Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 509, 2021 г.

Н. В. Харук

НУЛЕВЫЕ МОДЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ДВУХПЕТЛЕВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ В ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

§1. Введение

Теория перенормировок играет фундаментальную роль в квантовой теории поля, так как позволяет придать физический смысл расходящимся величинам. Несмотря на значительные успехи в данной области, изучение новых подходов и их свойств остается актуальной задачей.

Метод теплового ядра впервые был описан в работе [1] и с тех пор нашел свое применение не только в теории перенормировок [2], но и в различных областях теоретической и математической физики, см. теорию аномалий [3] и теорему Атьи–Зингера–Патоди [4]. Основная идея метода для теории перенормировок заключается в представлении функции Грина интегралом по вспомогательной переменной (собственному времени) от решения уравнения теплопроводности. Такой подход позволяет получить асимптотику около диагонали (при $x \sim y$) в явном виде.

В данной работе изучаются функции Грина для двух операторов Лапласа, полученные с помощью метода теплового ядра, в пространстве с размерностью $d = 4$. Мы показываем, что к функции Грина можно добавить специальный вклад – нулевые моды оператора Лапласа. Далее мы изучаем двухпетлевой вклад в теорию Янга–Миллса с учетом дополнительного сдвига. Прямыми вычислениями мы показываем, что в этом случае второй коэффициент β-функции инвариантен относительно добавления нулевых мод.

Ключевые слова: теория Янга–Миллса, ренормгруппа, функция Грина, тепловое ядро, двухпетлевые вычисления, нулевые моды.

Работа выполнена за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН No. 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы приводим краткое описание теории Янга–Миллса и выписываем выражения, которые дают вклады в двухпетлевые расчеты. Также обсуждается регуляризация с импульсом обрезания и сдвиг функции Грина на нулевые моды оператора Лапласа. Раздел 3 содержит описание разложения теплового ядра и общее выражение для функции Грина. В разделе 4 приводится явный вид функций Грина для двух операторов Лапласа с учетом добавления вкладов, соответствующих нулевым модам. В разделе 5 для этих вкладов выполнены явные двухпетлевые вычисления. В заключении приведены краткие комментарии.

§2. Постановка задачи

Рассмотрим теорию Янга–Миллса в четырехмерном пространстве, см. [5]. Пусть G – компактная полупростая группа Ли, а $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Нормируем генераторы t^a алгебры $\mathfrak{g}$ с учетом следующих равенств

$$[t^a, t^b] = f^{abc}t^c, \qquad \mathrm{tr}(t^a t^b) = -2\delta^{ab}, \tag{1}$$

где $a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$, и f^{abc} – антисимметричные структурные константы. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Мы будем рассматривать присоединенное представление группы, тогда структурные константы удовлетворяют следующим соотношениям

$$f^{cka}f^{dka} = c_2\delta^{cd}, \quad f^{kca}f^{aed}f^{dgk} = -\frac{c_2}{2}f^{ceg}, \tag{2}$$

где c_2 – нормировочная константа для группы Ли G.

Определим гладкое поле Янга–Миллса $A_\mu = A^a_\mu t^a$ и соответствующую напряженность поля $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}t^a$. Тогда классическое действие теории Янга–Миллса имеет вид

$$S[A] = \frac{1}{4g^2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где g^2 – константа связи. Далее используем формализм фонового поля [6, 7], согласно которому мы должны сделать следующую замену: $A_\mu = B_\mu + g a_\mu$, где B_μ – фоновое поле.

Для нахождения поправок необходимо воспользоваться функциональным интегралом и теорией возмущений, что можно увидеть в работе [8]. Мы сформулируем только результат. Для этого рассмотрим два оператора Лапласа:

$$A_0 = -D_\mu D_\mu, \qquad A_{1\mu\nu} = -D_\alpha D_\alpha \delta_{\mu\nu} - 2F_{\mu\nu}, \tag{4}$$

где $D_\mu = \partial_\mu + B_\mu$ – ковариантная производная. Этим операторам сопоставим функции Грина G_0 и $G_{1\mu\nu}$ соответственно.

В дальнейшем мы будем рассматривать двухпетлевые вклады в теории Янга–Миллса. Для этого введем дополнительное вспомогательное обозначение

$$(A, B, C) = f^{ace} A^{ab} B^{cd} C^{eg} f^{bdg}. \tag{5}$$

Тогда, согласно работе [8], вторая поправка для квантового эффективного действия теории Янга–Миллса представима в виде суммы шести слагаемых:

$$\mathcal{J}_1 = 2g^2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4y \, (G_{1\mu\alpha}, G_{1\nu\beta}\overleftarrow{D}_\alpha, \overrightarrow{D}_\nu G_{1\mu\beta})(x,y); \tag{6}$$

$$\mathcal{J}_2 = -g^2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4y \, (G_{1\mu\alpha}, G_{1\nu\beta}\overleftarrow{D}_\alpha, \overrightarrow{D}_\mu G_{1\nu\beta})(x,y); \tag{7}$$

$$\mathcal{J}_3 = -\frac{g^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4y \, (G_{1\mu\alpha}, \overrightarrow{D}_\nu G_{1\nu\beta}, G_{1\mu\alpha}\overleftarrow{D}_\beta)(x,y); \tag{8}$$

$$\mathcal{J}_4 = -\frac{g^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4y \, (G_{1\mu\alpha}, \overrightarrow{D}_\nu G_{1\nu\alpha}, G_{1\mu\beta}\overleftarrow{D}_\beta)(x,y); \tag{9}$$

$$\mathcal{J}_5 = \frac{g^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4y \, (G_{1\mu\alpha}, G_0^*\overleftarrow{D}_\alpha, \overrightarrow{D}_\mu G_0)(x,y); \tag{10}$$

$$\mathcal{J}_6 = -\frac{g^2}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4y \bigg(f^{cab} f^{cde} G_{1\mu\nu}^{ab}(y,y) G_{1\mu\nu}^{de}(y,y)$$

$$+ f^{cab} f^{cde} G_{1\mu\nu}^{ae}(y,y) G_{1\mu\nu}^{db}(y,y) + f^{cab} f^{cde} G_{1\mu\mu}^{ad}(y,y) G_{1\nu\nu}^{be}(y,y) \bigg). \tag{11}$$

Здесь $\overrightarrow{D}_\alpha$ и $\overleftarrow{D}_\alpha$ – правая и левая ковариантные производные, действия которых на функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ определяются равенствами

$$\overrightarrow{D}_{x^\mu} f(x) = \partial_{x^\mu} f(x) + B_\mu(x) f(x), \quad f(x)\overleftarrow{D}_{x^\mu} = \partial_{x^\mu} f(x) - f(x) B_\mu(x).$$

Ясно, что выражения (6)-(11) могут содержать расходящиеся интегралы, поэтому мы будем использовать регуляризацию с импульсом обрезания в координатном пространстве, которая сводится к следующему правилу:

$$r \to r_\Lambda = \begin{cases} r, & 1/\Lambda \leqslant r; \\ 1/\Lambda, & 0 \leqslant r < 1/\Lambda, \end{cases} \tag{12}$$

где Λ – параметр регуляризации.

Сделаем важное замечание. К функции Грина $G(x,y)$ можно добавить слагаемое, соответствующее "нулевым модам" оператора Лапласа $A(x)$, то есть

$$G(x,y) \to G(x,y) + l(x,y), \tag{13}$$

где $l(x,y)$ – функция, такая что $A(x)l(x,y) = 0$. В данной работе мы хотим изучить вопрос инвариантности расходящегося двухпетлевого вклада в эффективное действие теории Янга–Миллса относительно такого сдвига. В качестве $l(x,y)$ мы выберем специальное решение, которое может быть получено на основе коэффициентов Сили–деВитта.

§3. Тепловое ядро

Для двухпетлевых вычислений нам необходимо найти явное асимптотическое разложение функции Грина. Для этого воспользуемся методом теплового ядра, упомянутого выше. Отметим, что мы работаем в евклидовом пространстве с метрическим тензором $g^{\mu\nu}(x) = \delta^{\mu\nu}$. Тогда тепловое ядро $K(x,y;\tau)$ является решением задачи

$$\begin{cases} (\partial_\tau + A(x))K(x,y;\tau) = 0; \\ K(x,y;0) = \delta(x-y), \end{cases} \tag{14}$$

где τ – собственное время.

В четырехмерном пространстве при достаточно малых значениях собственного времени τ, тепловое ядро можно искать в виде асимптотического ряда [9]

$$K(x,y;\tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^2} e^{-r^2/4\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \mathfrak{a}_k(x,y), \tag{15}$$

где $\mathfrak{a}_k(x,y)$ – коэффициенты Сили–деВитта, и $r = |x-y|$. Подставляя такой анзатц в уравнение (14), получаем следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов:

$$(x-y)^\mu D_{x^\mu} \mathfrak{a}_0(x,y) = 0, \ \mathfrak{a}_0(x,x) = 1; \tag{16}$$

$$(k + (x-y)^\mu D_{x^\mu})\mathfrak{a}_k(x,y) = -A(x)\mathfrak{a}_{k-1}(x,y), \ k > 0. \tag{17}$$

Согласно методу теплового ядра, выражение для функции Грина $\mathcal{G}(x,y)$ имеет вид

$$\mathcal{G}(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^+} d\tau\, K(x,y;\tau). \tag{18}$$

Однако, при получении ответа путем явного интегрирования набора коэффициентов Сили–деВитта не достаточно (см. [10]). Поэтому мы постараемся избежать этой проблемы и будем искать сразу разложение для функции Грина в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y) = \frac{\mathfrak{a}_0(x,y)}{4\pi^2} - \frac{\ln(r^2\mu^2/2)}{(4\pi)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r^2/2)^k}{k!2^k}\mathfrak{a}_{k+1}(x,y) \\ + \frac{1}{(4\pi)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r^2/4)^{k+1}H_{k+1}}{(k+1)!}\mathfrak{a}_{k+2}(x,y) + \frac{1}{(4\pi)^2}\Theta(x,y),\end{aligned} \tag{19}$$

где H_k – гармонические числа, μ – вспомогательный размерный параметр. Функция $\Theta(x,y)$ является решением уравнения

$$A(x)\Theta(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r^2/2)^k}{k!2^k}\mathfrak{a}_{k+2}(x,y). \tag{20}$$

Лемма 3.1. *Для функции $\Theta(x,y)$ верно представление*

$$\Theta(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-r^2/4)^k f_k(x,y)}{k!}, \tag{21}$$

где коэффициенты $f_k(x,y)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}&f_0(x,y) = 0,\\ &\mathfrak{a}_{k+2}(x,y) + (k+2+(x-y)^\mu D_\mu)f_{k+1}(x,y) = -A(x)f_k(x,y), \quad k \geqslant 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Доказательство. Для начала заметим, что

$$\begin{aligned}A(x)\left(r^{2k}f_k(x,y)\right) = -kr^{2(k-1)}\left(4k+4+4(x-y)^\mu D_\mu\right)f_k(x,y) \\ - r^{2k}a_{k+2}(x,y) - r^{2k}\left(k+2+(x-y)^\mu D_\mu\right)f_{k+1}(x,y),\end{aligned} \tag{23}$$

где мы воспользовались соотношениями (22). Тогда, действуя оператором A на правую часть равенства (21) и выполняя пересуммирование, получаем правую часть равенства (20), что и доказывает утверждение. □

Лемма 3.2. *Пусть $A(x)$ – оператор Лапласа. Верно следующее равенство*

$$A(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r^2/2)^k}{k!2^k}\mathfrak{a}_{k+1}(x,y)=0. \tag{24}$$

Доказательство. Доказательство проводится прямым вычислением с использованием формул (16) и (17). □

Из последней леммы следует явный вид нулевых мод для оператора Лапласа. Тогда, как говорилось выше, мы можем рассматривать функцию Грина со сдвигом:

$$\mathcal{G}(x,y)\to\widetilde{\mathcal{G}}(x,y)=\mathcal{G}(x,y)+C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r^2/2)^k}{k!2^k}\mathfrak{a}_{k+1}(x,y), \tag{25}$$

где C – произвольная константа.

§4. Асимптотика функции Грина

Для дальнейших вычислений необходимо выписать явный вид функций Грина. Напомним, что мы работаем с двумя функциями Грина: G_0 и $G_{1\mu\nu}$, соответствующими операторам (4). Рассмотрим сдвинутые на нулевые моды функции:

$$\widetilde{G}_{1\mu\nu}(x,y)=G_{1\mu\nu}(x,y)+\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r^2/2)^k}{k!2^k}a_{k+1\mu\nu}(x,y); \tag{26}$$

$$\widetilde{G}_0(x,y)=G_0(x,y)+\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r^2/2)^k}{k!2^k}a_{k+1}(x,y), \tag{27}$$

где α и β – произвольные числовые коэффициенты.

Асимтотические разложения для таких функций, полученные с помощью (19) и Леммы 3.1, записывается в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{1\mu\nu}&=\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi^2r^2}-\frac{\ln(r^2\mu^2/2)}{16\pi^2}a_{1\mu\nu}+\frac{\ln(r^2\mu^2/2)r^2}{64\pi^2}a_{2\mu\nu}-\frac{r^2}{16\pi^2}a_{2\mu\nu}\\&-\frac{r^2}{64\pi^2}f_{1\mu\nu}+\alpha a_{1\mu\nu}-\frac{\alpha r^2}{4}a_{2\mu\nu}+o(r^3),\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_0&=\frac{1}{4\pi^2r^2}-\frac{\ln(r^2\mu^2/2)}{16\pi^2}a_1+\frac{\ln(r^2\mu^2/2)r^2}{64\pi^2}a_2-\frac{r^2}{16\pi^2}a_2\\&-\frac{r^2}{64\pi^2}f_1+\beta a_1-\frac{\beta r^2}{4}a_2+o(r^3),\end{aligned} \tag{29}$$

где мы для краткости опустили аргументы. Возникающие в разложении коэффициенты были вычислены в [11–13] и имеют следующий вид:

$$a_{1\mu\nu}(x,y) = 2F_{\mu\nu} + (x-y)^{\sigma_1}\left(\Delta_{\sigma_1}F_{\mu\nu} + \frac{1}{6}\delta_{\mu\nu}\Delta_\rho F_{\sigma_1\rho} - 2B_{\sigma_1}F_{\mu\nu}\right)$$
$$+ (x-y)^{\sigma_1\sigma_2}\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{12}F_{\sigma_1\rho}F_{\sigma_2\rho} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{24}\Delta_{(\rho}\Delta_{\sigma_1)}F_{\sigma_2\rho} + \frac{1}{3}\Delta_{\sigma_1}\Delta_{\sigma_2}F_{\mu\nu}\right.$$
$$\left.-\frac{\delta_{\mu\nu}}{6}B_{\sigma_1}\Delta_\rho F_{\sigma_2\rho} - (B_{\sigma_1}\overleftarrow{D}_{\sigma_2})F_{\mu\nu} - B_{\sigma_1}\Delta_{\sigma_2}F_{\mu\nu}\right) + O(|x-y|^3); \quad (30)$$

$$a_{2\mu\nu}(x,y) = 2F_{\mu\rho}F_{\rho\nu} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{12}F_{\sigma\rho}F_{\sigma\rho} + \frac{1}{3}\Delta_\rho\Delta_\rho F_{\mu\nu} + O(|x-y|); \quad (31)$$

$$a_1(x,y) = \frac{1}{4}a_{1\mu\mu}(x,y); \quad (32)$$

$$a_2(x,y) = \frac{1}{12}F_{\sigma\rho}F_{\sigma\rho} + O(|x-y|). \quad (33)$$

Введем также регуляризованные функции Грина $\widetilde{G}_{\Lambda 1\mu\nu}$ и $\widetilde{G}_{\Lambda 0}$, которые определяются заменой $r \to r_\Lambda$ согласно правилу (12) в разложениях (28) и (29) соответственно. Отметим, что при этом коэффициенты Сили–деВитта не деформируются.

§5. Двухпетлевые расчеты

Теперь мы готовы проверить инвариантность расходящихся двухпетлевых вкладов теории Янга–Миллса относительно сдвига функции Грина на нулевые моды оператора Лапласа. Напомним, что вклад состоит из 6 выражений (6)-(11).

Для наглядности проведем подробные вычисления для $\mathcal{J}_1$, остальные находятся аналогично. Это выражение содержит произведение трех функций Грина. Пронумеруем слагаемые в разложениях функций Грина (28) и (29) слева направо от 1 до 7 и введем дополнительный объект

$$I^n_{i,j,k}, \quad n \in \{1,\dots,5\},\ i,j,k \in \{1,\dots,7\}, \quad (34)$$

который обозначает такой вклад в J_n, что левая функция Грина заменяется на i-ое слагаемое из (28) или (29), средняя заменяется на j-ое, а правое на k-ое слагаемое. Таким образом, в качестве примера выпишем расходящийся интеграл вида

$$I^1_{1,3,1} = 2g^2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(\frac{\delta_{\mu\alpha}}{4\pi^2 r^2}, \left[\frac{r^2 \ln(r\mu)}{32\pi^2} a_{2\nu\beta} \right] \overleftarrow{D}_\alpha, \overrightarrow{D}_\nu \frac{\delta_{\mu\beta}}{4\pi^2 r^2} \right).$$

Мы будем рассматривать только инфракрасные (ИК) сингулярности в координатном представлении, то есть регион $x \sim y$. Нас интересуют нулевые моды, поэтому мы будем учитывать только те слагаемые, которые их содержат. Перечислим все такие вклады, которые дают ИК расходимости: $I^1_{7,1,1}$, $I^1_{6,1,1}$, $I^1_{6,1,2}$, $I^1_{6,2,1}$, $I^1_{1,6,1}$, $I^1_{1,7,1}$, $I^1_{1,1,6}$ и $I^1_{1,1,7}$. Вычислим отдельно каждый вклад. Для упрощения записи будем использовать обозначения $\rho_{\alpha\beta} = F_{\alpha\sigma}F_{\beta\sigma}$, $\rho = \rho_{\alpha\alpha}$ и $\varkappa = \rho_{\alpha\beta}(x-y)^{\alpha\beta}$.

Рассмотрим вклад $I^1_{7,1,1}$. Он содержит следующее подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\alpha r^2}{4} \left(-2\rho_{\mu\alpha} + \frac{\delta_{\mu\alpha}\rho}{12} \right), \frac{\delta_{\nu\beta}(x-y)^\alpha}{2\pi^2 r^4}, -\frac{\delta_{\mu\beta}(x-y)^\nu}{2\pi^2 r^4} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{\pi^4 2^3} \left(1, 1, \frac{\varkappa}{r^6} \right) + \frac{\alpha}{3\pi^4 2^6} \left(1, 1, \frac{\rho}{r^6} \right). \end{aligned} \tag{35}$$

После применения регуляризации (12) область интегрирования распадается на две части: $0 \leqslant r < 1/\Lambda$ и $r \geqslant 1/\Lambda$. Первый интервал не будет давать вклада в ИК расходимости. Для вычисления вкладов от второго интервала воспользуемся следующими выражениями

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \frac{(x-y)^{\mu\nu}}{r^6} \overset{IR}{=} \frac{\delta^{\mu\nu} S^3 L}{4}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x \frac{(x-y)^{\mu\nu} \ln(r\mu)}{r^6} \overset{IR}{=} -\frac{\delta^{\mu\nu} S^3 L^2}{8}, \tag{36}$$

где мы ввели обозначение для знака равенства $\overset{IR}{=}$, когда левая и правая части имеют одинаковые ИК сингулярности, $S^3 = 2\pi^2$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^4$ и $L = \ln(\Lambda/\mu)$.

Тогда после интегрирования имеем

$$I^1_{7,1,1} \overset{IR}{=} \frac{5\alpha g^2 S^3 L c_2^2}{3\pi^4 2^5}. \tag{37}$$

Действуя аналогично, получаем

$$I^1_{6,1,1} \overset{IR}{=} -\frac{5\alpha g^2 S^3 c_2^2}{3\pi^4 2^5}, \tag{38}$$

$$I^1_{6,1,2} \overset{IR}{=} -I^1_{6,2,1} \overset{IR}{=} -\frac{\alpha g^2 S^3 c_2^2}{\pi^4 2^4}, \tag{39}$$

$$I^1_{1,6,1} \overset{IR}{=} -I^1_{1,7,1} \overset{IR}{=} \frac{5\alpha g^2 S^3 c_2^2}{3\pi^4 2^5}, \tag{40}$$

$$I^1_{1,1,6} \overset{IR}{=} -\frac{7\alpha g^2 S^3 c_2^2}{3\pi^4 2^5}, \quad I^1_{1,1,7} \overset{IR}{=} -\frac{5\alpha g^2 S^3 c_2^2}{3\pi^4 2^5}. \tag{41}$$

Таким образом, для первого вклада имеем

$$\mathcal{J}_1|_{\widetilde{G}} - \mathcal{J}_1|_G \overset{IR}{=} -\frac{1}{2^3\pi^4}\alpha c_2^2 L S^3 g^2. \tag{42}$$

Для остальных выражений выпишем только конечный результат:

$$\mathcal{J}_2|_{\widetilde{G}} - \mathcal{J}_2|_G \overset{IR}{=} \frac{1}{2^2\pi^4}\alpha c_2^2 L S^3 g^2; \tag{43}$$

$$\mathcal{J}_3|_{\widetilde{G}} - \mathcal{J}_3|_G \overset{IR}{=} \frac{1}{2^4\pi^4}\alpha c_2^2 L S^3 g^2; \tag{44}$$

$$\mathcal{J}_4|_{\widetilde{G}} - \mathcal{J}_4|_G \overset{IR}{=} 0; \tag{45}$$

$$\mathcal{J}_5|_{\widetilde{G}} - \mathcal{J}_5|_G \overset{IR}{=} 0; \tag{46}$$

$$\mathcal{J}_6|_{\widetilde{G}} - \mathcal{J}_6|_G \overset{IR}{=} -\frac{3}{2^4\pi^4}\alpha c_2^2 L S^3 g^2. \tag{47}$$

Тогда, суммируя все вклады, которые дают нулевые моды в двухпетлевых расчетах, получим

$$\sum_i \mathcal{J}_i \overset{IR}{=} 0. \tag{48}$$

Таким образом, сдвиг функции Грина на нулевые моды оператора Лапласа не вносит вклада в двухпетлевые вычисления $\beta-$функции в теории Янга–Миллса.

§6. Заключение

Инвариантность двухпетлевых вычислений в теории Янга–Миллса относительно сдвига функции Грина на нулевые моды оператора Лапласа является в некотором смысле желаемым результатом. С одной стороны мы проверили, что такая добавка не вносит дополнительного вклада во второй коэффициент β-функции. С другой стороны, мы получили некую степень свободы в определении функции Грина. Выбирая этот вклад определенным образом, мы можем добиться выполнения дополнительных соотношений. Например, известно, что регуляризация с импульсом обрезания в общем случае может нарушать калибровочную инвариантность. Возможно, фиксируя нулевые моды определенным образом, можно частично восстановить инвариантность.

Благодарности. Автор благодарит А. В. Иванова за обсуждение и ценные комментарии.

Список литературы

1. V. Fock, *Die Eigenzeit in der Klassischen- und in der Quanten- mechanik.* — Sow. Phys. **12** (1937), 404–425.
2. J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press (1984)
3. M. Kurkov, D. Vassilevich, *Parity anomaly in four dimensions.* — Phys. Rev. D **96**, No. 2, (2017) 025011.
4. A. V. Ivanov, D. V. Vassilevich, *Atiyah–Patodi–Singer index theorem for domain walls.* — J. Phys. A: Math. Theor. **53** (2020), 305201.
5. L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, Frontiers in Physics **83**, Addison-Wesley (1991)
6. G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories.* — (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, Wroclaw, **1** (1976), 345–369.
7. I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories.* — TMF **21**, No. 3 (1974), 311–321.
8. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-loop cutoff renormalization of 4-D Yang–Mills effective action.* — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48** (2020), 015002.
9. M. Luscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields.* — Annals of Physics **142** (1982), 359–392.
10. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two Function Families and Their Application to Hankel Transform of Heat Kernel*, `arXiv:2106.00294` [math-ph]
11. A. V. Ivanov, *Diagram Technique for the Heat Kernel of the Covariant Laplace Operator.* — Theor. Math. Phys. **198**, No. 1 (2019), 100–117.
12. P.B. Gilkey, *The spectral geometry of a Riemannian manifold.* — J. Differ. Geom. **10** (1975), 601–618.
13. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Heat kernel: proper time method, Fock–Schwinger gauge, path integral representation, and Wilson line.* — Theoret. and Math. Phys. **205**, No. 2 (2020), 1456–1472.

Kharuk N. V. Zero modes of the Laplace operator in two-loop calculations in the Yang–Mills theory.

In this paper we study two-loop calculations in the Yang–Mills theory. Using the heat kernel method we construct two Green functions and add contributions to them, corresponding to the zero modes of the Laplace operator. We show by the direct calculations that such additions do not affect the second coefficient of the β-function in the Yang–Mills theory.

С.-Петербургское отделение
Математического института
В. А. Стеклова РАН,
Международный математический
институт им. Леонарда Эйлера,
Университет ИТМО,
С.-Петербург, Россия
E-mail: `natakharuk@mail.ru`

Поступило 22 октября 2021 г.