*_\gamma} = \mathbf{E} f(X)g(X), \quad \forall f \in E^*, g \in E^*_\gamma.$$

Известно [5, параграф 4.1], что при предполагаемых в подразделе 3.1 условиях сопряженный оператор I существует, является линейным инъективным, и, более того, ковариационный оператор C имеет факторизацию

$$C = II^*.$$

Наконец, *ядро* определяется как множество $E_0 := I(E^*_\gamma) \subset E$, снабженное скалярным произведением

$$\langle \theta_1, \theta_2\rangle_{E_0} := \langle I^{-1}\theta_1, I^{-1}\theta_2\rangle_{E^*_\gamma}, \quad \theta_1, \theta_2 \in E_0,$$

и, следовательно, нормой

$$\|\theta\|^2 := \|\theta\|^2_{E_0} = \langle \theta, \theta\rangle_{E_0}, \quad \theta \in E_0.$$

Определение корректно, поскольку оператор I инъективен.

Таким образом, ядро однозначно определяется мерой γ и несет ключевую информацию о ней (см. [5]).

Отметим некоторые свойства ядра (см. [5, параграф 4.1]).

(1) $C(E^*) \subset E_0 \subset E$. Если ядро конечномерно, то в невырожденном случае эти три пространства совпадают, иначе все они различны.
(2) Если E_0 бесконечномерно, то $\gamma(E_0) = 0$.
(3) E_0 сепарабельно.
(4) Шары $\{\theta \in E_0 : \|\theta\| \leqslant R\},\ R > 0$, компактны в E.

3.3. Сепарабельные и естественные модификации процессов. Пусть имеются вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ и метрическое пространство T. Случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, называется *сепарабельным*, если существует не более чем счетное множество $S \subset T$ (*сепаранта* процесса) такое, что для любого открытого множества $U \subset T$ с вероятностью 1 верны равенства

$$\sup_{t\in U} \xi(t) = \sup_{t\in U\cap S} \xi(t), \quad \inf_{t\in U} \xi(t) = \inf_{t\in U\cap S} \xi(t).$$

Следующая теорема (см. [10, утверждение 2.6.5]) приводит достаточное условие существования сепарабельной модификации центрированного гауссовского процесса. Напомним, что случайный процесс

$(\eta(t))_{t\in T}$ является *модификацией* процесса $(\xi(t))_{t\in T}$, если эти процессы определены на одном и том же вероятностном пространстве и

$$\mathbf{P}\left(\xi(t)=\eta(t)\right)=1 \quad \text{для любого} \quad t\in T.$$

Реализацией процесса $(\xi(t))_{t\in T}$ называется функция $t\mapsto\xi(t,\omega)$ при некотором фиксированном $\omega\in\Omega$.

Теорема 5. *Рассмотрим центрированный гауссовский случайный процесс $(\xi(t))_{t\in T}$ на множестве T. Предположим, что T с полуметрикой $d(t,s)=\sqrt{\mathbf{E}\,|\xi(t)-\xi(s)|^2}$ сепарабельно. Тогда на том же вероятностном пространстве существует сепарабельный центрированный гауссовский случайный процесс $(\eta(t))_{t\in T}$ на T, такой что для любого фиксированного $t\in T$ $\xi(t)=\eta(t)$ почти наверное.*

Для доказательства теоремы 3 недостаточно наличия сепарабельной модификации у процесса $\langle\theta,x\rangle$. Нам потребуется так называемая *естественная* модификация, введенная Цирельсоном [7].

Модификация $(\eta(t))_{t\in T}$ процесса $(\xi(t))_{t\in T}$ называется *естественной*, если существует метрика ρ_1 на T, такая что (T,ρ_1) есть сепарабельное метрическое пространство и процесс $(\eta(t))_{t\in T}$ имеет почти наверное непрерывные на (T,ρ_1) реализации.

Ниже сформулирована теорема (см. [4, параграф 7] или [10, утверждения 2.6.3, 2.6.4]), позволяющая проверять наличие естественной модификации в терминах *осцилляционной* функции α.

Теорема 6. *Пусть имеются (T,ρ) – сепарабельное метрическое пространство и $(\xi(t))_{t\in T}$ – центрированный сепарабельный гауссовский процесс с непрерывной ковариационной функцией*

$$(t,s)\mapsto\mathbf{E}\ \xi(t)\xi(s).$$

Тогда существует неслучайная функция $\alpha:T\to[0,\infty]$, такая что с вероятностью 1 для всех $t\in T$

$$\alpha(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\{|\xi(u,\omega)-\xi(v,\omega)|,u,v\in B(t,\varepsilon)\},$$

где $B(t,\varepsilon)$ – открытый шар радиуса ε с центром в точке t.

Более того, если $\alpha(t)<\infty$ для всех $t\in T$, то процесс $(\xi(t))_{t\in T}$ имеет естественную модификацию.

3.4. GB-множества: эквивалентные определения и свойства. Как упоминалось во введении, GB-множеством называется подмножество K сепарабельного гильбертова пространства H, такое что существует модификация изонормального процесса с параметрическим множеством K, имеющая ограниченные почти наверное по модулю реализации.

В этом подразделе мы приведем формулировки результатов Судакова [6, теорема 1] и Цирельсона [7, теорема 3] об эквивалентных определениях GB-множества, а также докажем вспомогательное утверждение 1 о связи GB-свойства множества и осцилляционной функции соответствующего ему процесса.

Теорема 7 (Судаков)**.** *Пусть $K \subset H$ — выпуклое подмножество гильбертова пространства H. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *K – GB-множество;*
(2) *$V_1(K) < \infty$.*

Теорема 8 (Цирельсон)**.** *Пусть $K \subset H$ — подмножество гильбертова пространства H. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *гауссовский случайный процесс на множестве K имеет естественную модификацию;*
(2) *K – GB_σ-множество* (*счетное объединение GB-множеств*).

Утверждение 1. *Пусть $K \subset E_0$ – выпуклый GB-компакт. Тогда выполняется теорема* 6 *для $T = K$ со стандартной метрикой, порожденной скалярным произведением, и процесса $\langle \theta, \cdot \rangle$ на K. Тем самым, у процесса $\langle \theta, \cdot \rangle$ на K имеется естественная модификация.*

Более того, верно и обратное. Пусть для выпуклого компакта $K \subset E_0$ со стандартной метрикой выполнены все условия теоремы 6. *Тогда K – GB-множество, или, что то же самое, $V_1(K) < \infty$.*

Замечание 5. Отметим, что утверждение 1 можно вывести из теоремы 8. Тем не менее, для удобства читателя мы покажем альтернативное доказательство утверждения 1.

Замечание 6. Для существования сепарабельной модификации у процесса $\langle \theta, \cdot \rangle$ не требуется GB-свойство компакта K, как видно из доказательства ниже.

Доказательство утверждения 1. Для начала проверим наличие сепарабельной модификации у процесса $\langle \theta, x \rangle, \theta \in K$.

Используем теорему 5. Заметим, что для $\theta_1, \theta_2 \in K$

$$d(\theta_1,\theta_2) := \sqrt{\mathbf{E}|\langle\theta_1,x\rangle - \langle\theta_2,x\rangle|^2} = \sqrt{\mathbf{E}\left(\langle\theta_1,x\rangle^2 + \langle\theta_2,x\rangle^2 - 2\langle\theta_1,x\rangle\langle\theta_2,x\rangle\right)}$$
$$= \sqrt{\langle\theta_1,\theta_1\rangle + \langle\theta_2,\theta_2\rangle - 2\langle\theta_1,\theta_2\rangle} = \sqrt{\langle\theta_1-\theta_2,\theta_1-\theta_2\rangle} = \|\theta_1-\theta_2\|.$$

В третьем равенстве мы воспользовались свойством изонормальности процесса. Таким образом, полуметрика d совпадает с исходной метрикой на K и, следовательно, K сепарабельно с этой полуметрикой. Тогда по теореме 5 не умаляя общности, можем считать, что процесс $\langle\theta,\cdot\rangle$ сепарабелен.

Теперь необходимо проверить непрерывность ковариационной функции.

Пусть $(\theta_1,\theta_2) \in K \times K$ и $\|\theta_1^n - \theta_1\| \to 0$, $\|\theta_2^n - \theta_2\| \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что

$$\mathbf{E}\langle\theta_1^n,x\rangle\langle\theta_2^n,x\rangle = \int\limits_E \langle\theta_1^n,x\rangle\langle\theta_2^n,x\rangle\gamma(dx)$$
$$\to \int\limits_E \langle\theta_1,x\rangle\langle\theta_2,x\rangle\gamma(dx) = \mathbf{E}\langle\theta_1,x\rangle\langle\theta_2,x\rangle.$$

Действительно, по свойству изонормальности процесса и неравенству Коши

$$\left|\int\limits_E \langle\theta_1^n,x\rangle\langle\theta_2^n,x\rangle\gamma(dx) - \int\limits_E \langle\theta_1,x\rangle\langle\theta_2,x\rangle\gamma(dx)\right| = |\langle\theta_1^n,\theta_2^n\rangle - \langle\theta_1,\theta_2\rangle|$$
$$\leqslant |\langle\theta_1^n-\theta_1,\theta_2\rangle| + |\langle\theta_1^n-\theta_1,\theta_2^n-\theta_2\rangle| + |\langle\theta_2^n-\theta_2,\theta_1\rangle|$$
$$\leqslant \|\theta_1^n-\theta_1\|\|\theta_2\| + \|\theta_1^n-\theta_1\|\|\theta_2^n-\theta_2\| + \|\theta_2^n-\theta_2\|\|\theta_1\|.$$

Устремляя $n \to \infty$ в последнем равенстве, получаем требуемое.

Наконец, убедимся в том, что осцилляционная функция α, введенная в теореме 6, конечна в случае, когда K является выпуклым GB-компактом.

$V_1(K) < \infty$ по теореме 7. Нам понадобится формула (3) для $V_1(K)$:

$$V_1(K) = \sqrt{2\pi}\int\limits_E (\sup_{\theta\in K}\langle\theta,x\rangle)\gamma(dx).$$

Предположим, что существуют $\theta \in K, E_1 \subset E, \gamma(E_1) > 0$, такие что при $x \in E_1$

$$\alpha(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{|\langle \theta_1, x\rangle - \langle \theta_2, x\rangle|, \theta_1, \theta_2 \in B(\theta, \varepsilon)\} = \infty.$$

Поскольку при $x \in E_1$

$$\infty = \alpha(\theta) \leqslant 2 \sup_{\theta \in K} |\langle \theta, x\rangle|,$$

и $\sup_{\theta \in K} -\langle \theta, x\rangle = \sup_{\theta \in K}\langle \theta, -x\rangle$, распределение γ симметрично, мы получаем противоречие с конечностью $V_1(K)$. Значит, $\alpha(\theta) < \infty$.

Обратно, допустим, что $\alpha(\theta) < \infty$ для всех $\theta \in K$. Докажем, что в этом случае

$$\gamma(x \in E : \sup_{\theta \in K} |\langle \theta, x\rangle| < \infty) = 1.$$

Зафиксируем $x \in E_1$, где $E_1 \subset E$ – это множество полной меры, на котором $\alpha(\theta) < \infty$ при всех $\theta \in K$.

Для каждого $\theta \in K$ выберем такие $\widetilde{\varepsilon}(\theta), M(\theta) < \infty$, что

$$\sup\{|\langle \theta_1, x\rangle - \langle \theta_2, x\rangle|, \theta_1, \theta_2 \in B(\theta, \widetilde{\varepsilon}(\theta))\} < M(\theta). \tag{10}$$

Рассмотрим покрытие K шарами $\{B(\theta, \widetilde{\varepsilon}(\theta))\}_{\theta \in K}$. Поскольку K – компакт, можно выбрать конечное подпокрытие K вида

$$\{B(\theta^i, \widetilde{\varepsilon}(\theta^i))\}_{i=1}^N = \{B_i\}_{i=1}^N.$$

Тогда по линейности процесса $\langle \theta, \cdot\rangle$ и соотношению (10)

$$\begin{aligned}\sup_{\theta \in K} |\langle \theta, x\rangle| &= \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \sup_{\theta \in B_i} |\langle \theta - \theta^i, x\rangle + \langle \theta^i, x\rangle| \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\langle \theta^i, x\rangle| + \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \sup_{\theta \in B_i} |\langle \theta - \theta^i, x\rangle| \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\langle \theta^i, x\rangle| + \max_{1 \leqslant i \leqslant N} M(\theta^i) < \infty.\end{aligned}$$

Так как последнее неравенство выполнено для всех $x \in E_1$ по нашему предположению и $\gamma(E_1) = 1$, то $\gamma(x \in E : \sup_{\theta \in K} |\langle \theta, x\rangle| < \infty) = 1$.

Тем самым, K является GB-множеством. Тогда по теореме 7 получаем, что $V_1(K) < \infty$.

Таким образом, утверждение доказано. $\square$

3.5. Свойства смешанных объемов. Отметим основные свойства определенных во введении смешанных объемов, некоторые из которых нам понадобятся при доказательстве теоремы 3. Для более подробного ознакомления с теорией смешанных объемов мы отсылаем читателя к [1, глава 4] и [19, глава 5].

(1) $\widetilde{V}_d(K,\dots,K)=\mathrm{Vol}_d(K)$.

(2) Независимость от порядка аргументов:
$$\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_d)=\widetilde{V}_d(K_{\sigma_1},\dots,K_{\sigma_d}),$$
где σ – произвольная перестановка чисел $1,\dots,d$.

(3) Полилинейность:
$$\widetilde{V}_d(\lambda K_1+\lambda' K_1',K_2\dots,K_d)$$
$$=\lambda\widetilde{V}_d(K_1,K_2\dots,K_d)+\lambda'\widetilde{V}_d(K_1',K_2\dots,K_d)\ \text{при}\ \lambda,\lambda'\geqslant 0.$$

(4) Инвариантность относительно параллельных переносов:
$$\widetilde{V}_d(K_1+a_1,\dots,K_d+a_d)=\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_d)$$
для любых $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{R}^d$.

(5) Инвариантность по отношению к унимодулярным аффинным преобразованиям O:
$$\widetilde{V}_d(OK_1,\dots,OK_d)=\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_d).$$

(6) Монотонность по каждому аргументу: пусть $K_i,L_i,i=1,\dots,d$, – выпуклые компакты, при этом $K_i\subset L_i$. Тогда
$$\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_d)\leqslant\widetilde{V}_d(L_1,\dots,L_d).$$
Из этого свойства следует неотрицательность смешанных объемов.

(7) Аддитивность: если $A,B,A\cup B\subset\mathbb{R}^d$ – непустые выпуклые компакты, то
$$\widetilde{V}_d(\underbrace{A\cup B,\dots,A\cup B}_{i\ \text{раз}},K_{i+1},\dots,K_d)=\widetilde{V}_d(A,\dots,A,K_{i+1},\dots,K_d)$$
$$+\ \widetilde{V}_d(B,\dots,B,K_{i+1},\dots,K_d)-\widetilde{V}_d(A\cap B,\dots,A\cap B,K_{i+1},\dots,K_d).$$

(8) Смешанные объемы непрерывны по каждому из K_i и их совокупности в метрике Хаусдорфа d_H ($d_H(K_1,K_2):=\inf\{\varepsilon\geqslant 0:K_1\subset K_2+\varepsilon B^d$ и $K_2\subset K_1+\varepsilon B^d\}$).

§4. Доказательство замечания 3

Пусть $K_i \subset \mathbb{R}^d$. Достаточно доказать, что

$$\frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}} \widetilde{V}_d(K_1, \ldots, K_k, B^d, \ldots, B^d)$$
$$= \frac{\binom{d+1}{k}}{\kappa_{d+1-k}} \widetilde{V}_{d+1}(K_1, \ldots, K_k, B^{d+1}, \ldots, B^{d+1}).$$

В самом деле, по формуле Минковского (5)

$$\mathrm{Vol}_{d+1}(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_k K_k + \lambda B^{d+1})$$
$$= \int_{-\lambda}^{\lambda} \mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_k K_k + \sqrt{\lambda^2 - z^2} B^d) dz$$
$$= \int_{-\lambda}^{\lambda} \sum_{i_1=1}^{k+1} \cdots \sum_{i_d=1}^{k+1} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d} \widetilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}) dz,$$

здесь $\lambda_{i_j} \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \sqrt{\lambda^2 - z^2}\}; K_{i_j} \in \{K_1, \ldots, K_k, B^d\}$.

Теперь посмотрим на коэффициент в левой и правой частях полученного равенства при мономе $\lambda_1 \cdots \lambda_k$.

С одной стороны, по формуле Минковского (5), примененной к левой части, получаем коэффициент

$$k!\, \widetilde{V}_{d+1}(K_1, \ldots, K_k, B^{d+1}, \ldots, B^{d+1}) \binom{d+1}{k} \lambda^{d+1-k}.$$

С другой стороны, в правой части, коэффициент при $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ равен

$$k!\, \widetilde{V}_d(K_1, \ldots, K_k, B^d, \ldots, B^d) \binom{d}{k} \int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{(\lambda^2 - z^2)}^{d-k} dz.$$

Заметим, что

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{(\lambda^2 - z^2)}^{d-k} dz = \lambda^{d+1-k} \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 - z^2)}^{d-k} dz = \lambda^{d+1-k} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d-k}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{d-k+3}{2})}.$$

Приравняем полученные коэффициенты:

$$k!\,\widetilde{V}_{d+1}(K_1,\dots,K_k,B^{d+1},\dots,B^{d+1})\binom{d+1}{k}\lambda^{d+1-k}$$
$$= k!\,\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_k,B^d,\dots,B^d)\binom{d}{k}\lambda^{d+1-k}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{(1-z^2)}^{d-k}dz.$$

Учитывая значение $\kappa_k := \pi^{k/2}/\Gamma(\frac{k}{2}+1)$ и последнее равенство, мы имеем

$$\binom{d+1}{k}\widetilde{V}_{d+1}(K_1,\dots,K_k,B^{d+1},\dots,B^{d+1})\kappa_{d-k}$$
$$= \binom{d}{k}\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_k,B^d,\dots,B^d)\kappa_{d+1-k},$$

что и требовалось доказать.

§5. Доказательство теоремы 3

Разобьем доказательство теоремы на два случая.

Случай 1. $\dim K_i < \infty$ для всех $i = 1,\dots,k$. В этом случае утверждение теоремы 3 с учетом замечаний 1, 3 можно переписать в следующем виде.

Утверждение 2. *Для $K_1,\dots,K_k \subset \mathbb{R}^d, k = 1,\dots,d$ верна формула*

$$\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_k,B^d,\dots,B^d) = c_{k,d}\mathbf{E}\,\widetilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k),$$

где $c_{k,d} = \frac{\kappa_{d-k}(2\pi)^{k/2}}{k!\binom{d}{k}\kappa_k}$, $AK_i := \{Ax : x \in K_i\} \subset \mathbb{R}^k$ и A – стандартная гауссовская матрица размера $k \times d$.

Доказательство утверждения 2. Посмотрим на

$$\mathrm{Vol}_d\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i K_i + (d-1)\lambda B^d\right).$$

По теореме Минковского (5)

$$\operatorname{Vol}_d\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i K_i+(d-1)\lambda B^d\right)$$
$$=\sum_{i_1=1}^{d+k-1}\cdots\sum_{i_d=1}^{d+k-1}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_d}\widetilde{V}_d(K_{i_1},\dots,K_{i_d}),\quad (11)$$

где $\lambda_{i_j}\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\lambda\}$; $K_{i_j}\in\{K_1,\dots,K_k,B^d\}$. Следовательно, в сумме справа коэффициент при λ^{d-k} – это многочлен от $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, причем коэффициент при $\lambda^{d-k}\alpha_1\cdots\alpha_k$ равен

$$k!\binom{d}{k}\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_k,B^d,\dots,B^d).$$

С другой стороны, рассматривая $T:=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i K_i$, по теореме Минковского (5) имеем

$$\operatorname{Vol}_d(T+(d-1)\lambda B^d)=\sum_{i_1=1}^{d}\cdots\sum_{i_d=1}^{d}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_d}\widetilde{V}_d(K_{i_1},\dots,K_{i_d}),\quad (12)$$

где $\lambda_{i_j}\in\{1,\lambda\}$; $K_{i_j}\in\{T,B^d\}$. В таком случае, поскольку смешанные объемы симметричны относительно перестановок аргументов, коэффициент при λ^{d-k} будет равен

$$\binom{d}{k}\widetilde{V}_d(\underbrace{T,\dots,T}_{k\text{ раз}},B^d,\dots,B^d).$$

Далее,

$$\widetilde{V}_d(\underbrace{T,\dots,T}_{k\text{ раз}},B^d,\dots,B^d)\overset{(6)}{=}\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}}V_k(T)=\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}}V_k\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i K_i\right)$$
$$\overset{(4)}{=}\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}}\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbf{E}\operatorname{Vol}_k\left(A\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i K_i\right)\right)$$
$$=\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}}\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbf{E}\operatorname{Vol}_k\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i A K_i\right).$$

Снова применяя теорему Минковского (5), заключаем, что $\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i AK_i\right)$ – однородный многочлен степени k от $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ с коэффициентом

$$k!\;\mathbf{E}\,\widetilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k)$$

при $\alpha_1\cdots\alpha_k$.

Таким образом, в правой части (12) коэффициент при $\lambda^{d-k}\alpha_1\cdots\alpha_k$ равен

$$\kappa_{d-k}\frac{(2\pi)^{k/2}}{\kappa_k}\mathbf{E}\,\widetilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k).$$

Итак, левые части формул (11) и (12) совпадают. Значит, в правых частях равны коэффициенты при $\lambda^{d-k}\alpha_1\cdots\alpha_k$:

$$k!\binom{d}{k}\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_k,B^d,\dots,B^d)=\kappa_{d-k}\frac{(2\pi)^{k/2}}{\kappa_k}\mathbf{E}\,\widetilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k),$$

$$\widetilde{V}_d(K_1,\dots,K_k,B^d,\dots,B^d)=\frac{\kappa_{d-k}(2\pi)^{k/2}}{k!\binom{d}{k}\kappa_k}\mathbf{E}\,\widetilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k),$$

что и требовалось доказать.

$\square$

Случай 2. $\dim K_i=\infty$ хотя бы для одного $i=1,\dots,k$.

По утверждению 1 GB-свойство компактов K_i влечет наличие естественной модификации у процессов $\langle\theta,x\rangle,\theta\in K_i$.

Далее сведем случай 2 к конечномерному (утверждение 2). Пусть $K_{1,1}\subset K_{1,2}\subset\ldots\subset K_1,\ K_{2,1}\subset K_{2,2}\subset\ldots\subset K_2,\dots,\ K_{k,1}\subset K_{k,2}\subset\ldots\subset K_k$. Здесь $K_{i,j}$ – конечномерные выпуклые компакты, причем $\cup_{j=1}^{\infty}K_{i,j}$ плотно в K_i. Тогда по определению (8) и по свойствам 6, 8 смешанных объемов получаем, что

$$\widetilde{V}(K_1,\dots,K_k)=\lim_{j\to\infty}\widetilde{V}(K_{1,j},\dots,K_{k,j}).$$

Теперь сформулируем лемму, доказанную Цирельсоном в [9].

Лемма 1. *Пусть имеется естественная модификация $\xi(t,\omega)$ некоторого случайного процесса, $\omega\in\Omega$, $t\in T$, и $S\subset T$ плотно в следующем смысле: для любого $t\in T$ найдутся такие $s_n\in S$, $n=1,2,\dots$, что $\xi(s_n,\omega)\to\xi(t,\omega)$ при $n\to\infty$ для почти всех ω (соответствующее множество вероятности 1, вообще говоря, зависит от t). Тогда существует множество $\Omega_0\subset\Omega$ вероятности 1, обладающее* *следующим свойством: для любого* $t \in T$ *найдутся такие* $s_n^{'} \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, *что* $\xi(s_n^{'}, \omega) \to \xi(t, \omega)$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $\omega \in \Omega_0$.

Следствие 1. *Пусть* $K \subset E_0$ *– выпуклое компактное* GB*-множество. Если* $K_0 \subset K$ *плотно в* K*, то для почти всех* $(x_1, \ldots, x_k)$ *множество* $\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | K_0)$ *плотно в* $\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | K)$.

Приведенное следствие сформулировано в [9] без доказательства. Для удобства читателя мы докажем следствие 1 ниже.

Доказательство следствия 1. Поскольку K_0 плотно в K в обычном смысле, для любого $\theta \in K$ существуют $s_n \in K_0$, $n = 1, 2, \ldots$, такие что $\|s_n - \theta\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, по свойству (7) при $n \to \infty$

$$\int\limits_E \langle s_n - \theta, x\rangle^2 \gamma(dx) = \|s_n - \theta\|^2 \to 0.$$

Таким образом, последовательность $\langle s_n - \theta, x\rangle^2$ сходится к 0 по вероятности. Тогда мы можем извлечь подпоследовательность (будем ее обозначать также s_n), такую что $\langle s_n - \theta, x\rangle^2$ сходится к 0 почти наверное (соответствующее множество вероятности 1 зависит от θ).

Так как $K \subset E_0$ является выпуклым GB-компактом, гауссовский процесс $\langle \theta, x\rangle$ имеет естественную модификацию по утверждению 1. Значит, по лемме 1 для любого $\theta \in K$ существуют такие $s_n' \in K_0$, что при $n \to \infty$

$$\langle s_n', x\rangle \to \langle \theta, x\rangle \tag{13}$$

для почти всех x, причем соответствующее множество вероятности 1 общее для всех $\theta \in K$.

Тогда можно заключить, что множество

$$\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | K_0) = \{(\langle \theta, x_1\rangle, \ldots, \langle \theta, x_k\rangle) : \theta \in K_0\} \subset \mathbb{R}^k$$

для почти всех $(x_1, \ldots, x_k)$ плотно в множестве

$$\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | K) = \{(\langle \theta, x_1\rangle, \ldots, \langle \theta, x_k\rangle) : \theta \in K\} \subset \mathbb{R}^k,$$

поскольку из вышесказанного следует покоординатная плотность (13), при этом соответствующее множество вероятности 1 в $\mathbb{R}^k$ тоже будет общим для всех $\theta \in K$.

$\square$

Используя следствие 1, получаем, что почти наверное

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k | K_{i,j})$$

плотно в $\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k | K_i)$.

Тогда воспользуемся результатом утверждения 2 для конечномерных $K_{i,j}$:

$$\widetilde{V}(K_1, \dots, K_k) = \lim_{j\to\infty} \widetilde{V}(K_{1,j}, \dots, K_{k,j}) = \lim_{j\to\infty} \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}$$

$$\times \int\limits_E \dots \int\limits_E \widetilde{V}_k(\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_{1,j}), \dots, \mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_{k,j}))\gamma(dx_1)\dots\gamma(dx_k)$$

$$= \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}$$

$$\times \int\limits_E ... \int\limits_E \lim_{j\to\infty} \widetilde{V}_k(\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_{1,j}), ..., \mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_{k,j}))\gamma(dx_1)...\gamma(dx_k)$$

$$= \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}$$

$$\times \int\limits_E \dots \int\limits_E \widetilde{V}_k(\mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_1), \dots, \mathrm{Spec}(x_1, \dots, x_k|K_k))\gamma(dx_1)\dots\gamma(dx_k).$$

Здесь в третьем равенстве мы воспользовались теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Последнее равенство также следует из свойств 6, 8 смешанных объемов и следствия 1.

Таким образом, теорема 3 доказана.

§6. Доказательство теоремы 4

Поскольку K_1 и K_2 являются GB-компактами, мы можем применить теорему 3 для $k = 2$:

$$\widetilde{V}(K_1, K_2) = \frac{2\pi}{2\kappa_2}\, \mathbf{E}\, \widetilde{V}_2(\mathrm{Spec}_2 K_1, \mathrm{Spec}_2 K_2).$$

Так как $\kappa_2 = \pi$, то

$$\widetilde{V}(K_1, K_2) = \mathbf{E}\, \widetilde{V}_2(\mathrm{Spec}_2 K_1, \mathrm{Spec}_2 K_2)$$

$$= \mathbf{E}\, \widetilde{V}_2 \left(\mathrm{conv}\left(\{X_1^{(2)}(t) \colon t \in [0,1]\}\right), \mathrm{conv}\left(\{X_2^{(2)}(t) \colon t \in [0,1]\}\right)\right), \quad (14)$$

где $X_1^{(2)}(t)$, $X_2^{(2)}(t)$ – независимые двумерные стандартные броуновские движения, а через $\mathrm{conv}(F)$ обозначена замкнутая выпуклая оболочка множества F.

Таким образом, наша задача сводится к нахождению средней смешанной площади $\mathbf{E}\,\widetilde{V}_2$ замкнутых выпуклых оболочек независимых двумерных броуновских движений на $[0,1]$.

Далее для вычисления мы будем использовать аналог приведенной в [16] техники, основными инструментами которой являются опорная функция кривой и связанные с ней формулы Коши.

Пусть C – произвольная замкнутая гладкая выпуклая кривая на плоскости. Представим кривую C в виде:

$$C = \{(x(s), y(s))\}, \ s \in C.$$

Теперь введем понятие опорной функции кривой C.

Для $\varphi \in [0, 2\pi)$ значение *опорной функции* $M(\varphi)$ кривой C определяется формулой

$$M(\varphi) = \max_{s \in C}\{x(s)\cos\varphi + y(s)\sin\varphi\}.$$

Формулы Коши (см., например, [16, с. 48–49]) позволяют выразить длину L кривой C и площадь A фигуры, ограниченной кривой C, через опорную функцию:

$$L = \int_0^{2\pi} M(\varphi)\,d\varphi, \tag{15}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big((M(\varphi))^2 - (M'(\varphi))^2\big)\,d\varphi. \tag{16}$$

В случае, когда кривая C является случайной (например, граница замкнутой выпуклой оболочки плоского броуновского движения, эта кривая почти наверное гладкая [12]), $M(\varphi)$ и $M'(\varphi)$ – случайные величины.

Взяв математическое ожидание от обеих частей формул (15), (16), получаем

$$\mathbf{E}L = \int_0^{2\pi} \mathbf{E}M(\varphi)\,d\varphi, \tag{17}$$

$$\mathbf{E}A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\mathbf{E}(M(\varphi))^2 - \mathbf{E}(M'(\varphi))^2\right) d\varphi. \tag{18}$$

Заметим, что распределение плоского броуновского движения инвариантно относительно вращений, следовательно, распределение опорной функции $M(\varphi)$ не зависит от φ. Поэтому достаточно рассмотреть $\varphi = 0, M(\varphi) \equiv M(0)$. Формулы (17), (18) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}L = 2\pi\ \mathbf{E}M(0),\\ &\mathbf{E}A = \pi\left(\mathbf{E}(M(0))^2 - \mathbf{E}(M'(0))^2\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Аналогом формул Коши для вычисления смешанной площади двух выпуклых компактов F_1, F_2 на плоскости с гладкой границей является следующее соотношение (см., например, [18, с. 4–5]):

$$\widetilde{V}_2(F_1, F_2) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(M_1(\varphi)M_2(\varphi) - M_1'(\varphi)M_2'(\varphi)\right) d\varphi,$$

где M_1, M_2 – опорные функции кривых, представляющих границы F_1, F_2 соответственно.

Для случайных F_1, F_2 аналогично соотношению (18) получаем

$$\mathbf{E}\ \widetilde{V}_2(F_1, F_2) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\mathbf{E}(M_1(\varphi)M_2(\varphi)) - \mathbf{E}(M_1'(\varphi)M_2'(\varphi))\right) d\varphi. \tag{20}$$

Теперь рассмотрим в качестве F_1 и F_2 интересующие нас $\operatorname{conv}\left(\{X_1^{(2)}(t)\colon t \in [0,1]\}\right)$ и $\operatorname{conv}\left(\{X_2^{(2)}(t)\colon t \in [0,1]\}\right)$. По формуле (20) и независимости $X_1^{(2)}(t)$ и $X_2^{(2)}(t)$ имеем

$$\mathbf{E}\,\widetilde{V}_2\left(\operatorname{conv}\left(\{X_1^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}\right),\operatorname{conv}\left(\{X_2^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\mathbf{E}M_1(\varphi)\mathbf{E}M_2(\varphi)-\mathbf{E}M_1'(\varphi)\mathbf{E}M_2'(\varphi)\right)d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\,2\pi\left((\mathbf{E}M_1(0))^2-(\mathbf{E}M_1'(0))^2\right)=\pi\left((\mathbf{E}M_1(0))^2-(\mathbf{E}M_1'(0))^2\right). \quad (21)$$

Здесь второе равенство следует из соотношения (19) и того, что M_1 и M_2 одинаково распределены.

Тем самым, нам остается вычислить $\mathbf{E}M_1(0)$ и $\mathbf{E}M_1'(0)$, где M_1 – опорная функция границы выпуклой оболочки стандартного плоского броуновского движения на $[0,1]$.

Вспомним, что

$$\{X^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}=\{(W_1(t),W_2(t))\colon t\in[0,1]\},$$

где $W_1(t),W_2(t)$ – независимые стандартные одномерные броуновские движения.

Зафиксируем направление φ. При $t\in[0,1]$ рассмотрим проекции на направление φ и перпендикулярное ему:

$$z_\varphi(t)=W_1(t)\cos\varphi+W_2(t)\sin\varphi,$$
$$h_\varphi(t)=-W_1(t)\sin\varphi+W_2(t)\cos\varphi.$$

Тогда z_φ и h_φ – независимые стандартные одномерные броуновские движения на $[0,1]$.

Таким образом, опорная функция

$$M_1(\varphi)=\max_{t\in[0,1]}z_\varphi(t)$$

является максимумом одномерного броуновского движения z_φ на $[0,1]$.

Пусть $t^*\in[0,1]$ – момент времени, в который достигается этот максимум. Тогда

$$M_1(\varphi)=z_\varphi(t^*)=W_1(t^*)\cos\varphi+W_2(t^*)\sin\varphi. \quad (22)$$

Дифференцируя (22) по φ, имеем

$$M_1'(\varphi)=-W_1(t^*)\sin\varphi+W_2(t^*)\cos\varphi=h_\varphi(t^*).$$

Другими словами, $M_1(\varphi)$ – максимум первого броуновского движения z_φ, а $M_1'(\varphi)$ соответствует значению второго независимого броуновского движения h_φ в момент времени t^*, когда первое достигает своего максимума.

В частности, при $\varphi = 0$, $z_0(t) = W_1(t)$, $h_0(t) = W_2(t)$, и

$$M_1(0) = \max_{t\in[0,1]} W_1(t),$$
$$M_1'(0) = W_2(t^*).$$

Функция распределения максимума одномерного броуновского движения на $[0,1]$ хорошо известна (см., например, [13]), а именно:

$$F(m) = \mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,1]} W_1(t) \leqslant m\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right),$$

где $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-u^2}\,du$. Первый момент данного распределения легко вычисляется:

$$\mathbf{E}M_1(0) = \mathbf{E}\max_{t\in[0,1]} W_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{23}$$

Покажем теперь, что

$$\mathbf{E}M_1'(0) = \mathbf{E}W_2(t^*) = 0. \tag{24}$$

Действительно, так как t^* и $W_2(t)$ независимы, то

$$\mathbf{E}M_1'(0) = \mathbf{E}W_2(t^*) = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_1(x,t) dx\ p_2(t) dt. \tag{25}$$

Здесь через p_1 обозначена плотность нормального распределения $N(0,t)$ в предположении, что $t^* = t$, а через p_2 – плотность случайной величины t^* (явную формулу для p_2 можно найти в [16]). Поскольку при фиксированном $t \in [0,1]$ внутренний интеграл в (25) равен 0, то $\mathbf{E}M_1'(0) = 0$.

Комбинируя (14), (21), (23) и (24), получаем

$$\widetilde{V}(K_1,K_2) = \pi\left((\mathbf{E}M_1(0))^2 - (\mathbf{E}M_1'(0))^2\right) = 2.$$

Благодарности. Автор благодарит Дмитрия Запорожца за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

1. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Геометрические неравенства.* Наука, 1980.
2. Д. Н. Запорожец, З. Каблучко, *Случайные определители, смешанные объемы эллипсоидов и нули гауссовских случайных полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **408** (2012), 187–196.
3. А. Н. Колмогоров, *Математика и механика: избранные труды.* Наука, 1985.
4. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* Издательство ТВиМС, Киев, 1995.
5. М. А. Лифшиц, *Лекции по гауссовским процессам.* Издательство Лань, 2016.
6. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. — Труды МИАН* **141** (1976), 3–191.
7. Б. С. Цирельсон, *Естественная модификация случайного процесса и ее приложение к случайным функциональным рядам и гауссовским мерам.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **55** (1976), 35–63.
8. Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **27**, No. 2 (1982), 388–395.
9. Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига.* II. — Теория вероятн. и ее примен. **30**, No. 4 (1985), 772–779.
10. V. I. Bogachev, *Gaussian Measures*, Vol. **62** of *Math. Surveys Monogr.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
11. S. Chevet, *Processus Gaussiens et volumes mixtes.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete **36**, No. 1 (1976), 47–65.
12. M. El Bachir, *L'enveloppe convexe du mouvement brownien.* PhD thesis, 1983.
13. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. II. John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, second edition, 1971.
14. F. Gao, R. A. Vitale, *Intrinsic volumes of the Brownian motion body.* — Discrete Comput. Geom. **26**, No. 1 (2001), 41–50.
15. Z. Kabluchko, D. N. Zaporozhets, *Intrinsic volumes of Sobolev balls with applications to Brownian convex hulls.* — Trans. Amer. Math. Soc. **368**, No. 12 (2016), 8873–8899.
16. S. N. Majumdar, A. Comtet, J. Randon-Furling, *Random Convex hulls and extreme value statistics.* — J. Stat. Phys. **138**, No. 6 (2010), 955–1009.
17. H. Minkowski, *Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs.* — Gesammelte Abhandlungen **2** (1911), 131–229.
18. L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Vol. **1** of *Encyclopedia Math. Appl.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.–London–Amsterdam, 1976.
19. R. Schneider, *Convex Bodies: the Brunn–Minkowski Theory*, Vol. **151** of *Encyclopedia Math. Appl.* Cambridge University Press, Cambridge, expanded edition, 2014.
20. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Probab. Appl. (N. Y.). Springer-Verlag, Berlin, 2008.

Dospolova M. K. Mixed volume of infinite-dimensional convex compact sets.

Let K be a convex compact GB-subset of a separable Hilbert space H. Denote by $\mathrm{Spec}_k K$ the set $\{(\xi_1(h), \dots, \xi_k(h)) \colon h \in K\} \subset \mathbb{R}^k$, where $\xi_1, \dots, \xi_k$ are independent copies of the isonormal Gaussian process. Tsirelson showed that in this case the intrinsic volumes of K satisfy the relation

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbf{E}\, \mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K).$$

Here, $\mathbf{E}\, \mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K)$ is the mean volume of $\mathrm{Spec}_k K$ and κ_k is the volume of the k-dimensional unit ball.

In this work, we generalize Tsirelson's theorem to the case of *mixed volumes* of infinite-dimensional convex compact GB-subsets of H, first introducing the notion of mixed volume for infinite-dimensional convex subsets of H.

Moreover, using the obtained result we compute the mixed volume of the closed convex hulls of two orthogonal Wiener spirals.

Международный
математический институт им. Леонарда Эйлера,
С.-Петербург, Россия
E-mail: dospolova.maria@yandex.ru

Поступило 16 сентября 2022 г.