Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

А. Н. Бородин

БРОУНОВСКОЕ ЛОКАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В МОМЕНТ, ОБРАТНЫЙ К ЛОКАЛЬНОМУ ВРЕМЕНИ

Эта работа продолжает исследование, начатое в [1]. Рассматривается броуновское движение и его локальное время в момент, обратный к локальному времени. Согласно описанию Рэя–Найта, броуновское локальное время в некотором условном вероятностном пространстве является по пространственной переменной марковским процессом (см. [2, 3]). Этот процесс на определенных интервалах изменения пространственной переменной выражается через квадраты бесселевских процессов (см., например, гл. V из [4]). У этих диффузий существует локальное время. Таким образом, мы приходим к определению локального времени от исходного броуновского локального времени. Такой процесс мы будем называть броуновским локальным временем второго порядка. Впервые этот процесс рассматривался нами в препринте [5].

1. Броуновское локальное время – диффузионный процесс

Пусть $W(t)$ – процесс броуновского движения, $W(0) = 0$. Броуновским локальным временем называется предел

$$\ell(t,y) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbb{1}_{[y,y+\varepsilon)}(W(s))\,ds,$$

который существует с вероятностью единица для $(t,y) \in [0,\infty)\times\mathbf{R}$. Этот процесс с вероятностью единица непрерывен по паре переменных.

Дадим описание для броуновского локального времени в момент, обратный к локальному времени на некотором уровне, приведенное в теореме 4.1 и в замечании 4.2 гл. V из [4]. Рассмотрим

$$\varrho(v,z) = \min\{s : \ell(s,z) = v\}$$

Ключевые слова: броуновское локальное время, момент, обратный к локальному времени, локальное время второго порядка, распределение локального времени второго порядка.

– момент обратный к локальному времени на уровне z, где $(v,z) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}$. В этом параграфе дается описание броуновского локального времени $\ell(t,y)$ как процесса по y в момент $t = \varrho(v,z)$. Ясно, что в этот момент траектория броуновского процесса W останавливается в точке z, т.е. $W(\varrho(v,z)) = z$, так как $\varrho(v,z)$ будет точкой роста броуновского локального времени $\ell(t,z)$. Поскольку броуновское движение пространственно инвариантно относительно сдвига, то в силу симметрии броуновского движения можно рассмотреть лишь $z \geqslant 0$.

Теорема 1.1. *При $z \geqslant 0$ процесс $\ell(\varrho(v,z),y)$, $y \in \mathbf{R}$, представим в виде*

$$\ell(\varrho(v,z),y) = \begin{cases} V_1(y-z) & \text{при } z \leqslant y, \\ V_2(z-y) & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant z, \\ V_3(-y) & \text{при } y \leqslant 0, \end{cases}$$

где

$$V_1(h) = \bigl(R^{(0)}(h)\bigr)^2, \quad V_2(h) = \bigl(R^{(2)}(h)\bigr)^2, \quad V_3(h) = \bigl(\widehat{R}^{(0)}(h)\bigr)^2,$$

а $R^{(0)}(t)$, $\widehat{R}^{(0)}(t)$ и $R^{(2)}(t)$, $t \geqslant 0$, – при фиксированных начальных значениях независимые бесселевские процессы размерностей 0, 0 *и* 2 *соответственно, $V_1(0) = v$, $V_2(0) = v$, $V_3(0) = V_2(z)$.*

Замечание 1.1. Производящие операторы процессов V_k, $k = 1,2,3$, имеют вид

$$\mathbf{L}_1 = 2v\frac{d^2}{dv^2}, \qquad \mathbf{L}_2 = 2v\frac{d^2}{dv^2} + 2\frac{d}{dv}, \qquad \mathbf{L}_3 = 2v\frac{d^2}{dv^2}.$$

Поскольку у процессов $V_l(h)$, $h \geqslant 0$, $l = 1,2,3$, существует локальное время, то при любом фиксированном z с вероятностью единица существует предел

$$\zeta(\varrho(v,z),u) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,z),y))\, dy, \qquad u > 0. \tag{1.2}$$

Этот процесс будем называть броуновским локальным временем второго порядка в момент, обратный к локальному времени.

Действительно, соотношение (1.2) следует из равенства

$$\zeta(\varrho(v,z),u) = \zeta_1(\varrho(v,z),u) + \zeta_2(\varrho(v,z),u),$$

где

$$\zeta_1(\varrho(v,z),u)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_z^\infty \mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty \mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(V_1(h))\,dh.$$

Аналогично, при условии $V_3(0)=V_2(z)$ получаем

$$\zeta_2(\varrho(v,z),u)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^z \mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(V_2(h))\,dh+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty \mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(V_3(h))\,dh.$$

2. Распределение функционалов от броуновского локального времени в момент, обратный к локальному времени

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от броуновского локального времени совместно с распределением броуновского локального времени второго порядка. Нас интересует функционал от броуновского локального времени по пространственной переменной вида

$$B_\gamma(v,z):=\int\limits_{-\infty}^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy+\gamma\zeta(\varrho(v,z),u), \tag{2.1}$$

где $f(v)$, $v\in[0,\infty)$, – некоторая неотрицательная кусочно непрерывная функция, $f(0)=0$, $\gamma\geqslant 0$, $u>0$ – произвольный уровень. Можно рассмотреть и более общий функционал, добавив в (2.1) линейную комбинацию броуновских локальных времен второго порядка на разных уровнях $\sum\limits_{k=0}^m\gamma_k\zeta(\varrho(v,z),u_k)$. Это не привносит принципиальных изменений ни в формулировки, ни в доказательства. Начнем со случая, когда $\gamma=0$.

Теорема 2.1. *Пусть $f(v),v\in[0,\infty)$, – неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0)=0$. Тогда при $z>0$*

$$\mathbf{E}\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Big)=R(v)q(z,v), \tag{2.2}$$

где функции $R(v)$ *и* $q(z,v)$, $v\in[0,\infty)$, $z\in\mathbf{R}$, *являются единственными непрерывными ограниченными решениями задачи*

$$2vR''(v)-f(v)R(v)=0, \qquad R(0)=1, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}q(z,v)=2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}q(z,v)+2\frac{\partial}{\partial v}q(z,v)-f(v)q(z,v)=0, \tag{2.4}$$

$$q(0,v)=R(v). \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. В силу свойства симметрии броуновского движения, аналогичное утверждение верно и при $z<0$.

Доказательство теоремы 2.1. В силу марковского свойства процесса $\ell(\varrho(v,z),y)$, $y\in\mathbf{R}$, и так как $\ell(\varrho(v,z),z)=v$ с вероятностью единица, имеем

$$\mathbf{E}\exp\Bigl(-\int_{-\infty}^{\infty}f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Bigr)=r(z,v)q(z,v),$$

где

$$r(z,v):=\mathbf{E}\exp\Bigl(-\int_{z}^{\infty}f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Bigr),$$

$$q(z,v):=\mathbf{E}\exp\Bigl(-\int_{-\infty}^{z}f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy\Bigr).$$

В силу определения процесса V_1, и так как событие $\{\ell(\varrho(v,z),z)=v\}$ можно выразить как событие $\{V_1(0)=v\}$, то

$$r(z,v)=\mathbf{E}\Bigl\{\exp\Bigl(-\int_{0}^{\infty}f(V_1(h))\,dh\Bigr)\Bigm|V_1(0)=v\Bigr\}.$$

Ясно, что функция $r(z,v)$ не зависит от z. Обозначим $R(v):=r(z,v)$.

Применим теорему 12.5 гл. II из [4]. Тогда получим, что функция $R(v)$, $v\in(0,\infty)$, является ограниченным решением следующего однородного уравнения:

$$2vR''(v)-f(v)R(v)=0. \tag{2.6}$$

Известно, что 0-мерный бесселевский процесс, попадая в нуль, из нуля уже не выходит, т.е. остается равным нулю. В силу описания процесса V_1, аналогичное утверждение верно и для него. Отсюда, так как $f(0)=0$, следует, что $R(0)=1$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$. Снова применим теорему 1.1. Поскольку событие $\{\ell(\varrho(v,z),z) = v\}$ можно выразить как событие $\{V_2(0) = v\}$, то

$$q(z,v) = \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(V_3(h))\,dh - \int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(0) = v\Big\}$$
$$= \int_0^\infty \mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(V_3(h))\,dh - \int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big); V_2(z) \in dg\Big\},$$

где нижний индекс v означает, что математическое ожидание и вероятность вычисляются от процесса V_2 с начальным значением $V_2(0) = v$. Используя независимость процессов V_2 и V_3 при фиксированных начальных значениях и условие $V_3(0) = V_2(z)$, имеем

$$q(z,v) = \int_0^\infty \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(V_3(h))\,dh\Big)\Big|V_3(0) = g\Big\}$$
$$\times\, \mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(z) = g\Big\}\mathbf{P}_v\big(V_2(z) \in dg\big).$$

Инфинитезимальные характеристики у процессов V_1 и V_3 одинаковы, поэтому

$$q(z,v) = \int_0^\infty R(g)\mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(z) = g\Big\}\mathbf{P}_v\big(V_2(z) \in dg\big)$$
$$= \mathbf{E}\Big\{R(V_2(z))\exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(0) = v\Big\}.$$

Применим теорему 13.2 гл. II. Тогда получим, что функция $q(z,v)$, $(z,v) \in \in [0,\infty) \times [0,\infty)$, является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial z}q(z,v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}q(z,v) + 2\frac{\partial}{\partial v}q(z,v) - f(v)q(z,v), \tag{2.7}$$
$$q(0,v) = R(v). \tag{2.8}$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.2. При $z = 0$ очевидно имеем

$$\mathbf{E}\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\varrho(v,0),y))\,dy\Big) = R^2(v). \tag{2.9}$$

Преобразование Лапласа по z от функции $q(z,v)$ будет уже удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, т.е. функция

$$Q(v) := \lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} q(z,v)\,dz, \qquad \lambda \geqslant 0,$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda + f(v))Q(v) = -\lambda R(v), \qquad v \in (0,\infty). \tag{2.10}$$

Удобно рассмотреть момент τ, показательно распределенный с параметром $\lambda > 0$ и не зависящий от процесса броуновского движения W. Тогда $Q(v) = \mathbf{E}q(\tau, v)$, и по теореме Фубини равенство (2.2) преобразуется к виду

$$\mathbf{E}\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy\Big) = R(v)Q(v).$$

В результате мы получим следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть $f(v), v \in [0,\infty)$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy\Big) = R(v)Q(v), \tag{2.11}$$

где функции $R(v)$ и $Q(v)$, $v \in [0,\infty)$, являются единственными непрерывными ограниченными решениями задачи

$$2vR''(v) - f(v)R(v) = 0, \qquad R(0) = 1, \tag{2.12}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda + f(v))Q(v) = -\lambda R(v). \tag{2.13}$$

Замечание 2.3. Для кусочно непрерывной функции f уравнения (2.12), (2.13) надо понимать следующим образом: они имеют место во всех точках непрерывности функций f, а в точках разрыва функций f их решения непрерывны вместе с первыми производными.

Замечание 2.4. Единственность ограниченного решения задачи (2.12), (2.13) следует из того, что решение уравнения (2.12) является выпуклым, а однородное уравнение, соответствующее (2.13), обладает решением, у которого асимптотика в нуле имеет порядок $-\ln v$ при $v \downarrow 0$ (см. доказательство теоремы 5.1 гл. IV из [4]). Кроме того, такое уравнение обладает линейно независимым решением, возрастающим быстрее чем $1 + \lambda v^2/8$.

Как и при доказательстве теоремы 4.1 гл. IV из [4], теорема 2.2 для кусочно непрерывной функции f выводится из утверждения для непрерывной функции (см. уравнения (2.3) и (2.10)) с помощью аппроксимации f непрерывными функциями.

Теорема 2.3. *Пусть $f(v), v \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\varrho(v,\tau),y) \leqslant h\Big\}$$

$$= R(v)Q(v)\mathbb{1}_{[0,h]}(v), \tag{2.14}$$

где функции $R(v)$ и $Q(v)$, $v \in [0,h]$, являются единственными непрерывными ограниченными решениями задачи

$$2vR''(v) - f(v)R(v) = 0, \quad R(0) = 1, \quad R(h) = 0 \tag{2.15}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda + f(v))Q(v) = -\lambda R(v), \tag{2.16}$$

$$Q(h) = 0. \tag{2.17}$$

Доказательство теоремы 2.3 для $h < \infty$ основано на очевидном соотношении

$$\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\varrho(v,\tau),y) \leqslant h\Big]$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} (f(\ell(\varrho(v,\tau),y)) + \gamma\mathbb{1}_{(h,\infty)}(\ell(\varrho(v,\tau),y)))\,dy\Big)\Big].$$

Доказательство, основанное на таком соотношении, изложено в § 5 гл. V из [4] при доказательстве теоремы 5.1.

Теорема 2.4. *Пусть $f(v), v \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$ и $\gamma > 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy - \gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\varrho(v,\tau),y) \leqslant h\Big\}$$

$$= R(v)Q(v)\mathbb{1}_{[0,h]}(v), \tag{2.18}$$

где функции $R(v)$ и $Q(v)$, $v \in [0,h]$, являются единственными непрерывными ограниченными решениями задачи

$$2vR''(v) - f(v)R(v) = 0, \qquad v \neq u, \tag{2.19}$$

$$2u(R'(u+0) - R'(u-0)) = \gamma R(u), \tag{2.20}$$

$$R(0) = 1, \qquad R(h) = 0, \tag{2.21}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda + f(v))Q(v) = -\lambda R(v), \quad v \neq u, \tag{2.22}$$

$$2u(Q'(u+0) - Q'(u-0)) = \gamma Q(u), \tag{2.23}$$

$$Q(0+) < \infty, \quad Q(h) = 0. \tag{2.24}$$

Доказательство. При $\gamma = 0$ теорема 2.4 превращается в теорему 2.3. Мы используем эту теорему и тот подход, который применялся при доказательстве теоремы 2.1. Применим теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Из определения броуновского локального времени второго порядка и из теорем 2.1 и 2.3 выводим, что

$$\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy - \gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\varrho(v,\tau),y) \leqslant h\Big\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f(\ell(\varrho(v,\tau),y)) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,\tau),y))\Big)\,dy\Big)$$
$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\varrho(v,\tau),y)\Big)\Big\} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} R_\varepsilon(v)Q_\varepsilon(v), \tag{2.25}$$

где

$$R_\varepsilon(v) = \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int_{z}^{\infty} \Big(f(\ell(\varrho(v,z),y)) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,z),y)\Big)\,dy\Big)$$
$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(z,\infty)} \ell(\varrho(v,z),y)\Big)\Big\}, \tag{2.26}$$

и

$$Q_\varepsilon(v) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda z} \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int\limits_{-\infty}^{z} \Big(f(\ell(\varrho(v,z),y))$$

$$+ \frac{\gamma}{\varepsilon} \mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(\ell(\varrho(v,z),y))\Big) dy\Big) \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(-\infty,z)} \ell(\varrho(v,z),y)\Big)\Big\}\, dz. \qquad (2.27)$$

Функции R_ε, Q_ε являются решениями задачи

$$2vR_\varepsilon''(v) - \Big(f(v) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(v)\Big) R_\varepsilon(v) = 0, \qquad (2.28)$$

$$R_\varepsilon(0) = 1, \qquad R_\varepsilon(h) = 0, \qquad (2.29)$$

$$2vQ_\varepsilon''(v) + 2Q_\varepsilon'(v) - \big(\lambda + f(v) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[u,u+\varepsilon)}(v)\big) Q_\varepsilon(v) = -\lambda R_\varepsilon(v), \quad (2.30)$$

$$Q_\varepsilon(0+) < \infty, \qquad Q_\varepsilon(h) = 0. \qquad (2.31)$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла справедливы соотношения

$$R_\varepsilon(v) \to R(v), \qquad Q_\varepsilon(v) \to Q(v), \qquad (2.32)$$

где

$$R(v) = \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int\limits_z^\infty f(\ell(\varrho(v,z),y))\, dy - \gamma\zeta_1(\varrho(v,z),u)\Big)$$

$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(z,\infty)} \ell(\varrho(v,z),y)\Big)\Big\},$$

$$Q(v) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda z} \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int\limits_{-\infty}^{z} f(\ell(\varrho(v,z),y))\, dy - \gamma\zeta_2(\varrho(v,z),u)\Big)$$

$$\times \mathbb{1}_{[0,h]}\Big(\sup_{y\in(-\infty,z)} \ell(\varrho(v,z),y)\Big)\Big\} dz.$$

Предельный переход в уравнениях (2.28)–(2.31) осуществляется аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1 гл. III из [4]. Важное значение при этом имеют соотношения (2.32). Это завершает доказательство теоремы 2.4. □

Как очевидный вывод из доказательства теорем 2.1 и 2.4 можно сформулировать следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть $f(v), v \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$ и $\gamma \geqslant 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\varrho(v,\tau),y))\,dy - \gamma\zeta(\varrho(v,0),u)\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\varrho(v,0),y) \leqslant h\Big\}$$

$$= R^2(v)\mathbb{1}_{[0,h]}(v), \tag{2.33}$$

где функция $R(v)$, $v \in [0,h]$, является единственным непрерывным ограниченным решением задачи (2.19)–(2.21).

3. Распределение броуновского локального времени второго порядка в момент, обратный к локальному времени

Применим теорему 2.4 при $f \equiv 0$ и $h = \infty$ для вычисления преобразования Лапласа распределения броуновского локального времени второго порядка. Пусть $I_l(x)$ и $K_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – модифицированные функции Бесселя порядка l (см., например, приложение 2 из [4]).

Теорема 3.1. *При* $\gamma \geqslant 0$

$$\mathbf{E}e^{-\gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)}$$
$$= \begin{cases} \Big(1 - \frac{\gamma v}{(2+\gamma)u}\Big)\Big(1 - \frac{2\gamma}{\lambda(2+\gamma)u} - \frac{\gamma v}{(2+\gamma)u} \\ \quad + \frac{2\gamma(\sqrt{2\lambda u}K_1(\sqrt{2\lambda u}) + \gamma K_0(\sqrt{2\lambda u}))I_0(\sqrt{2\lambda v})}{\lambda(2+\gamma)u(1+\gamma I_0(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda u}))}\Big), & 0 \leqslant v \leqslant u, \\ \frac{4}{(2+\gamma)^2}\Big(1 - \frac{2\gamma I_1(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda v})}{\sqrt{2\lambda u}(1+\gamma I_0(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda u}))}\Big), & u \leqslant v. \end{cases} \tag{3.1}$$

Замечание 3.1.

$$\mathbf{E}e^{-\gamma\zeta(\varrho(v,0),u)} = \begin{cases} \Big(1 - \frac{\gamma v}{(2+\gamma)u}\Big)^2, & 0 \leqslant v \leqslant u, \\ \frac{4}{(2+\gamma)^2}, & u \leqslant v. \end{cases} \tag{3.2}$$

Действительно, так как $\tau \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то переходя в (3.1) к пределу, получаем (3.2). Здесь мы использовали асимптотики

$$I_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x, \qquad K_0(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}e^{-x}, \qquad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Для доказательства (3.2) можно применить и теорему 2.5 при $f \equiv 0$.

Обращая преобразование Лапласа (3.2) по γ получим

$$\mathbf{P}(\zeta(\varrho(v,0),u)=0)=\Big(1-\frac{v}{u}\Big)^2 \mathbb{1}_{[0,u]}(v), \tag{3.3}$$

$$\mathbf{P}(\zeta(\varrho(v,0),u)\in dy)=\Big[\frac{4v}{u}\Big(1-\frac{v}{u}\Big)e^{-2y}+\frac{4v^2}{u^2}ye^{-2y}\Big]\mathbb{1}_{[0,u]}(v)dy$$
$$+4ye^{-2y}\mathbb{1}_{(u,\infty)}(v)dy. \tag{3.4}$$

Доказательство теоремы 3.1. Найдем ограниченное решение задачи (2.19)–(2.21) при $f \equiv 0$ и $h=\infty$. Имеем следующую задачу:

$$vR''(v)=0, \qquad v\neq u, \quad R(0)=1, \tag{3.5}$$
$$2u(R'(u+0)-R'(u-0))=\gamma R(u). \tag{3.6}$$

Решение ищем в виде

$$R(v)=\begin{cases}1-Av, & 0\leqslant v\leqslant u,\\ B, & u\leqslant v.\end{cases}$$

Из условия непрерывности и условия на скачок производной вычисляем A и B. В итоге имеем

$$R(v)=\begin{cases}1-\dfrac{\gamma v}{(2+\gamma)u}, & 0\leqslant v\leqslant u,\\ \dfrac{2}{2+\gamma}, & u\leqslant v.\end{cases}$$

Найдем ограниченное решение задачи (2.22)–(2.24) при $f\equiv 0$ и $h=\infty$. Частное решение Q_0 уравнения

$$vQ''(v)+Q'(v)-\frac{\lambda}{2}Q(v)=-\frac{\lambda}{2}R(v)$$

ищем в виде

$$Q_0(v)=\begin{cases}a-bv, & 0\leqslant v\leqslant u,\\ \dfrac{2}{2+\gamma}, & u\leqslant v.\end{cases}$$

Подстановка в уравнение дает следующее выражение

$$Q_0(v)=\begin{cases}1-\dfrac{2\gamma}{\lambda(2+\gamma)u}-\dfrac{\gamma v}{(2+\gamma)u}, & 0\leqslant v\leqslant u,\\ \dfrac{2}{2+\gamma}, & u\leqslant v.\end{cases}$$

Однородное уравнение

$$Y''(v)+\frac{1}{v}Y'(v)-\frac{\lambda}{2v}Y(v)=0, \qquad v>0,$$

имеет (см. уравнение 15а приложения 4 из [4]) возрастающее $I_0(\sqrt{2\lambda v})$ и убывающее $K_0(\sqrt{2\lambda v})$ линейно независимые решения, $K_0(x) \sim -\ln x$ при $x \to 0$. Решение задачи (2.22)–(2.24) при $f \equiv 0$ и $h = \infty$ ищем в виде

$$Q(v) = \begin{cases} AI_0(\sqrt{2\lambda v}) + 1 - \frac{2\gamma}{\lambda(2+\gamma)u} - \frac{\gamma v}{(2+\gamma)u}, & 0 \leqslant v \leqslant u, \\ BK_0(\sqrt{2\lambda v}) + \frac{2}{2+\gamma}, & u \leqslant v. \end{cases}$$

Из условия непрерывности решения в точке u следует уравнение

$$AI_0(\sqrt{2\lambda u}) - BK_0(\sqrt{2\lambda u}) = \frac{2\gamma}{\lambda(2+\gamma)u}.$$

Из условия на скачок производной получаем уравнение

$$AI_1(\sqrt{2\lambda u}) + B(K_1(\sqrt{2\lambda u}) + \frac{\gamma}{\sqrt{2\lambda u}} K_0(\sqrt{2\lambda u})) = 0.$$

Определитель этой алгебраической системы уравнений следующий:

$$\Delta = I_0(\sqrt{2\lambda u})K_1(\sqrt{2\lambda u}) + \frac{\gamma}{\sqrt{2\lambda u}} I_0(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda u}) + I_1(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda u})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\lambda u}}(1 + \gamma I_0(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda u})).$$

Решение этой алгебраической системы уравнений имеет вид

$$A = \Big(K_1(\sqrt{2\lambda u}) + \frac{\gamma}{\sqrt{2\lambda u}} K_0(\sqrt{2\lambda u})\Big) \frac{2\gamma}{\Delta\lambda(2+\gamma)u},$$

$$B = -\frac{2\gamma I_1(\sqrt{2\lambda u})}{\Delta\lambda(2+\gamma)u}.$$

В итоге имеем, что при $0 \leqslant v \leqslant u$

$$Q(v) = 1 - \frac{2\gamma}{\lambda(2+\gamma)u} - \frac{\gamma v}{(2+\gamma)u} + \frac{2\gamma(\sqrt{2\lambda u}K_1(\sqrt{2\lambda u}) + \gamma K_0(\sqrt{2\lambda u}))I_0(\sqrt{2\lambda v})}{\lambda(2+\gamma)u(1 + \gamma I_0(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda u}))},$$

и при $u \leqslant v$

$$Q(v) = \frac{2}{(2+\gamma)}\Big(1 - \frac{\gamma\sqrt{2}I_1(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda v}))}{\sqrt{\lambda u}(1 + \gamma I_0(\sqrt{2\lambda u})K_0(\sqrt{2\lambda u})}\Big).$$

4. Следствия из формулы (3.1)

Локальное время диффузии на любом уровне, который она достигает, сразу накапливает положительное значение. Используя это свойство, из (3.1) получаем

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\varrho(v,\tau),y) < u\Big) = \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}e^{-\gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)}$$

$$= \Big(1-\frac{v}{u}\Big)\Big(1-\frac{v}{u}+\frac{2}{\lambda u}\Big(\frac{I_0(\sqrt{2\lambda v})}{I_0(\sqrt{2\lambda u})}-1\Big)\Big)\mathbb{1}_{[0,u]}(v). \qquad (4.1)$$

Эта формула совпадает с формулой 1.4.11.2 из [6], полученной другим путем.

Поскольку $\tau \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то переходя в (4.1) к пределу, получаем

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\varrho(v,0),y) < u\Big) = \Big(1-\frac{v}{u}\Big)^2 \mathbb{1}_{[0,u]}(v). \qquad (4.2)$$

Эта формула следует и из (2.33) при $f \equiv 0$.

Выведем формулу для математического ожидания броуновского локального времени второго порядка в момент, обратный к локальному времени.

Положим при фиксированном u

$$\varphi(\gamma) := \mathbf{E}e^{-\gamma\zeta(\varrho(v,\tau),u)}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}\zeta(\varrho(v,\tau),u) = -\varphi'(\gamma)\Big|_{\gamma=0}.$$

Дифференцируя формулу (3.1) по γ и полагая $\gamma = 0$, получаем

$$\mathbf{E}\zeta(\varrho(v,\tau),u) = \begin{cases} \dfrac{v}{u} + \Big(\dfrac{1}{\lambda u} - \dfrac{2}{\sqrt{2\lambda u}} K_1(\sqrt{2\lambda u}) I_0(\sqrt{2\lambda v})\Big), & u \leqslant v, \\[2ex] 1 + \dfrac{2}{\sqrt{2\lambda u}} I_1(\sqrt{2\lambda u}) K_0(\sqrt{2\lambda v}), & v \leqslant u. \end{cases}$$

Дифференцируя формулу (3.2) по γ и полагая $\gamma = 0$, получаем

$$\mathbf{E}\zeta(\varrho(v,0),u) = \begin{cases} \dfrac{v}{u}, & v \leqslant u, \\ 1, & u \leqslant v. \end{cases}$$

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Броуновское локальное время второго порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **505** (2021), 75–86.
2. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 56–86.
3. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math. **7** (1963) 615–630.
4. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Лань, Санкт-Петербург (2017).
5. A. N. Borodin, *On the distribution of functionals of Brownian local time.*— LOMI Preprints E–4–85, Leningrad 1985.
6. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Санкт-Петербург, Лань, 2016.

Borodin A. N. Brownian local time of the second order at the inverse local time moment.

According to the Ray–Knight description the Brownian local time at the inverse local time moment with respect to the spatial variable is a diffusion process. This diffusion has a local time. Thus, we come to the definition of the local time of the initial Brownian local time. We will call such a process the Brownian local time of the second order at the inverse local time moment. The paper studies the Laplace transform of the distribution of the Brownian local time of the second order.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 августа 2022 г.