Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 510, 2022 г.

И. А. Алексеев

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА ТИПА РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ С ИНДЕКСОМ УСТОЙЧИВОСТИ БОЛЬШЕ ДВУХ

§1. Введение

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, – одномерный скачкообразный процесс Леви (процесс с независимыми стационарными приращениями, $\xi(0) = 0$ п.н.). Всякий такой процесс Леви однозначно задается своей мерой Леви $\Pi(dx)$. Мера Леви удовлетворяет условиям:

$$\Pi(\{0\}) = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \min(x^2, 1)\Pi(dx) < \infty.$$

Процесс Леви может быть построен следующим образом:

$$\xi(t) = \iint\limits_{\substack{|x|<1,\\ 0\leqslant s\leqslant t}} x\widetilde{\nu}(dx, ds) + \iint\limits_{\substack{|x|\geqslant 1,\\ 0\leqslant s\leqslant t}} x\nu(dx, ds),$$

где $\nu(dx, ds)$ – пуассоновская случайная мера на $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\Pi(dx)\,ds$; а $\widetilde{\nu}(dx, ds)$ – соответствующая центрированная мера (см. [4]).

Всякий процесс Леви порождает полугруппу операторов P^t, $t \geqslant 0$. Каждый оператор полугруппы действует на $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ как

$$P^t f(x) = \mathbb{E} f\big(x - \xi(t)\big). \tag{1}$$

Генератор полугруппы P^t (инфинитезимальный оператор) в данном случае имеет вид (см. [5]):

$$\mathcal{L}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(f(x-y) - f(x) + yf'(x)\mathbb{I}_{|y|<1}\big)\Pi(dy).$$

Ключевые слова: оператор Римана–Лиувилля, эволюционное уравнение, устойчивое распределение.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант No. 22-21-00016).

В частном случае этой конструкции, когда $\Pi(dx) = \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}$, $\alpha \in (0,2)$, процесс Леви является симметричным устойчивым, а генератор соответствующей полугруппы – оператором Римана–Лиувилля. Именно, генератор имеет вид:

$$\mathcal{L}f(x) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} \big(f(x-y) - f(x)\big) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}, & \alpha \in (0,1); \\ \mathrm{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} \big(f(x-y) - f(x)\big) \frac{dy}{|y|^{2}}, & \alpha = 1; \\ \int\limits_{\mathbb{R}} \big(f(x-y) - f(x) + yf'(x)\big) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}, & \alpha \in (1,2). \end{cases}$$

В работе [3] рассматривались операторы Римана–Лиувилля с индексом $\alpha > 2$. В симметричном случае данные операторы имеют вид:

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(f(x-y) - \sum_{j=0}^{[\alpha/2]} \frac{f^{(2j)}(x)}{(2j)!} y^{2j} \Big) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}},$$

где через $f^{(j)}(x)$ обозначена производная функции f порядка j, $j = 0, 1, \ldots$, в точке $x \in \mathbb{R}$, $[\alpha]$ означает целую часть числа α.

В этой же работе также рассматриваются односторонние операторы Римана–Лиувилля вида

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{0}^{\infty} \Big(f(x-y) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(-1)^j f^{(j)}(x)}{j!} y^{j} \Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Так как при $\alpha > 2$ операторы Римана–Лиувилля не удовлетворяют принципу максимума, то полугруппу операторов $e^{t\mathcal{L}}$, $t \geqslant 0$, нельзя представить в виде (1). В работе [3] была построена вероятностная аппроксимация оператора $e^{t\mathcal{L}}$ в случае $\alpha > 2$.

В работе автора [1] были введены комплекснозначные устойчивые процессы Леви, отвечающие комплексным значениям α, удовлетворяющим условию $|\alpha - 1| < 1$. Кроме параметра α также используются параметры (ϱ, γ), определяемые по α следующим образом:

$$a = \operatorname{Re} \alpha^{-1}; \quad b = \operatorname{Im} \alpha^{-1}; \quad \varrho = 1/a; \quad \gamma = b/a. \tag{2}$$

Параметр ϱ называется *параметром устойчивости*, параметр γ – *параметром комплексности*. Для вещественных α параметр $\varrho = \alpha$, $\gamma = 0$.

Построенные в работе [1] устойчивые процессы Леви обладают обычным условием устойчивости, но с заменой положительной полуоси на логарифмическую спираль Γ_0, задаваемую как

$$\Gamma_0 = \{x^{1+i\gamma}\colon\ x > 0\} \subset \mathbb{C}. \tag{3}$$

Именно, если $\xi(t)$ – комплекснозначный процесс Леви, такой что для любых $t > 0$ и $d > 0$ существуют $z(d) \in \Gamma_0$ и $q \in \mathbb{C}$, такие что

$$\xi(d \cdot t) \overset{d}{=} z(d)\xi(t) + q,$$

то или существует $\varrho \in (0, 2)$, такое что $\xi(t)$ – α-устойчивый процесс Леви с комплексным индексом $\alpha = \varrho(1 + i\gamma)^{-1}$; или существует $\sigma \geqslant 0$, такое что $\xi(t)$ – комплекснозначный гауссовский процесс Леви с матрицей ковариации $Q = \sigma^2 I$, где I – единичная матрица.

Комплекснозначный устойчивый процесс Леви может быть задан стохастическим интегралом:

$$\xi(t) = \iiint\limits_{\substack{|x|<1,\\ \theta\in[0,2\pi),\\ 0\leqslant s\leqslant t}} x^{1+i\gamma} e^{i\theta} \widetilde{\nu}(dx, d\theta, ds) + \iiint\limits_{\substack{|x|\geqslant 1,\\ \theta\in[0,2\pi),\\ 0\leqslant s\leqslant t}} x^{1+i\gamma} e^{i\theta} \nu(dx, d\theta, ds),$$

где $\nu(dx, d\theta ds)$ – пуассоновская случайная мера на $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \infty)$ с интенсивностью $\frac{\varrho dx}{x^{1+\varrho}} \lambda(d\theta) ds$, $\lambda(d\theta)$ – конечная мера на $[0, 2\pi)$; а $\widetilde{\nu}(dx, d\theta, ds)$ – соответствующая центрированная мера (см. [4]).

Оператор типа Римана–Лиувилля можно обобщить также на случай комплексных α, удовлетворяющих $\varrho = \varrho(\alpha) > 0$ и $\varrho \notin \mathbb{N}$. Именно, введем следующее определение.

Определение 1. Односторонним оператором типа Римана–Лиувилля порядка α назовем оператор $\mathcal{L}\colon W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, действующий на $f \in W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ как

$$\big(\mathcal{L} f\big)(x_1, x_2) = |\alpha| \int\limits_{\Gamma_0} \Big(f(x-y) - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-1)^j}{j!} D^j f(x_1, x_2)[y_1\, y_2]\Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}, \tag{4}$$

где $y = (y_1, y_2)$,

$$\begin{aligned} D^n f(x_1, x_2)[y_1\, y_2] &= \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2\Big)^n f(y_1, y_2) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x_1^k \partial x_2^{n-k}} \cdot y_1^k y_2^{j-k}. \end{aligned} \tag{5}$$

В работе [1] были получены вероятностные решения операторов $e^{t\mathcal{L}}$ для случая $\varrho = \varrho(\alpha) \in (0,2)$. Аналогично случаю вещественных α, когда $\varrho > 2$ могут существовать только вероятностные приближения решений.

Введем также симметричный аналог оператора типа Римана–Лиувилля (аналогично тому, как это делается для вещественных α).

Определение 2. Симметричным оператором типа Римана–Лиувилля порядка α назовем оператор $\mathcal{L}_s\colon\ W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, действующий на $f \in W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ как

$$\big(\mathcal{L}_s f\big)(x_1,x_2)=|\alpha| \int\limits_{\Gamma_0\cup\Gamma_\pi} \Big(f(x-y)-\sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{1}{(2j)!}D^{2j}f(x_1,x_2)[y_1\, y_2]\Big)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}. \quad (6)$$

Основной целью данной работы является обобщить результаты статьи [3] на случай операторов типа Римана–Лиувилля с комплексным индексом α, а именно – построить вероятностную аппроксимацию операторов $e^{t\mathcal{L}}$, $t \geqslant 0$. В данной работе мы ограничимся только случаем α, удовлетворяющих условию

$$\varrho = \varrho(\alpha) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+2).$$

Автор выражает благодарность Н.В. Смородиной за внимание и поддержку в работе.

§2. Односторонний случай

Далее в течение всего параграфа будем рассматривать только α, удовлетворяющие условию

$$\varrho = \varrho(\alpha) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2). \quad (7)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad (8)$$

где оператор $\mathcal{L}$ – оператор типа Римана–Лиувилля (4). Для уравнения (8) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2), \quad (9)$$

где функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Через $P^t = e^{t\mathcal{L}}$ обозначим полугруппу операторов, переводящих начальную функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ в решение $u(t,\cdot) = P^t\varphi$ задачи Коши (8).

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим еще полугруппу операторов:

$$\big(P^t_\varepsilon \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\Big[\big(\varphi * \omega^t_\varepsilon\big)\big(x_1 - \xi^\varepsilon_1(t), x_2 - \xi^\varepsilon_2(t)\big)\Big], \tag{10}$$

где

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi^\varepsilon_1(t) + i\xi^\varepsilon_2(t) = \iint\limits_{\substack{x>\varepsilon,\\ 0\leqslant s\leqslant t}} x^{1+i\gamma}\nu(ds, dx),$$

а $\nu(ds, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)^2$ с интенсивностью вида

$$\mathbb{E}\nu(ds, dx) = \Pi(ds, dx) = ds\tfrac{\varrho dx}{x^{1+\varrho}}.$$

Функция $\omega^t_\varepsilon(x_1, x_2)$ в (10) определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}^t_\varepsilon(p_1, p_2) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{[\varrho]}\frac{i^j y^j}{j!}\big(p_1\cos(\gamma\ln y) + p_2\sin(\gamma\ln y)\big)^j\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\Big). \tag{11}$$

Нетрудно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ семейство P^t_ε образует полугруппу. Далее мы покажем, что для любого $t > 0$ имеет место сильная операторная сходимость $P^t_\varepsilon \to P^t$ при $\varepsilon \to 0$.

Отметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi^\varepsilon(t)$ является сложным пуассоновским процессом, но при таком выборе α у семейства случайных величин $\xi^\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$. Тем не менее, процесс $\xi^\varepsilon(t)$ может быть использован для представления решения задачи Коши (8)–(9).

Отметим еще, что при α, удовлетворяющих (7), функция $\widehat{\omega}^t_\varepsilon(p_1, p_2)$ является быстро убывающей. Действительно, при $\varrho \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1)$ коэффициент при старшей степени $|p|$ в показателе экспоненты отрицателен. При $\varrho \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k+1, 4k+2)$ коэффициент при старшей степени $|p|$ чисто мнимый, но зато предыдущий коэффициент (при $|p|^{4k}$) – отрицательный.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{[\varrho]+l+1}(\mathbb{R}^2)$, $l \geqslant 0$. *Тогда*

$$\|P^t\varphi - P^t_\varepsilon\varphi\|_{W^l_2} \leqslant Ct\varepsilon^{1-\{\varrho\}}\|\varphi\|_{W_2^{l+1+[\varrho]}},$$

где P^t, P^t_ε *– полугруппы операторов, определенные* (10), $\{\varrho\} = \varrho - [\varrho]$.

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. напр., [2, гл. IX, §2, п. 1, с. 614]):

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \tag{12}$$

Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \mathcal{L} - A_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ как

$$A_\varepsilon\psi(x) = |\alpha| \int\limits_{(\varepsilon,\infty)_\gamma} \Big(\psi(x-y) - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-1)^j}{j!} D^j\psi(x_1,x_2)[y_1\, y_2]\Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}},$$

где интервал $(c,d)_\gamma$ задается следующей формулой:

$$(c,d)_\gamma = \{x^{1+i\gamma} \colon\ x \in (c,d)\} \subset \Gamma_0. \tag{13}$$

В этих обозначениях

$$A + B = \mathcal{L}.$$

Заметим, что для любого положительного k справедливы неравенства для операторных норм

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1, \tag{14}$$

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{15}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\varrho]+1} \to W_2^l}$. Имеем

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Bigg(\int\limits_0^{\varepsilon} \Big(\varphi(x_1 - y\cos(\gamma\ln y), x_2 - y\sin(\gamma\ln y))$$

$$- \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-1)^j y^j}{j!} D^j \varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y)\sin(\gamma\ln y)] \Big) \frac{dy}{y^{1+\varrho}} \Bigg) e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\, dx_1\, dx_2.$$

Воспользуемся теоремой Фубини и поменяем пределы интегрирования. Получим

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) = \int\limits_0^{\varepsilon} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Big(\varphi(x_1 - y\cos(\gamma\ln y), x_2 - y\sin(\gamma\ln y))$$

$$- \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-1)^j y^j}{j!} D^j \varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y)\sin(\gamma\ln y)] \Big) e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\, dx_1\, dx_2 \Bigg) \frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Из формул для преобразования Фурье сдвига и производной следует, что

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) = h_\varepsilon(p_1,p_2)\widehat{\varphi}(p_1,p_2),$$

где

$$h_\varepsilon(p_1,p_2) = \int\limits_0^{\varepsilon} \Big(e^{iy\left(p_1\cos(\gamma\ln y)+p_2\sin(\gamma\ln y)\right)}$$

$$- \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{y^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} C_j^k (ip_1)^k (ip_2)^{j-k} \cos^k(\gamma\ln y)\sin^{j-k}(\gamma\ln y) \Big) \frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Пусть $p_1 = r\cos\varphi$, $p_2 = r\sin\varphi$, $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Имеем

$$h_\varepsilon(p_1,p_2) = \int\limits_0^{\varepsilon} \Big(e^{iry\cos(\varphi-\gamma\ln y)} - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{r^j y^j}{j!} \cos^j(\varphi - \gamma\ln y) \Big) \frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Сделаем в последней формуле замену переменной $w = ry$:

$$h_\varepsilon(p_1,p_2)$$
$$= r^{\varrho} \int\limits_0^{r\varepsilon} \Big(e^{iw\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y)} - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{w^j}{j!} \cos^j(\varphi + \gamma\ln r - \gamma\ln y) \Big) \frac{dw}{w^{1+\varrho}}.$$

Если $r < \frac{1}{\varepsilon}$, то, оценивая в последней формуле остаточный член в разложении Тейлора, получаем

$$
\begin{aligned}
r^{\varrho}\Bigg|\int\limits_0^{r\varepsilon} \Big(\exp(i\cos(\theta-\gamma\ln y)y) - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(i\cos(\theta-\gamma\ln y)y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\Bigg| \\
\leqslant Cr^{[\varrho]+1}\varepsilon^{1-\{\varrho\}} = C|p|^{[\varrho]+1}\varepsilon^{1-\{\varrho\}}.
\end{aligned}
$$

В случае $r > \frac{1}{\varepsilon}$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\big|h_\varepsilon(p_1,p_2)\big| \\
&\leqslant |p|^{\varrho}\cdot\int\limits_0^{\infty}\Big|e^{iw\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y)} - \sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{w^j}{j!}\cos^j(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y)\Big|\frac{dw}{w^{1+\varrho}} \\
&\leqslant C|p|^{\varrho}\Big(\int\limits_0^1\frac{dw}{w^{\{\varrho\}}} + \int\limits_1^{\infty}\frac{dw}{w^{1+\{\varrho\}}}\Big) \leqslant C(\varrho)|p|^{\varrho}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\Big\|\widehat{B\varphi}\Big\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)|^2\,dp_1\,dp_2 \\
&\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\varrho\})}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2([\varrho]+1)}\,dp_1\,dp_2 \\
&+ C\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2\varrho}\,dp_1\,dp_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\widehat{B\varphi}\Big\|^2_{W_2^l} \leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\varrho\})}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}}(1+|p|^{2(l+[\varrho]+1)})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2\,dp_1\,dp_2 \\
&+ C\varepsilon^{2(1-\{\varrho\})}\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2\varrho+2(1-\{\varrho\})}\,dp_1\,dp_2 \qquad (16) \\
&\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\varrho\})}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\varrho]+1}}.
\end{aligned}
$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (14), (15) и (16). $\square$

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x_1,x_2)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbb{R}^2)$ приближает решение $u(t,x_1,x_2)$ задачи Коши (8)–(9). Таким образом, для решения задачи Коши (8)–(9) мы получаем представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)\big(x_1 - \xi_1^\varepsilon(t), x_2 - \xi_2^\varepsilon(t)\big)]. \tag{17}$$

Далее мы покажем, что в формуле (17) случайный процесс $\xi^\varepsilon(t)$ можно заменить случайным блужданием достаточно общего вида.

Пусть $\{X_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины X_1, через $F(x)$ – функцию распределения. Предположим, что распределение случайной величины X_1 при $x > 1$ удовлетворяет условию

$$1 - F(x) = \frac{1}{x^\varrho}(1 + h(x)), \tag{18}$$

причем функция

$$|h(x)| \leqslant \frac{C}{x^\delta},$$

где

$$\delta > 1 - \{\varrho\}. \tag{19}$$

Для $k < \varrho$, $j \leqslant k$ через μ_k^j обозначим величину

$$\mu_k^j = \mathbb{E}X_1^k \cos^j(\gamma \ln X_1) \sin^{k-j}(\gamma \ln X_1). \tag{20}$$

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ – независимый от последовательности $\{X_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \zeta_{1,n}(t) + i\zeta_{2,n}(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=0}^{\eta(nt)} X_j^{1+i\gamma}. \tag{21}$$

Заметим, что при $\varrho > 2$ процесс $\zeta_n(t)$ не имеет слабого предела при $n \to \infty$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим полугруппу операторов P_n^t, полагая

$$\big(P_n^t\varphi\big)(x_1,x_2) = \mathbb{E}\Big[\big(\varphi * \varkappa_n^t\big)\big(x_1 - \zeta_n^1(t), x_2 - \zeta_n^2(t)\big)\Big], \tag{22}$$

где функция $\varkappa_n^t(x_1, x_2)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p_1,p_2) = \exp\Big\{ -nt\sum_{k=1}^{[\varrho]} \frac{i^k}{n^{k/\varrho}} \sum_{j=0}^{k} \mu_k^j \big(p_1\cos(b\ln n) + p_2\sin(b\ln n)\big)^j \times\big(-p_1\cos(b\ln n) + p_2\sin(b\ln n)\big)^{k-j}\Big\}.$$

Так же как и в (11), функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p_1, p_2)$ – это быстро убывающая функция.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in W_2^{[\varrho]+l+1}(\mathbb{R}^2)$, $l \geqslant 0$. *Тогда*

$$\|P^t\varphi - P_n^t\varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}},$$

где P^t, P_n^t *– полугруппы операторов, определенные* (22), *как и ранее* $\{\varrho\} = \varrho - [\varrho]$.

Доказательство. Введем обозначения для некоторых операторов. Именно, обозначим $A = A_n$, $B = \mathcal{L} - A_n$, где оператор A_n действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ как

$$A_n\psi(x) = n\int_0^\infty \Big(\psi\big(x_1 - \tfrac{y\cos(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}, x_2 - \tfrac{y\sin(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}\big) - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-y)^j}{n^{aj}j!} D^j\psi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y - b\ln n)\ \sin(\gamma\ln y - b\ln n)]\Big)\,dF(y).$$

Тогда

$$A + B = \mathcal{L}.$$

Для оценки нормы воспользуемся (12). Заметим, прежде всего, что для любого положительного k справедливы неравенства

$$\big\|e^{tA}\big\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1, \tag{23}$$

$$\Big\|e^{t(A+B)}\Big\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{24}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\varrho]+1}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\begin{aligned}
&\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)\\
&=\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\,dp_1\,dp_2\Big(\int\limits_0^\infty\Big(\varphi(x_1-y\cos(\gamma\ln y),x_2-y\sin(\gamma\ln y))\\
&-\sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{(-1)^jy^j}{j!}D^j\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y)\ \sin(\gamma\ln y)]\Big)\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} \qquad (25)\\
&-n\int\limits_0^\infty\Big(\varphi\big(x_1-\tfrac{y\cos(\gamma\ln y-b\ln n)}{n^a},x_2-\tfrac{y\sin(\gamma\ln y-b\ln n)}{n^a}\big)\\
&-\sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{(-y)^j}{n^{aj}j!}D^j\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y-b\ln n)\sin(\gamma\ln y-b\ln n)]\Big)\,dF(y)\Big).
\end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Фубини для замены пределов интегрирования и получим, что $\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)=h_n(p_1,p_2)\widehat{\varphi}(p_1,p_2)$, где

$$\begin{aligned}
h_n(p_1,p_2)=\int\limits_0^\infty\Big[e^{ig(y)}-\sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{(ig(y))^j}{j!}\Big]\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}&\\
-n\int\limits_0^\infty\Big[e^{ig(yn^{-a})}-\sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{(ig(yn^{-a}))^j}{j!}\Big]\,dF(y),&
\end{aligned}\qquad (26)$$

а

$$g(y)=g(y,p_1,p_2)=y\big(p_1\cos(\gamma\ln y)+p_2\sin(\gamma\ln y)\big). \qquad (27)$$

Обозначим

$$S(y)=e^{iy}-\sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{i^jy^j}{j!}.$$

Тогда получаем, что

$$h_n(p_1,p_2)=\int\limits_0^\infty S(g(y))\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}-n\int\limits_0^\infty S(g(yn^{-a}))dF(y). \qquad (28)$$

Далее мы будем использовать следующие неравенства:

$$\begin{gathered}
|g(y)|\leqslant|p|\cdot|y|,\ y\in\mathbb{R};\quad |g'(y)|\leqslant C(\gamma)|p|,\ y\in\mathbb{R};\\
|S(y)|\leqslant C(\varrho)|y|^{[\varrho]+1},\ |y|\leqslant 1;\quad |S'(y)|\leqslant C(\varrho)|y|^{[\varrho]},\ |y|\leqslant 1.
\end{gathered}\qquad (29)$$

Вернемся к оценке $h_n(p_1,p_2)$. Имеем

$$
\begin{aligned}
h(p_1,p_2) = &\int\limits_0^\infty S(g(y))\,d\Big(\frac{1}{y^\varrho}\Big)\\
&- n\int\limits_0^1 S(g(yn^{-a}))\,dF(y) + n\int\limits_1^\infty S(g(yn^{-a}))\,d\big(1-F(y)\big)\\
&= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\varrho y^\varrho} S'(g(y))g'(y)\,dy - nS(g(n^{-a}))F(1)\\
&+ n\int\limits_0^1 F(y)S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy - n(1-F(1))S(g(n^{-a}))\\
&- n\int\limits_1^\infty (1-F(y))S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy\\
&= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\varrho y^\varrho} S'(g(y))g'(y)\,dy + n\int\limits_0^1 F(y)S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy\\
&- n\int\limits_1^\infty (1-F(y))S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy - nS(g(n^{-a}))\\
&= I + I_1 + I_2 + I_4.
\end{aligned}
$$

Сначала оценим I_4. Из (29) следует, что

$$
|I_4| \leqslant C(\alpha)n|p|^{[\varrho]+1}n^{-([\varrho]+1)a} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.
$$

Для оценки I_1 также воспользуемся неравенствами (29):

$$
|I_1| \leqslant C(\alpha)n|p|n^{-a}|p|^{[\varrho]}n^{-a[\varrho]} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.
$$

Осталось оценить I_2. Для этого воспользуемся условием на $1-F(y)$:

$$\begin{aligned}I_2 &= -n\int_1^\infty (1-F(y))S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy\\ &= -n\int_1^\infty \frac{1}{y^\varrho}S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy\\ &\quad - n\int_1^\infty \frac{1}{y^\varrho}h(y)S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy = I_2^1 + I_2^2.\end{aligned}$$

В интеграле I_2^1 сделаем замену переменной $w = yn^{-a}$ и получим

$$I_2^1 = -\int_{n^{-a}}^\infty \frac{1}{y^\varrho}S'(g(y))g'(y)\,dy = -I + \int_0^{n^{-a}} \frac{1}{y^\varrho}S'(g(y))g'(y)\,dy. \tag{30}$$

Оценим интеграл в правой части (30):

$$\left|\int_0^{n^{-a}} \frac{1}{y^\varrho}S'(g(y))g'(y)\,dy\right| \leqslant C(\alpha)|p|^{[\varrho]+1}\int_0^{n^{-a}} \frac{dy}{y^{1-\{\varrho\}}} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.$$

Осталось оценить I_2^2.

$$|I_2^2| \leqslant C(\alpha)n|p|^{[\varrho]+1}n^{-a([\varrho]+1)}\int_1^\infty \frac{dy}{y^{\{\varrho\}+\delta}} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.$$

В итоге получаем, что справедлива оценка

$$|h_n(p_1,p_2)| \leqslant C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\begin{aligned}\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)|^2\,dp_1\,dp_2\\ &\leqslant C(\alpha)\frac{1}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}\int_{\mathbb{R}}(1+|p|^{2(l+[\varrho]+1)})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2\,dp_1\,dp_2\\ &\leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\varrho\})/\varrho}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\varrho]+1}}.\end{aligned} \tag{31}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (23)–(24) и (31). □

§3. Симметричный случай.

В данном параграфе будем рассматривать только α, удовлетворяющие условию

$$\varrho = \varrho(\alpha) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (4k, 4k+2). \tag{32}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_s u, \tag{33}$$

где оператор $\mathcal{L}_s$ – симметричный оператор типа Римана–Лиувилля (6). Для уравнения (33) рассмотрим задачу Коши

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \tag{34}$$

где функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Введем следующие полугруппы операторов:

$$P_s^t = e^{t\mathcal{L}_s}; \quad \big(P_\varepsilon^t \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\Big[\big(\varphi * \omega_\varepsilon^t\big)\big(x_1 - \xi_1^\varepsilon(t), x_2 - \xi_2^\varepsilon(t)\big)\Big], \tag{35}$$

где

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_1^\varepsilon(t) + i\xi_2^\varepsilon(t) = \iint\limits_{\substack{|x|>\varepsilon,\\ 0\leqslant s\leqslant t}} x e^{i\gamma \ln |x|} \nu(ds, dx),$$

а $\nu(ds, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $(0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с интенсивностью вида

$$\mathbb{E}\nu(ds, dx) = \Pi(ds, dx) = ds\tfrac{dx}{|x|^{1+\varrho}}.$$

Функция $\omega_\varepsilon^t(x_1, x_2)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p_1, p_2) = \exp\Bigg(-t \int\limits_{|y|>\varepsilon} \Bigg(\sum_{j=1}^{[\varrho/2]} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!} \big(p_1 \cos(\gamma \ln y) + p_2 \sin(\gamma \ln y)\big)^{2j}\Bigg) \frac{dy}{|y|^{1+\varrho}}\Bigg). \tag{36}$$

Как и выше, у семейства случайных величин $\xi^\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$ и $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p_1, p_2)$ – быстро убывающая функция.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{4k+l+2}(\mathbb{R}^2)$, $l \geqslant 0$. *Тогда*

$$\|P_s^t\varphi - P_\varepsilon^t\varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct\varepsilon^{4k+2-\varrho}\|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}},$$

где P_s^t, P_ε^t *– полугруппы операторов, определенные* (35), $k = [\varrho/4]$.

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся формулой (12).

Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \mathcal{L}_s - \mathrm{A}_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ как

$$A_\varepsilon\psi(x) = \int\limits_{|y|>\varepsilon} \Big(\psi(x_1 - y\cos(\gamma\ln|y|), x_2 - y\sin(\gamma\ln|y|)) \\ - \sum_{j=0}^{[\varrho/2]} \frac{y^{2j}}{(2j)!} D^{2j}\psi(x_1, x_2)[\cos(\gamma\ln|y|)\ \sin(\gamma\ln|y|)]\Big) \frac{\varrho dy}{|y|^{1+\varrho}}.$$

В этих обозначениях

$$A + B = \mathcal{L}_s.$$

Заметим, что для любого положительного k справедливы неравенства для операторных норм

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1, \tag{37}$$

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{38}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\varrho]+2}\to W_2^l}$. Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(x)$:

$$\widehat{B\varphi}(p_1, p_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Bigg(2\int\limits_0^\varepsilon \Big(\varphi(x_1 - y\cos(\gamma\ln y), x_2 - y\sin(\gamma\ln y)) \\ - \sum_{j=0}^{[\varrho/2]} \frac{y^{2j}}{(2j)!} D^{2j}\varphi(x_1, x_2)[\cos(\gamma\ln|y|)\ \sin(\gamma\ln|y|)]\Big) \frac{dy}{y^{1+\varrho}}\Bigg) \\ \times e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\,dx_1\,dx_2.$$

Воспользуемся теоремой Фубини и поменяем пределы интегрирования. Имеем

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) = 2\int\limits_0^{\varepsilon}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(\varphi(x_1 - y\cos(\gamma\ln y), x_2 - y\sin(\gamma\ln y)) - \sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{y^{2j}}{(2j)!}D^{2j}\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln|y|)\ \sin(\gamma\ln|y|)]\Big) \times e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\,dx_1\,dx_2\Bigg)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Из формул для преобразования Фурье сдвига и производной следует, что

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) = h_\varepsilon(p_1,p_2)\widehat{\varphi}(p_1,p_2),$$

где

$$h_\varepsilon(p_1,p_2) = 2\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\cos\big(y(p_1\cos(\gamma\ln y) + p_2\sin(\gamma\ln y))\big) - \sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{y^{2j}}{(2j)!}\sum_{q=0}^{j}C_{2j}^{2q}(ip_1)^{2q}(ip_2)^{2j-2q}\cos^{2q}(\gamma\ln y)\sin^{2j-2q}(\gamma\ln y)\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Пусть $p_1 = r\cos\varphi$, $p_2 = r\sin\varphi$, $r \geqslant 0$, $\varphi\in[0,2\pi)$. Имеем

$$h_\varepsilon(p_1,p_2) = 2\int\limits_0^{r\varepsilon}\Big(\cos\big(ry\cos(\varphi-\gamma\ln y)\big) - \sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{(-1)^j r^{2j}y^{2j}}{(2j)!}\cos^{2j}(\varphi-\gamma\ln y)\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Сделаем в последней формуле замену переменной $w = ry$. Тогда

$$h_\varepsilon(p_1,p_2) = 2r^{\varrho}\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\cos\big(w\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big) - \sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{(-1)^j w^{2j}}{(2j)!}\cos^{2j}(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\Big)\frac{dw}{w^{1+\varrho}}.$$

Если $r < \frac{1}{\varepsilon}$, то, оценивая в последней формуле остаточный член в разложении Тейлора, получаем

$$
\begin{aligned}
&r^{\varrho}\Big|\int\limits_{0}^{r\varepsilon}\Big(\cos\big(w\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big)\\
&-\sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{(-1)^j w^{2j}}{(2j)!}\cos^{2j}(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\Big)\frac{dw}{w^{1+\varrho}}\Big|\\
&\leqslant r^{\varrho}\int\limits_{0}^{r\varepsilon} w^{2+4k}\frac{dw}{w^{1+\varrho}}\leqslant Cr^{\varrho+2+4k-\varrho}\varepsilon^{2+4k-\varrho}=C|p|^{4k+2}\varepsilon^{4k+2-\varrho}.
\end{aligned}
$$

В случае $r > \frac{1}{\varepsilon}$ имеем

$$
\begin{aligned}
\big|h_\varepsilon(p_1,p_2)\big|\leqslant 2|p|^{\varrho}\cdot\int\limits_{0}^{\infty}\Big|&\cos\big(w\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big)\\
&-\sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{(-1)^j w^{2j}}{(2j)!}\cos^{2j}(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\Big|\frac{dw}{w^{1+\varrho}}\\
&\leqslant C|p|^{\varrho}\Big(\int\limits_{0}^{1} w^{1-2\{\varrho/2\}}\,dw+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dw}{w^{1+2\{\varrho/2\}}}\Big)=C(\varrho)|p|^{\varrho}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\Big\|\widehat{B\varphi}\Big\|^2_{W_2^l}&=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)|^2\,dp_1\,dp_2\\
&\leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\varrho)}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2(4k+2)}\,dp_1\,dp_2\\
&+C\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2\varrho}dp_1dp_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
\left\|\widehat{B\varphi}\right\|^2_{W_2^l} &\leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\varrho)} \int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} (1+|p|^{2(l+4k+2)})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2\,dp_1\,dp_2 \\
&+ C\varepsilon^{2(4k+2-\varrho)} \int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} (1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2\varrho+2(4k+2-\varrho)}\,dp_1\,dp_2 \qquad (39)\\
&\leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\varrho)}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k+2}}\,.
\end{aligned}
$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (37)–(39). □

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+4k+2}(\mathbb{R}^2)$ при некотором $l>0$, то функция $u_\varepsilon(t,x_1,x_2)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbb{R}^2)$ приближает решение задачи Коши (33)–(34). Таким образом, мы получаем вероятностное представление решения задачи Коши (33)–(34)

$$
u(t,x_1,x_2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\,\mathbb{E}\Big[\big(\varphi*\omega_\varepsilon^t\big)\big(x_1-\xi_1^\varepsilon(t),x_2-\xi_2^\varepsilon(t)\big)\Big]. \qquad (40)
$$

Далее мы покажем, что в формуле (40) случайный процесс $\xi^\varepsilon(t)$ можно заменить случайным блужданием достаточно общего вида.

Пусть $\{X_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины X_1, а через $F(x)$ – функцию распределения. Предположим, что распределение случайной величины X_1 при $x>1$ удовлетворяет условию

$$
F(-x) = 1-F(x) = \frac{1}{x^\varrho}(1+h(x)), \qquad (41)
$$

причем функция

$$
|h(x)| \leqslant \frac{C}{x^\delta},
$$

где

$$
\delta > 1-\{\varrho\}. \qquad (42)
$$

Для $m<2k$, $j\leqslant m$ через μ_m^j обозначим следующее математическое ожидание:

$$
\mu_m^j = \mathbb{E}X_1^{2m}\cos^{2j}(\gamma\ln|X_1|)\sin^{2m-2j}(\gamma\ln|X_1|). \qquad (43)
$$

Пусть $\eta(t)$, $t\in[0,\infty)$, – независимый от последовательности $\{X_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t > 0$, полагая

$$\zeta_n(t) = \zeta_{1,n}(t) + i\zeta_{2,n}(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=0}^{\eta(nt)} X_j e^{i\gamma \ln|X_j|}. \tag{44}$$

Заметим, что при $k > 2$ процесс $\zeta_n(t)$ не имеет слабого предела при $n \to \infty$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим полугруппу операторов

$$\big(P_n^t\varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\Big[\big(\varphi * \varkappa_n^t\big)\big(x_1 - \zeta_n^1(t), x_2 - \zeta_n^2(t)\big)\Big], \tag{45}$$

где функция $\varkappa_n^t(x_1, x_2)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p_1, p_2) = \exp\Big(- nt \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m}{n^{2m/\varrho}} \sum_{j=0}^{m} \mu_m^j \big(p_1\cos(b\ln n) + p_2\sin(b\ln n)\big)^{2j}$$
$$\times \big(p_1\cos(b\ln n) - p_2\sin(b\ln n)\big)^{2m-2j}\Big).$$

Также как и в (11), функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p_1, p_2)$ – это быстро убывающая функция.

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbb{R}^2)$, $l \geqslant 0$. Тогда*

$$\|P_s^t\varphi - P_n^t\varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}(\mathbb{R})}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}},$$

где P_s^t, P_n^t – полугруппы операторов, определенные в (35), (45), *как и ранее $k = [\varrho/4]$.*

Доказательство. Введем обозначения для некоторых операторов. Именно, обозначим $A = A_n$, $B = \mathcal{L}_s - A_n$, где оператор A_n действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ как

$$A_n\psi(x) = n\int_{\mathbb{R}} \Big(\psi\big(x_1 - \tfrac{y\cos(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}, x_2 - \tfrac{y\sin(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}\big)$$
$$-\sum_{j=0}^{2k}\frac{y^{2j}}{n^{2ja}(2j)!}D^{2j}\psi(x_1, x_2)[\cos(\gamma\ln|y| - b\ln n)\sin(\gamma\ln|y| - b\ln n)]\Big)\, dF(y).$$

Тогда

$$A + B = \mathcal{L}_s.$$

Для оценки нормы воспользуемся (12). Заметим, прежде всего, что для любого положительного k справедливы неравенства

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1, \tag{46}$$

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1. \tag{47}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+4k+2}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)=\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\,dp_1\,dp_2$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\Big(\varphi(x_1-y\cos(\gamma\ln|y|),x_2-y\sin(\gamma\ln|y|))$$

$$-\sum_{j=0}^{2k}\frac{y^{2j}}{(2j)!}D^{2j}\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln|y|)\ \sin(\gamma\ln|y|)]\Big)\frac{\varrho dy}{|y|^{1+\varrho}}$$

$$-n\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\varphi\big(x_1-\tfrac{y\cos(\gamma\ln y-b\ln n)}{n^a},x_2-\tfrac{y\sin(\gamma\ln y-b\ln n)}{n^a}\big)$$

$$-\sum_{j=0}^{2k}\frac{y^{2j}}{n^{2ja}(2j)!}D^{2j}\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y-b\ln n)\ \sin(\gamma\ln y-b\ln n)]\Big)\,dF(y)\Bigg).$$

Воспользуемся теоремой Фубини для замены пределов интегрирования и получим, что

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)=h_n(p_1,p_2)\widehat{\varphi}(p_1,p_2),$$

где

$$h_n(p_1,p_2)=\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\Big[\cos\big(g(y)\big)-\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^j(g(y))^{2j}}{(2j)!}\Big]\frac{\varrho dy}{|y|^{1+\varrho}}$$

$$-n\int\limits_0^\infty\Big[\cos\big(g(yn^{-a})\big)-\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^j(g(yn^{-a}))^{2j}}{(2j)!}\Big]\,dF(y),$$

где функция g определяется (27).

Обозначим

$$S(y) = \cos y - \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!}.$$

Тогда получаем, что в силу симметрии

$$h_n(p_1, p_2) = 2 \int_0^\infty S(g(y)) \frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} - 2n \int_0^\infty S(g(yn^{-a}))\, dF(y). \tag{48}$$

Далее мы будем использовать следующие неравенства:

$$\begin{gathered} |g(y)| \leqslant |p| \cdot |y|,\ y \in \mathbb{R}; \quad |g'(y)| \leqslant C(\gamma)|p|,\ y \in \mathbb{R}; \\ |S(y)| \leqslant C(\varrho)|y|^{4k+2},\ |y| \leqslant 1; \quad |S'(y)| \leqslant C(\varrho)|y|^{4k+1},\ |y| \leqslant 1. \end{gathered} \tag{49}$$

Вернемся к оценке $h_n(p_1, p_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} h_n(p_1, p_2) = \int_0^\infty S(g(y))\, d\Big(\frac{1}{y^\varrho}\Big) \\ &- n \int_0^1 S(g(yn^{-a}))\, dF(y) + n \int_1^\infty S(g(yn^{-a}))\, d\big(1 - F(y)\big) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{y^\varrho} S'(g(y)) g'(y)\, dy - nS(g(n^{-a}))F(1) \\ &+ n \int_0^1 F(y) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a}\, dy - n(1 - F(1)) S(g(n^{-a})) \\ &- n \int_1^\infty (1 - F(y)) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a}\, dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{y^\varrho} S'(g(y)) g'(y)\, dy + n \int_0^1 F(y) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a}\, dy \\ &- n \int_1^\infty (1 - F(y)) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a}\, dy - nS(g(n^{-a})) \\ &= I + I_1 + I_2 + I_4. \end{aligned}$$

Сначала оценим I_4. Из (49) следует, что

$$|I_4| \leqslant C(\alpha)n|p|^{4k+2}n^{-(4k+2)a} = C(\alpha)\frac{|p|^{4k+2}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

Для оценки I_1 также воспользуемся неравенствами (49):

$$|I_1| \leqslant C(\alpha)n|p|n^{-a}|p|^{4k+1}n^{-(4k+1)a} = C(\alpha)\frac{|p|^{4k+2}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

Осталось оценить I_2. Из (41) следует, что

$$\begin{aligned} I_2 &= -n\int_1^\infty (1-F(y))S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy \\ &= -n\int_1^\infty \frac{1}{y^\varrho}S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy \\ &\quad - n\int_1^\infty \frac{1}{y^\varrho}h(y)S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}\,dy = I_2^1 + I_2^2. \end{aligned}$$

В интеграле I_2^1 сделаем замену переменной $w = yn^{-a}$ и получим

$$I_2^1 = -\int_{n^{-a}}^\infty \frac{1}{y^\varrho}S'(g(y))g'(y)\,dy = -I + \int_0^{n^{-a}} \frac{1}{y^\varrho}S'(g(y))g'(y)\,dy. \tag{50}$$

Оценим интеграл в правой части (50):

$$\Bigl|\int_0^{n^{-a}} \frac{1}{y^\varrho}S'(g(y))g'(y)\,dy\Bigr| \leqslant C(\alpha)|p|^{4k+2}\int_0^{n^{-a}} \frac{dy}{y^{\varrho-4k-1}} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

Осталось оценить I_2^2:

$$|I_2^2| \leqslant C(\alpha)n|p|^{4k+2}n^{-a(4k+2)}\int_1^\infty \frac{dy}{y^{\varrho-4k-1+\delta}} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

В итоге получаем, что справедлива оценка

$$|h_n(p_1,p_2)| \leqslant C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\begin{aligned}
\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)|^2\, dp_1\, dp_2 \\
&\leqslant C(\alpha)\frac{1}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Big(1+|p|^{2(l+4k+2)}\Big)|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2\, dp_1\, dp_2 \qquad (51)\\
&\leqslant \frac{C}{n^{2(4k+2-\varrho)/\varrho}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k+2}}.
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (46)–(47) и (51). $\square$

Список литературы

1. И. А. Алексеев, *Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости, II.*, принято к печати в журнал Теория вероятностей и ее применения.
2. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва, 1972.
3. М. В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана–Лиувилля.* — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 3 (2013), 417–438.
4. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями*, Наука, Москва, 1964.
5. K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

Alexeev I. A. Probabilistic approximation of a Riemann–Liouville type operator with a stability index greater than two.

In this paper, we introduce Riemann-Liouville type operators for the complex index α. A probabilistic approximation of the solution of the Cauchy problem for an evolutionary equation with a Riemann–Liouville type operator for a complex α is constructed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербург,
Институт проблем
передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН,
Москва, Россия
E-mail: vanyalexeev@list.ru

Поступило 2 сентября 2022 г.