

А. В. Иванов, М. А. Русских

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НА ПРИМЕРЕ ПРОСТЕЙШЕЙ КУБИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля играет одну из ключевых ролей в современной теоретической физике, см. [1–5]. Она имеет долгую историю развития и включает множество вспомогательных методов, таких как функциональное интегрирование [6–8], диаграммная техника Фейнмана [9, 10], производящие функции [11, 12], метод фонового поля [13–16] и многое другое [17]. Эти методы популярны и в современной науке.

На данный момент этой теме посвящено большое количество научных и учебных публикаций. Однако, такие учебники, частично упомянутые выше, как правило, содержат очень длинное и обстоятельное введение, а большинство методов сформулировано в общем виде. Такой способ уменьшает наглядность и, на наш взгляд, не дает читателю достаточного понимания тонкостей. В то же время, выбор в качестве примера сложных моделей не позволяет проводить все расчеты явно.

В нашей работе мы предлагаем последовательное описание некоторых основных инструментов квантовой теории поля на примере простейшей кубической модели. Такой подход позволяет нам проводить вычисления в явном виде, при этом оставляя основные законы и свойства неизменными. Следует отметить, что такая модель ранее уже появлялась в методических заметках [18]. Наша попытка отличается тем, что мы рассматриваем модель более подробно и доказываем все необходимые диаграммные соотношения.

Ключевые слова: кубическая модель, функциональный интеграл, производящие функции, метод фонового поля, диаграмма Фейнмана.

Исследование выполнено за счет средств гранта в форме субсидий из федерального бюджета на осуществление государственной поддержки создания и развития научных центров мирового уровня, включая международные математические центры и научные центры мирового уровня, выполняющие исследования и разработки по приоритетам научно-технологического развития от 8 ноября 2019 г. No. 075-15-2019-1620. Также Иванов А. В. является победителем конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность спонсорам и жюри.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 мы вводим определение специального интеграла на бесконечномерном пространстве и рассматриваем его основные свойства. В частности, мы представляем стандартный метод вычисления. Затем мы вводим кубическую модель и обсуждаем ее свойства, такие как пертурбативное разложение и связь с функциями Эйри. Мы также обращаем внимание на возможность факторизации, которая ведет к значительному упрощению.

В разделе 3 мы объясняем диаграммную технику. В то же время мы рассматриваем ее с математической и физической точек зрения. Как известно, эти подходы имеют некоторые различия. Мы также доказываем несколько важных теорем: о дифференцировании экспоненты и о связи между связными и сильно связными графами.

Затем, в разделе 4, мы даем определения производящих функций, выводим уравнения, которым они удовлетворяют, включая квантовое уравнение движения, и находим их решения. В разделе 5 мы приводим диаграммные интерпретации для уравнений и производящих функций, а также доказываем их.

Далее, в разделах 6 и 7, мы объясняем метод фонового поля и даем заключительные комментарии. В частности, мы представляем способ перехода от простейшей кубической модели к произвольной.

§2. МОДЕЛЬ И ЕЕ СВОЙСТВА

2.1. Функциональный интеграл. Введем бесконечное произведение $V = \mathbb{R}^\infty$ копий \mathbb{R} . Элементами $x \in V$ этого множества являются последовательности вида $\{x_k\}_{k \geq 1}$. Далее, для $x, y \in V$ мы определим скалярное произведение формулой $(x, y) = \sum_{k \geq 1} x_k y_k$, а также два специальных отображения: $V \times V \rightarrow V$, действующее согласно правилу $xy = \{x_k y_k\}_{k \geq 1}$, и $V \times \mathbb{R} \rightarrow V$, определяемое как $x^c = \{x_k^c\}_{k \geq 1}$ для всех $c \in \mathbb{R}$.

Затем, для любых $x \in V$ определим $\mathbb{X}_N \in V$, где $N \in \mathbb{N}$, так, что $(\mathbb{X}_N)_k = x_k$, если $k \leq N$, и $(\mathbb{X}_N)_k = 0$, если $k > N$. Также введем множество положительных последовательностей $\mathcal{B} = \{\beta \in V \mid \beta_k > 0, k \in \mathbb{N}\}$.

Определение 1. Пусть $\beta \in \mathcal{B}$, и $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ – функционал на V , тогда функциональный интеграл от F по V определяется следующей

формулой

$$\Phi_\beta(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^N \frac{\beta_k}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^N} F(\mathbb{X}_N) e^{-\frac{1}{2}(\beta \mathbb{X}_N, \mathbb{X}_N)} d\mathbb{X}_N, \quad (1)$$

где $d\mathbb{X}_N = dx_1 \dots dx_N$.

Как правило, последняя конструкция имеет свойства обычного интеграла. Действительно, пусть F и G – два функционала на V , и $a, b \in \mathbb{C}$, тогда мы можем выписать соотношения для линейности, сопряжения и монотонности:

$$\Phi_\beta(aF + bG) = a\Phi_\beta(F) + b\Phi_\beta(G), \quad \Phi_\beta(\overline{F}) = \overline{\Phi_\beta(F)},$$

$$F(x) \geq G(x) \text{ для всех } x \in V \Rightarrow \Phi_\beta(F) \geq \Phi_\beta(G).$$

Доказательство этих свойств для специального класса функционалов является отдельной задачей и выходит за рамки данной статьи. В качестве примеров приведем два типа функционалов, которые часто встречаются в расчетах

$$\Phi_\beta(1) = 1, \quad \Phi_\beta(e^{(\cdot, y)}) = e^{\frac{1}{2}(\tilde{\beta}y, y)}, \quad \text{где } \tilde{\beta}_k = 1/\beta_k. \quad (2)$$

2.2. Метод вычисления. Давайте рассмотрим один из способов работы с функциональным интегралом. Дело в том, что в большинстве случаев вычислить интеграл в явном виде невозможно, поэтому приходится использовать асимптотическое разложение по малому параметру.

Лемма 2.1. Пусть $x, y \in V$, и $F(x)$ – полином заданной степени, тогда

$$F(x) = F(\partial_y) e^{(y, x)} \Big|_{y=0}. \quad (3)$$

Доказательство. Достаточно продифференцировать экспоненту и воспользоваться равенством $[\partial_{x^i}, x_j] = \delta_{ij}$. \square

Лемма 2.2. Пусть $y \in V$, и F – функционал на V , тогда

$$\Phi_\beta(F) = F(\partial_y) e^{\frac{1}{2}(\tilde{\beta}y, y)} \Big|_{y=0}. \quad (4)$$

Доказательство. Воспользуемся определением 1, леммой 2.1, и результатом из примера (2). Тогда получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\Phi_\beta(F) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^N \frac{\beta_k}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} F(\partial_{\mathbb{Y}_N}) e^{(\mathbb{Y}_N, \mathbb{X}_N)} \Big|_{\mathbb{Y}_N=0} e^{-\frac{1}{2}(\beta \mathbb{X}_N, \mathbb{X}_N)} d\mathbb{X}_N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} F(\partial_{\mathbb{Y}_N}) \prod_{k=1}^N e^{\frac{y_k^2}{2\beta_k}} \Big|_{y_k=0} = F(\partial_y) e^{\frac{1}{2}(\bar{\beta}y, y)} \Big|_{y=0},\end{aligned}$$

из которой и следует утверждение. \square

Стоит отметить, что в физических приложениях функционал F обычно содержит малый параметр. В связи с этим можно использовать разложение Тейлора по степеням этого малого параметра. Более того, коэффициенты разложения обычно являются многочленами. Таким образом, применяя лемму 2.2 к каждому коэффициенту, мы получаем асимптотический ряд по малому параметру.

Следствие 2.3. Пусть $\mathbf{1} = \{1\}_{k \geq 1} \in \mathcal{B}$, тогда из леммы 2.2 следует цепочка соотношений

$$\begin{aligned}\Phi_\beta(F(\cdot)) &= F(\partial_y) e^{\frac{1}{2}(\bar{\beta}y, y)} \Big|_{y=0} = F(\beta^{-\frac{1}{2}} \partial_y) e^{\frac{1}{2}(y, y)} \Big|_{y=0} \\ &= \Phi_{\mathbf{1}}(F(\beta^{-\frac{1}{2}} \cdot)).\end{aligned}\quad (5)$$

2.3. Кубический функционал. Перейдем к более содержательно-му примеру и рассмотрим $F_\sigma(x) = \exp \left\{ i \sum_{k \geq 1} x_k^3 \sigma_k \right\}$, где $\sigma \in V$. В этом случае имеет место явная факторизация, а используя определение 1, мы можем записать функциональный интеграл так

$$\Phi_\beta(F_\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \left(\sqrt{\frac{\beta_k}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_k^3 \sigma_k} e^{-\frac{1}{2}x_k^2 \beta_k} dx_k \right). \quad (6)$$

Удобно сделать замену $x_k \rightarrow x_k \sqrt{\beta_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, а затем перейти от σ к $\alpha = \{\sigma_k / \beta_k^{3/2}\}_{k \geq 1}$. Тогда формула (6) запишется как

$$\begin{aligned}\Phi_\beta(F_\sigma) &= \Phi_{\mathbf{1}}(F_\alpha) = \prod_{k \geq 1} I(\alpha_k), \\ \text{где } I(\alpha_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2 + i\alpha_k x^3} dx.\end{aligned}\quad (7)$$

Отметим очевидные свойства полученных функций $I(\cdot)$:

$$I(0) = 1, \quad I(\alpha_k) = I(-\alpha_k) > 0,$$

$I(\alpha_k)$ монотонно убывает на \mathbb{R}_+ от 1 до 0,

$$|\exp(i\alpha_k x^3)| \leq 1, \quad \text{следовательно } |I(\alpha_k)| \leq 1 \text{ и } |\Phi_\beta(F_\sigma)| \leq 1.$$

Лемма 2.4. Пусть $I(\alpha_k)$ – функция, определенная выше, тогда она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[27\alpha_k^3 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k^2} + (1 + 81\alpha_k^2) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + 15\alpha_k \right] I(\alpha_k) = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Прежде всего, введем вспомогательную функцию вида

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\frac{x^2}{2} + i\alpha_k x^3} dx.$$

Интегрированием по частям убедимся, что I_k удовлетворяют соотношению $I_n = (n - 1)I_{n-2} + 3i\alpha_k I_{n+1}$. Применим эту формулу к I_3 дважды:

$$I_3 = 2I_1 + 3i\alpha_k I_4 = 15i\alpha_k I_2 - 9\alpha_k^2 I_5 = 15i\alpha_k I_0 - 81\alpha_k^2 I_3 - i27\alpha_k^3 I_6.$$

Затем используем соотношения $I_0 = I$, $I_3 = -i\partial_{\alpha_k} I$ и $I_6 = -\partial_{\alpha_k}^2 I$, из которых и следует утверждение леммы. \square

Лемма 2.5. Функция $I(\alpha_k)$ может быть представлена в эквивалентном виде

$$I(\alpha_k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(3\alpha_k)^{1/3}} e^{\frac{1}{108\alpha_k^2}} \text{Ai}\left(\frac{1}{4(3\alpha_k)^{4/3}}\right), \quad (9)$$

где Ai – это функция Эйри [19].

Доказательство. Результат проверяется явным дифференцированием с использованием леммы 2.4 и определения (7). \square

2.4. Асимптотическое разложение.

Лемма 2.6. Если $\Phi_1(F_\alpha) > 0$, тогда $\alpha_k \rightarrow 0$.

Доказательство. Перепишем функциональный интеграл следующим образом

$$\Phi_1(F_\alpha) = \prod_{k \geq 1} I(\alpha_k) = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \ln(I(\alpha_k))\right).$$

Нам нужно, чтобы сумма в экспоненте была конечна. Следовательно, учитывая $I(\alpha_k) \in (0, 1]$, должно выполняться соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\alpha_k) = 1.$$

Принимая во внимание описанные выше свойства, оно эквивалентно $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, откуда и следует утверждение. \square

Лемма 2.7. *Имеет место асимптотическое разложение*

$$\Phi_1(F_\alpha) = \prod_{k \geq 1} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{8^n} \frac{(6n)!}{(2n)!(3n)!} \alpha^{2n}. \quad (10)$$

Доказательство. Для вычисления $\Phi_1(F_\alpha)$ используем лемму 2.2. Ввиду факторизации (7) применим лемму 2.2 в одномерном случае

$$\begin{aligned} e^{i\alpha \partial_y^3} e^{\frac{1}{2}y^2} \Big|_{y=0} &= \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \frac{(i\alpha)^k}{k!} \frac{1}{2^m} \frac{1}{m!} \partial_y^{3k} y^{2m} \Big|_{y=0} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{8^n} \frac{(6n)!}{(2n)!(3n)!} \alpha^{2n}, \end{aligned}$$

где во втором равенстве мы использовали $3k = 2m = 6n$. \square

§3. ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА

3.1. Математическая точка зрения. Как было отмечено выше, см. формулу (4), функциональный интеграл может быть вычислен при помощи дифференцирования экспоненты $\exp[(\beta y, y)/2]$, где $y \in V$ и $\beta \in \mathcal{B}$. Отметим что ядром квадратичной формы $(\beta y, y)$ является $\beta_i \delta_{ij}$.

Давайте сформулируем правила техники, которая позволяет визуализировать вычисления.

Определение 2. *Ядро $\beta_i \delta_{ij}$ обозначается линией с тремя индексами $i \overset{\beta}{\text{---}} j$. Точкой \bullet мы обозначим суммирование по множеству \mathbb{N} . Суммирование одной стороны ядра с элементом из $x \in V$ обозначается заменой индекса на x . Если $\beta = \mathbf{1}$, тогда третий индекс может быть опущен.*

Приведем некоторые примеры. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ и $x \in V$, тогда

$$\sum_{j \geq 1} \beta_i \delta_{ij} x_j = i \overset{\beta}{\text{---}} x, \quad (\beta x, x) = \sum_{i \geq 1} x_i \beta_i x_i = \sum_{i, j \geq 1} x_i \beta_i \delta_{ij} x_j = x \overset{\beta}{\text{---}} x,$$

$$\sum_{k \geq 1} i \overset{\alpha}{\text{---}} k \quad k \overset{\beta}{\text{---}} j = \sum_{k \geq 1} \alpha_i \delta_{ik} \beta_k \delta_{kj} = i \overset{\alpha}{\text{---}} \bullet \overset{\beta}{\text{---}} j .$$

Эти диаграммы обладают замечательными свойствами, играющими важную роль в вычислениях. Среди них мы отметим симметрию, цепное правило и преобразование при дифференцировании:

$$i \overset{\beta}{\text{---}} x = x \overset{\beta}{\text{---}} i , \quad i \overset{\alpha}{\text{---}} \bullet \overset{\beta}{\text{---}} j = i \overset{\alpha\beta}{\text{---}} j , \quad (11)$$

$$\frac{d}{dx_i} x \overset{\beta}{\text{---}} x = 2 i \overset{\beta}{\text{---}} x , \quad \frac{d}{dx_j} i \overset{\beta}{\text{---}} x = i \overset{\beta}{\text{---}} j . \quad (12)$$

Последние соотношения могут быть получены при помощи определения 2 и примеров, приведенных выше. Возникает естественный вопрос: почему мы вводим диаграммную технику для δ -ядра? Дело в том, что подобные соотношения имеют место в большинстве физических моделей, но с более сложными ядрами, поэтому диаграммы, представленные выше, являются общими по своей природе.

Другое важное свойство называется соотношением звезда-треугольник и имеет следующий вид: если $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}$ и $i, j, k \in \mathbb{N}$, тогда имеем равенство, изображенное на рисунке 1. Оно легко доказывается подстановкой явных выражений для ядер. Действительно, с обеих сторон значение будет ненулевым только при $i = j = k$, и будет равно $\alpha_i \beta_i \gamma_i$. Также следует отметить, что результат можно обобщить на случай любого числа вершин, однако, это имеет место только ввиду простоты примера.

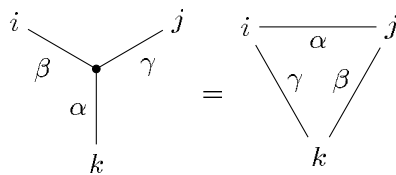


Рис. 1. Соотношение звезда-треугольник.

3.2. Разложение экспоненты. Давайте научимся вычислять n -ю производную от $\exp\left[\frac{1}{2}x \text{---} x\right]$, где использовано определение 2 и следствие 2.3, согласно которым, достаточно исследовать случай $\beta = 1$. Прежде всего приведем выражения для первой и второй производных. Пусть $i, j \in \mathbb{N}$, тогда мы имеем

$$\frac{d}{dx_i} e^{\frac{1}{2}x \text{---} x} = (i \text{---} x) e^{\frac{1}{2}x \text{---} x},$$

$$\frac{d^2}{dx_j dx_i} e^{\frac{1}{2}x \text{---} x} = \left(i \text{---} j + \begin{matrix} i \text{---} x \\ j \text{---} x \end{matrix} \right) e^{\frac{1}{2}x \text{---} x}.$$

Сделаем несколько комментариев на этом этапе. После каждого дифференцирования четность конструкции по переменной x меняется. Также после дифференцирования экспонента приобретает множитель, состоящий из элементов двух типов: $i \text{---} j$ и $i \text{---} x$, где $i, j \in \mathbb{N}$.

После применения оператора дифференцирования по переменным x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , где $k \in \mathbb{N}$, каждый член будет сконструирован из вышеуказанных диаграмм. Следовательно, их концы содержат точки $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ и могут содержать переменную x t раз, где $t \in \{j : 0 \leq j \leq k, \text{ и } k - j \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Определение 3. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$ такие, что $k \geq n$. Также пусть $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ и $y_1, \dots, y_n \in V$. Таким образом, у нас есть два набора индексов $\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ y_1, \dots, y_n \end{matrix}$. Круглыми скобками $\left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ y_1, \dots, y_n \end{matrix}\right)$ мы обозначим операцию соединения линиями всех нижних индексов с верхними всеми возможными способами. С учетом того, что линия может соединять лишь два индекса. Затем, если $k - n$ четное, квадратными скобками $\left[\left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ y_1, \dots, y_n \end{matrix}\right)\right]$ обозначим соединение оставшихся индексов в первом ряду линиями всеми возможными способами. Если $k - n$ нечетно, тогда $\left[\left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ y_1, \dots, y_n \end{matrix}\right)\right] = 0$.

Для удобства определим новую функцию

$$h_{k,n}(i_1, \dots, i_k; y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{n!} \left[\left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ y_1, \dots, y_n \end{matrix}\right)\right]. \quad (13)$$

Приведем несколько примеров:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\begin{matrix} i, j \\ y_1, y_2 \end{matrix}\right)\right] \Big|_{y_1=y_2=x} = \begin{matrix} i \text{---} x \\ j \text{---} x \end{matrix},$$

$$\left[\left(\begin{matrix} i, j, k \\ x \end{matrix}\right)\right] = \begin{matrix} i \text{---} j \\ k \text{---} x \end{matrix} + \begin{matrix} i \text{---} k \\ j \text{---} x \end{matrix} + \begin{matrix} j \text{---} k \\ i \text{---} x \end{matrix}.$$

Теорема 1. Пусть $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, $x = \{x_k\}_{k \geq 1} \in V$. Тогда, используя определение \mathcal{Z} , можно записать утверждение

$$\frac{d^k}{dx_{i_k} \dots dx_{i_1}} e^{\frac{1}{2} x} \text{---} x = g_k(i_1, \dots, i_k; x) e^{\frac{1}{2} x} \text{---} x, \quad (14)$$

где

$$g_k(i_1, \dots, i_k; x) = \sum_{n=0}^k h_{k,n}(i_1, \dots, i_k; y_1, \dots, y_n) \Big|_{y_1=\dots=y_n=x}. \quad (15)$$

Доказательство. Из равенства (14) следует, что должны выполняться соотношения

$$g_{p+1}(i_1, \dots, i_{p+1}; x) = \frac{d}{dx_{p+1}} g_p(i_1, \dots, i_p; x) + g_p(i_1, \dots, i_p; x) (i_{p+1} \text{---} x).$$

Проверим, что сумма (15) им удовлетворяет. В первую очередь выведем некоторые свойства функций $h_{k,n}$. Вынесем элемент из-под круглых скобок:

$$\begin{aligned} h_{p+1,n}(i_1, \dots, i_{p+1}; y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{n!} [(\overset{i_1, \dots, i_{p+1}}{\underset{y_1, \dots, y_n}{\hat{y}}})] \\ &= \frac{1}{n!} [(\overset{i_1, \dots, i_p}{\underset{y_1, \dots, y_n}{\hat{y}}})^{i_{p+1}}] + \sum_{j=0}^n \frac{1}{n!} [(\overset{i_1, \dots, i_p}{\underset{y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_n}{\hat{y}}})] (i_{p+1} - y_j), \end{aligned}$$

где шляпкой \hat{y}_j обозначается пропущенный элемент. Также, легко убедиться, что выполняется соотношение

$$\frac{1}{n!} [(\overset{i_1, \dots, i_p}{\underset{y_1, \dots, y_n}{\hat{y}}})^{i_{p+1}}] = \frac{n+1}{(n+1)!} [(\overset{i_1, \dots, i_p}{\underset{y_1, \dots, y_n, i_{p+1}}{\hat{y}}})].$$

После этого, применяя симметрию $h_{p+1,n}(i_1, \dots, i_{p+1}; y_1, \dots, y_n)$ относительно перестановок группы индексов y_1, \dots, y_n и выбирая последние так, что $y_1 = \dots = y_n = x$, мы получаем

$$\begin{aligned} h_{p+1,n}(i_1, \dots, i_{p+1}; x, \dots, x) &= (n+1)h_{p,n+1}(i_1, \dots, i_p; i_{p+1}, x, \dots, x) \\ &\quad + h_{p,n-1}(i_1, \dots, i_p; x, \dots, x) (i_{p+1} \text{---} x) \\ &= \frac{d}{dx_{p+1}} h_{p,n+1}(i_1, \dots, i_p; x, \dots, x) \\ &\quad + h_{p,n-1}(i_1, \dots, i_p; x, \dots, x) (i_{p+1} \text{---} x), \end{aligned}$$

где $0 < n < p$. Случаи, где $n \in \{0, p, p + 1\}$, могут быть рассмотрены отдельно и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} h_{p+1,p+1}(i_1, \dots, i_{p+1}; x, \dots, x) &= h_{p,p}(i_1, \dots, i_p; x, \dots, x)(i_{p+1} - x), \\ h_{p+1,p}(i_1, \dots, i_{p+1}; x, \dots, x) &= h_{p,p-1}(i_1, \dots, i_p; x, \dots, x)(i_{p+1} - x), \\ h_{p+1,0}(i_1, \dots, i_{p+1}) &= \frac{d}{dx_{p+1}} h_{p,1}(i_1, \dots, i_p; x). \end{aligned}$$

Далее, складывая отдельно левую и правую части последних четырех равенств, мы убеждаемся в правильности анзаца (15). Таким образом, утверждение теоремы доказано. \square

Отметим, что во всех вычислениях этого раздела мы можем заменить $i \text{ --- } j$ на $i \frac{\beta}{j}$, где $\beta \in V$. Более того, можно рассматривать любую симметричную матрицу g_{ij} .

3.3. Физическая точка зрения. Здесь мы полагаем $\beta = 1$. Обратим внимание на формулу (4) и рассмотрим следующий пример

$$F(x) = \sum_{k_1, \dots, k_i \geq 1} C_{k_1 \dots k_i} x_{k_1} \dots x_{k_i}, \quad x \in V, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Если в $F(x)$ вместо x мы подставим ∂_x и сосчитаем (4), используя теорему 1, то получим

$$\sum_{k_1, \dots, k_i \geq 1} C_{k_1 \dots k_i} h_{i,0}(k_1, \dots, k_i). \quad (17)$$

Определение 4. *Функцию $C_{k_1 \dots k_i}$ обозначим i линиями, выходящими из одной точки. Свободные концы линий несут индексы k_1, \dots, k_i . Такие элементы диаграммной техники мы назовем вершиной с i линиями.*

Последнее определение дает возможность визуализировать переход от формулы (16) к формуле (17). Это можно представить следующим образом: мы соединяем индексы вершин линиями $k_n \text{ --- } k_j$ всеми возможными способами, а затем суммируем по \mathbb{N}^i . Более того, если ядро $C_{k_1 \dots k_i}$ можно факторизовать, то удобно разным множителям сопоставить разные вершины. В результате, ответ также содержит вершины, соединенные друг с другом.

Применим эту конструкцию к нашей основной модели. В нашем случае, $F_\alpha(x) = \exp \left\{ i \sum_{k \geq 1} x_k^3 \alpha_k \right\}$, и, после разложения экспоненты в ряд, все порядки можно представить как произведения сумм $i \sum_{k \geq 1} x_k^3 \alpha_k$. Это значит, что базовый элемент конструкции имеет вид, изображенный на рисунке 2.

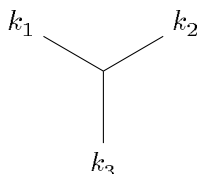
$$C_{k_1 k_2 k_3} = i \sum_{j \geq 1} \alpha_j \delta_{jk_1} \delta_{jk_2} \delta_{jk_3} =$$


Рис. 2. Вершина кубической модели.

Итак, из вышесказанного следует, что для подсчета

$$\frac{1}{j!} \left(i \sum_{k \geq 1} \partial_{x_k}^3 \alpha_k \right)^j e^{(x,x)/2} \Big|_{x=0}, \tag{18}$$

нужно нарисовать последнюю диаграмму j раз, а затем соединить внешние линии всеми возможными способами.

Отметим несколько важных моментов. Во-первых, при рисовании картинок можно опускать индексы. Во-вторых, если количество внешних линий нечетное, то вклад будет нулевой. Поэтому удобно дать определение вспомогательному оператору.

Определение 5. Пусть \mathcal{D} – диаграмма с k внешними линиями, тогда оператор \mathbb{H}_n , где $0 \leq n \leq k$, определяется по следующему правилу:

$$\mathbb{H}_n \mathcal{D} = \begin{cases} k - n & \text{линий } \mathcal{D} \text{ связаны всеми возможными способами,} \\ & \text{если } k - n \text{ четно;} \\ 0, & \text{если } k - n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В дополнение, для $n = 0$ индекс будем опускать, то есть $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}$.

Представленный оператор линеен. Рассмотрим для примера вычисление формулы (18). Если параметр j нечетный, тогда получим ноль, потому что диаграмма содержит $3j$ внешних линий. Если j четное, то ответ ненулевой. Например, для $j = 2$ имеем

$$\frac{1}{2!}\mathbb{H}(\wr^2) = \frac{9}{2} \text{---} \text{---} + 3 \text{---} \text{---}. \quad (19)$$

Определение 6. Диаграмма называется связной, если любые две вершины соединены путем. Диаграмма называется сильно связной, или одночастично-неприводимой, если она остается связной после удаления любой одной линии, см. [20].

Определение 7. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Оператор $\mathbb{H}_n^{c/sc}$ определяется также, как и \mathbb{H}_n , но при этом сохраняет только связные/сильно связные диаграммы и удаляет другие. Дополнительно, $\mathbb{H}^{c/sc}1 = 0$.

Приведем несколько примеров:

$$\mathbb{H}(\wr^j) = \mathbb{H}^c(\wr^j) = \mathbb{H}^{sc}(\wr^j) = 0, \quad \text{если } j \text{ нечетно}, \quad (20)$$

$$\mathbb{H}^c(\wr^2) = \mathbb{H}(\wr^2), \quad \mathbb{H}^{sc}(\wr^2) = 3! \text{---} \text{---}, \quad (21)$$

$$(\mathbb{H} - \mathbb{H}^c)(\wr^4) = 243 \text{---} \text{---} + 324 \text{---} \text{---} + 108 \text{---} \text{---}. \quad (22)$$

Лемма 3.1. Имеет место равенство

$$\frac{1}{4!}(\mathbb{H} - \mathbb{H}^c)(\wr^4) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2!} \mathbb{H}(\wr^2) \right)^2. \quad (23)$$

Последнее соотношение дает гипотезу для формулы, которая будет доказана в следующем разделе. Запишем ее в первых порядках в виде следующей цепочки соотношений

$$\begin{aligned} \ln(\mathbb{H} e^{\wr}) &\approx \frac{1}{2!} \mathbb{H}(\wr^2) + \frac{1}{4!} \mathbb{H}(\wr^4) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2!} \mathbb{H}(\wr^2) + \frac{1}{4!} \mathbb{H}(\wr^4) \right) + \dots \\ &\approx \frac{1}{2!} \mathbb{H}^c(\wr^2) + \frac{1}{4!} \mathbb{H}^c(\wr^4) + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

$$\approx \mathbb{H}^c e^{\wr}. \quad (25)$$

3.4. Вычисление $\ln \mathbb{H} \exp(\text{вершина})$.

Теорема 2. Пусть ζ – вершина с произвольным количеством внешних линий. Тогда, используя физический тип диаграммной техники, имеем

$$\mathbb{H} \exp(\zeta) = \exp(\mathbb{H}^c(\exp(\zeta))). \quad (26)$$

Доказательство. Пусть $j \in \mathbb{N}$. Первый шаг – выразить $\mathbb{H}(\zeta^j)$ через линейную комбинацию произведений связанных диаграмм вида $\mathbb{H}^c(\zeta^{n_1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{H}^c(\zeta^{n_k})$, где $n_i \in \mathbb{N}$, $n_1 + \dots + n_k = j$, и $k \in \{1, \dots, j\}$ – число компонент связности.

Это можно сделать в несколько этапов. Во-первых, нужно распределить j вершин по k группам. То есть получаем мультиномиальный коэффициент $C_{n_1 \dots n_k}^j$. Затем, нужно избавиться от внутренней симметрии, которая появляется из компонент связности с одинаковым числом вершин ($n_i = n_j$). То есть нужно поделить на число перестановок $S_{id}(n_1, \dots, n_k)$, сохраняющих множество $\{n_1, \dots, n_k\}$. В итоге мы имеем соотношение:

$$\mathbb{H}(\zeta^j) = \sum_{k=1}^j \sum_{\substack{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_1 + \dots + n_k = j}} \frac{C_{n_1 \dots n_k}^j}{S_{id}(n_1, \dots, n_k)} \mathbb{H}^c(\zeta^{n_1}) \dots \mathbb{H}^c(\zeta^{n_k}). \quad (27)$$

Второй шаг – разложить правую часть равенства (26). Это тоже можно сделать в несколько этапов. Воспользуемся определением экспоненты и запишем

$$\exp(\mathbb{H}^c(\exp(\zeta))) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} (\mathbb{H}^c(\exp(\zeta)))^k.$$

Затем, используем определение еще раз

$$(\mathbb{H}^c(\exp(\zeta)))^k = \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} \frac{\mathbb{H}^c(\zeta^{n_1})}{n_1!} \dots \frac{\mathbb{H}^c(\zeta^{n_k})}{n_k!},$$

и сделаем следующие пересуммирование

$$\sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} \rightarrow \sum_{j \geq 0} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 1 \\ n_1 + \dots + n_k = j}} \rightarrow \sum_{j \geq 0} \sum_{\substack{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_1 + \dots + n_k = j}} S_{diff}(n_1, \dots, n_k),$$

где $S_{diff}(n_1, \dots, n_k)$ – число различных перестановок множества $\{n_1, \dots, n_k\}$. Восстанавливая всю цепочку вычислений, получаем, что

правая сторона равенства (26) имеет вид

$$1 + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!} \left(\sum_{k=1}^j \sum_{\substack{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_1 + \dots + n_k = j}} C_{n_1 \dots n_k}^j \frac{S_{diff}(n_1, \dots, n_k)}{k!} \mathbb{H}^c(\zeta^{n_1}) \dots \mathbb{H}^c(\zeta^{n_k}) \right).$$

Легко видеть, что доказательство следует из равенства (27) и выражения в скобках в последней формуле. Это означает, что основное утверждение следует из соотношения

$$k! = S_{id}(n_1, \dots, n_k) S_{diff}(n_1, \dots, n_k), \quad (28)$$

которое может быть легко проверено. \square

Отметим, что в теореме и в ее доказательстве можно заменить вершину ζ конечной суммой вершин.

Рассмотрим одно следствие. Для этого мы введем полные многочлены Белла, которые могут быть определены следующей производящей функцией

$$1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!} = \exp \left[\sum_{k \geq 1} x_k \frac{t^k}{k!} \right], \text{ и } A_0 = 1.$$

Многочлен A_n имеет комбинаторный смысл, он показывает, сколько возможных разбиений имеет набор из n элементов. Рассмотрим, например, $A_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + x_4$. Коэффициент 1 при первом члене x_1^4 означает, что есть только 1 вариант разбить множество из четырех элементов на четыре ненулевых подмножества. Второй член $6x_1^2x_2$ означает, что есть 6 способов разбить множество из четырех элементов на три подмножества с порядками 1, 1 и 2. Остальные члены можно интерпретировать таким же образом.

Лемма 3.2. Пусть ζ – вершина или же сумма вершин с несколькими внешними линиями, тогда для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\zeta^n) &= A_n(\mathbb{H}^c(\zeta), \dots, \mathbb{H}^c(\zeta^n)), \\ (\mathbb{H} - \mathbb{H}^c)\zeta^n &= A_n(\mathbb{H}^c(\zeta), \dots, \mathbb{H}^c(\zeta^{n-1}), 0). \end{aligned}$$

Доказательство. Введем вспомогательный параметр q в соотношение из теоремы 2. Тогда имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{\mathbb{H}(\zeta^n)}{n!} q^n &= \mathbb{H} \exp(q\zeta) = \exp(\mathbb{H}^c(\exp(q\zeta))) \\ &= \exp\left(\sum_{n \geq 0} \frac{\mathbb{H}^c(\zeta^n)}{n!} q^n\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(\mathbb{H}^c(\zeta), \dots, \mathbb{H}^c(\zeta^n))}{n!} q^n, \end{aligned}$$

из которой следует первое утверждение.

Второе соотношение следует из первого и из свойств полиномов: для $n \geq 1$ верно, что

$$A_n(x_1, \dots, x_n) = A_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + x_n. \quad \square$$

Рассмотрев A_4 , легко проверить соотношение из леммы 3.1.

§4. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

4.1. Определения. В предыдущих разделах мы изучали функционал с кубическим потенциалом, который на самом деле является бесконечным произведением интегралов типа $I(\alpha)$, см. формулу (7). Давайте расширим наше определение следующим образом

$$Z(\beta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{i\alpha x^3} e^{\beta x} dx = \sum_{k \geq 0} \frac{\beta^k}{k!} Z_k(\alpha), \quad (29)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, и мы использовали ряд Тейлора для экспоненты.

Воспользуемся операцией логарифмирования. Тогда мы можем определить еще одну функцию

$$W(\beta, \alpha) = \ln(Z(\beta, \alpha)) = \sum_{k \geq 0} \frac{\beta^k}{k!} W_k(\alpha). \quad (30)$$

Легко проверить справедливость следующих разложений

$$\begin{aligned} Z(0, \alpha) &= 1 - \frac{15}{2}\alpha^2 + \frac{3465}{8}\alpha^4 + O(\alpha^6), \\ W(0, \alpha) &= -\frac{15}{2}\alpha^2 + 405\alpha^4 + O(\alpha^6). \end{aligned} \quad (31)$$

Третий функционал имеет более сложное определение, потому что возникает необходимость в преобразовании Лежандра. Рассмотрим для

этого дифференциальное уравнение вида

$$\theta = \frac{dW(\alpha, \beta)}{d\beta}, \quad (32)$$

где θ – вспомогательный параметр. Предположим, что уравнение решено относительно переменной $\beta = \beta(\theta, \alpha)$, являющейся уже функцией параметров θ и α . Тогда мы готовы определить новую функцию следующим образом

$$\Gamma(\theta, \alpha) = W(\beta(\theta, \alpha), \alpha) - \theta\beta(\theta, \alpha). \quad (33)$$

Ее разложение в ряд по переменной θ имеет вид

$$\Gamma(\theta, \alpha) = \sum_{k \geq 0} \frac{\theta^k}{k!} \Gamma_k(\alpha). \quad (34)$$

Видно, что преобразование Лежандра включает в себя переход от переменных (β, α) к переменным (θ, α) . Также отметим некоторые полезные частные значения

$$Z(0, 0) = 1, \quad W(0, 0) = 0, \quad \Gamma(0, \alpha) = W(\beta(0, \alpha), \alpha). \quad (35)$$

4.2. Уравнения для Z .

Лемма 4.1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{C}$. Тогда функционал $Z(\beta, \alpha)$ удовлетворяет уравнениям

$$\left[(1 - 3i\alpha\beta)\partial_\beta - i9\alpha^2\partial_\alpha - (3i\alpha + \beta) \right] Z(\beta, \alpha) = 0, \quad (36)$$

$$\left[3i\alpha\partial_\beta^2 - \partial_\beta + \beta \right] Z(\beta, \alpha) = 0. \quad (37)$$

Доказательство. Введем набор вспомогательных функций вида

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} e^{i\alpha x^3} e^{\beta x} dx,$$

где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $Z_0 = Z(\beta, \alpha)$. Используя интегрирование по частям, получаем, что функции удовлетворяют соотношениям

$$Z_n = (n - 1)Z_{n-2} + 3i\alpha Z_{n+1} + \beta Z_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

где $Z_{-1} = 0$. Тогда можно записать следующую цепочку равенств

$$Z_1 = 3i\alpha Z_2 + \beta Z_0 = (\beta + 3i\alpha)Z_0 + 3i\alpha\beta Z_1 - 9\alpha^2 Z_3,$$

из которой, после использования соотношений $\partial_\alpha Z_0 = iZ_3$ и $\partial_\beta Z_0 = Z_1$, следует первое утверждение. Второе равенство из леммы можно получить интегрированием по частям таким же образом. \square

Определение 8. Введем действие $S[x] = -x^2/2 + i\alpha x^3$. Тогда второе уравнение из леммы 4.1 можно переписать в виде формулы

$$\left[S'[\partial_\beta] + \beta \right] Z(\beta, \alpha) = 0, \tag{38}$$

называемой уравнением Дайсона–Швингера, см. [17].

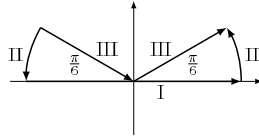


Рис. 3. Контур для интегральной теоремы Коши.

Выразим $Z(\beta, \alpha)$ в терминах известных специальных функций. Для этого в интеграле (29) сделаем замену $\alpha = z(3\alpha)^{-1/3} + (6i\alpha)^{-1}$. В итоге получим

$$Z(\beta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{1}{108\alpha^2} - i\frac{\beta}{6\alpha}}}{(3\alpha)^{1/3}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\frac{z^3}{3} + pz)} dz, \tag{39}$$

где $p = (3\alpha)^{-1/3} \left(\frac{1}{12\alpha} - i\beta \right)$. После этого, используя интегральную теорему Коши (см. [21]) для контура на рисунке 3 и определение функций Эйри

$$\int_I e^{i(\frac{z^3}{3} + pz)} dz = \int_{III} e^{i(\frac{z^3}{3} + pz)} dz = 2\pi \text{Ai}(p), \tag{40}$$

получим конечную формулу

$$Z(\beta, \alpha) = \sqrt{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{108\alpha^2} - i\frac{\beta}{6\alpha}}}{(3\alpha)^{1/3}} \text{Ai}(p). \tag{41}$$

4.3. Уравнения для W .

Лемма 4.2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{C}$. Тогда функционал $W(\beta, \alpha)$ удовлетворяет уравнениям

$$\left[(1 - 3i\alpha\beta)\partial_\beta - i9\alpha^2\partial_\alpha \right] W(\beta, \alpha) - (3i\alpha + \beta) = 0, \quad (42)$$

$$3i\alpha \left[(\partial_\beta W(\beta, \alpha))^2 + \partial_\beta^2 W(\beta, \alpha) \right] - \partial_\beta W(\beta, \alpha) + \beta = 0. \quad (43)$$

Доказательство. Оба уравнения получаются из равенств леммы 4.1 при помощи замены $Z = \exp(W)$ и соотношения

$$Z^{-1}\partial_\beta^2 Z = (\partial_\beta W)^2 + \partial_\beta^2 W. \quad \square$$

4.4. Функции Γ_0 и Γ_1 .

Лемма 4.3. Пусть $\Gamma(\theta, \alpha)$, $\Gamma_0(\alpha)$ и $\Gamma_1(\alpha)$ взяты из разложения (34), а также введены обозначения

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \beta(0, \alpha), \quad w(\alpha) = W(\tilde{\beta}(\alpha), \alpha). \quad (44)$$

Тогда мы имеем

$$\Gamma_0(\alpha) = w(\alpha), \quad \Gamma_1(\alpha) = -\tilde{\beta}(\alpha). \quad (45)$$

Доказательство. Мы используем преобразование Лежандра (33). Из него сразу следует первое равенство. Для этого нужно сделать подстановку $\theta = 0$ и использовать соотношение $\Gamma_0(\alpha) = \Gamma(0, \alpha)$ из (34). Для получения второго равенства рассмотрим дифференциалы

$$\begin{aligned} d\Gamma(\theta, \alpha) &= \frac{\partial W(\beta, \alpha)}{\partial \beta} d\beta(\theta, \alpha) + \frac{\partial W(\beta, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha - \beta(\theta, \alpha)d\theta - \theta d\beta(\theta, \alpha), \\ d\beta(\theta, \alpha) &= \frac{\partial \beta(\theta, \alpha)}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \beta(\theta, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha, \end{aligned}$$

из которых, при помощи уравнения (32), получается формула

$$d\Gamma(\theta, \alpha) = -\beta(\theta, \alpha)d\theta + \frac{\partial W(\beta, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha \Rightarrow \frac{\partial \Gamma(\theta, \alpha)}{\partial \theta} = -\beta(\theta, \alpha). \quad (46)$$

Тогда утверждение леммы следует из равенства

$$\Gamma_1(\alpha) = \left. \frac{\partial \Gamma(\theta, \alpha)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = -\tilde{\beta}(\alpha). \quad \square$$

Лемма 4.4. *Имеют место соотношения*

$$9i\alpha^2 \frac{\partial w(\alpha)}{\partial \alpha} + 3i\alpha + \tilde{\beta}(\alpha) = 0, \quad (47)$$

$$\left(1 - 3i\alpha\tilde{\beta} + 9i\alpha^2 \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial^2 W(\tilde{\beta}, \alpha)}{\partial \tilde{\beta}^2} - 1 = 0. \quad (48)$$

Доказательство. Разложим функцию $W(\beta, \alpha)$ в ряд Тейлора по степеням $(\beta - \tilde{\beta})$ около точки $\tilde{\beta}$

$$W(\beta, \alpha) = \sum_{k \geq 0} \frac{(\beta - \tilde{\beta})^k}{k!} \frac{\partial^k W(\beta, \alpha)}{\partial \beta^k} \Big|_{\beta=\tilde{\beta}} = \sum_{k \geq 0} \frac{(\beta - \tilde{\beta})^k}{k!} \frac{\partial^k W(\tilde{\beta}, \alpha)}{\partial \tilde{\beta}^k}.$$

Если подставим последнее равенство в уравнение (42)

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(\beta - \tilde{\beta})^k}{k!} \left[\left(1 - 3i\alpha\tilde{\beta} + 9i\alpha^2 \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} - 9i\alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} - 3ik\alpha \right] \frac{\partial^k W(\tilde{\beta}, \alpha)}{\partial \tilde{\beta}^k} - 3i\alpha - \tilde{\beta} - (\beta - \tilde{\beta}) = 0,$$

мы получим набор рекуррентных соотношений на коэффициенты. Утверждения леммы получаются из нулевого и первого порядков с использованием $\partial W(\tilde{\beta}, \alpha)/\partial \tilde{\beta} = 0$, см. формулу (32) при $\theta = 0$. \square

4.5. Решения для $\tilde{\beta}$ и $w(\alpha)$.

Лемма 4.5. *Функция $\tilde{\beta}$ из равенства (44) удовлетворяет уравнению первого порядка*

$$9i\alpha^2 \tilde{\beta}(\alpha) \partial_\alpha \tilde{\beta}(\alpha) - 3i\alpha \tilde{\beta}^2(\alpha) + 3i\alpha + \tilde{\beta}(\alpha) = 0 \quad (49)$$

с начальным условием $\tilde{\beta}(0) = 0$. Более того, вблизи точки $\alpha = 0$ ее можно представить рядом

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \sum_{k \geq 0} b_{2k+1} \alpha^{2k+1}, \quad (50)$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$b_1 = -3i, \quad b_{2k+3} = -6i \sum_{n=0}^k (3(k-n) + 1) b_{2n+1} b_{2k-2n+1}, \quad k \geq 0. \quad (51)$$

Доказательство. Уравнение (49) можно получить, подставив соотношение (43) в равенство (48) и используя тот факт, что в точке $\theta = 0$ верны формулы

$$\frac{\partial W(\tilde{\beta}, \alpha)}{\partial \tilde{\beta}} = 0, \quad 3i\alpha \frac{\partial^2 W(\tilde{\beta}, \alpha)}{\partial \tilde{\beta}^2} + \tilde{\beta}(\alpha) = 0.$$

Затем, после подстановки (50) в уравнение (49) получим

$$\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n=0}^k 6i(3(k-n)+1)b_{2n+1}b_{2k-2n+1} + b_{2k+3} \right) \alpha^{2k+3} + (b_1 + 3i)\alpha = 0,$$

откуда и следует последнее утверждение леммы. \square

Лемма 4.6. *Функция $w(\alpha)$ из (44) возле точки $\alpha = 0$ может быть представлена асимптотическим рядом $w(\alpha) = \sum_{k \geq 0} c_{2k} \alpha^{2k}$ с коэффициентами, удовлетворяющими равенствам*

$$c_0 = 0, \quad c_{2k} = -\frac{b_{2k+1}}{18ik}, \quad k \geq 1, \quad (52)$$

где b_{2k+1} взяты из (51).

Доказательство. Утверждение доказывается прямой подстановкой ряда для $w(\alpha)$ в уравнение (47) с учетом представления (50) для функции $\tilde{\beta}(\alpha)$ и начального условия $w(0) = W(\tilde{\beta}(0), 0) = 0$. \square

Можно проверить, что справедливо разложение

$$\Gamma(0, \alpha) = -3\alpha^2 + 135\alpha^4 + O(\alpha^6).$$

§5. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТА

5.1. Функции Z_0 и W_0 . В предыдущем разделе мы изучили функции Z , W и Γ . Давайте обратим внимание на их графическую интерпретацию. Рассмотрим функцию $Z_0 = Z(0, \alpha)$, а точнее ее ряд

$$Z_0(\alpha) = \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{8^p} \frac{(6p)!}{(2p)!(3p)!} \alpha^{2p} = 1 - \frac{15}{2}\alpha^2 + O(\alpha^4). \quad (53)$$

Отметим, что диаграмма \curvearrowright пропорциональна $i\alpha$. Затем, используя приведенные выше вычисления (19) и (20), можно написать для первых порядков

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\left(1 + \curvearrowright + \frac{1}{2!}\curvearrowright^2 + \dots\right) &= 1 + \frac{9}{2} \text{---} \text{---} + 3 \text{---} + \dots \\ &= 1 + \frac{9}{2} (i\alpha)^2 + 3 (i\alpha)^2 + \dots \\ &= 1 - \frac{15}{2} \alpha^2 + \dots \end{aligned}$$

Видно, что последняя строка совпадает с выражением (53). Выходит, что для получения коэффициента разложения Z в ряд Тейлора необходимо нарисовать все возможные диаграммы в соответствующем порядке, затем каждой линии сопоставить 1, а каждой вершине сопоставить $i\alpha$, а затем поделить на факториал. Записать это можно следующим образом.

Теорема 3. Для функции Z_0 справедлива формула

$$Z_0(\alpha) = \mathbb{H}\left(e^{\curvearrowright}\right). \tag{54}$$

Доказательство. Рассмотрим порядок $2p$, где $p \in \mathbb{N}$, тогда можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2p)!} \mathbb{H}\left(\curvearrowright^{2p}\right) &= \frac{1}{(2p)!} \left(\begin{array}{l} \text{все возможные вакуумные} \\ \text{диаграммы с } 2p \text{ вершинами} \end{array}\right) = \\ &= \frac{1}{(2p)!} \left(\begin{array}{l} \text{количество всех возможных вакуумных} \\ \text{диаграмм с } 2p \text{ вершинами} \end{array}\right) (i\alpha)^{2p}. \end{aligned}$$

Сосчитаем количество диаграмм. Если имеется $2p$ вершин, тогда линий – $6p$ штук. Это значит, что нужно сосчитать число способов разбить $6p$ свободных концов на пары. Оно равно $(6p - 1)!!$. Тогда можно записать

$$\frac{1}{(2p)!} \mathbb{H}\left(\curvearrowright^{2p}\right) = (-1)^p \frac{(6p - 1)!!}{(2p)!} \alpha^{2p} = \frac{(-1)^p}{8^p} \frac{(6p)!}{(2p)!(3p)!} \alpha^{2p},$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Также можно убедиться, что $Z_n(\alpha) = \mathbb{H}_n\left(e^{\curvearrowright}\right)$ выполнено для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Подобные свойства наблюдаются и у функции W . Действительно, покажем, что в первых порядках W_0 является суммой только связных диаграмм.

Теорема 4. Для функции W_0 справедлива формула

$$W_0(\alpha) = \mathbb{H}^c \left(e^{\curvearrowright} \right).$$

Доказательство. Используем теорему 2. Тогда получим цепочку равенств

$$W_0 = \ln(Z_0) = \ln \left(\mathbb{H} \left(e^{\curvearrowright} \right) \right) = \mathbb{H}^c \left(e^{\curvearrowright} \right).$$

□

Приведем стандартные обозначения связных диаграмм

$$W_0 = \text{шарик}, \quad W_1 = \text{шарик с линией}, \dots, \quad (55)$$

где W_k имеет k внешних линий.

5.2. Функции Γ_0 и Γ_1 . Рассмотрим подробнее уравнение (47) и попробуем интерпретировать его на языке диаграмм. Для этого перепишем уравнение в более удобной форме. Используя равенства $w(\alpha) = \Gamma_0$ и $\tilde{\beta}(\alpha) = -\Gamma_1$ из леммы 4.3, получим

$$6 \cdot i\alpha \cdot \frac{3}{2} i\alpha \frac{\partial}{\partial i\alpha} \Gamma_0 + 3 \cdot i\alpha = \Gamma_1. \quad (56)$$

Мы собираемся показать, что Γ_0 – это сумма всех вакуумных сильно связных диаграмм из W_0 , а Γ_1 – это сумма всех сильно связных диаграмм с одной внешней линией. Для удобства они будут обозначены следующим образом:

$$\mathbb{H}^{\text{sc}} \left(e^{\curvearrowright} \right) = \text{шарик}, \quad \mathbb{H}_1^{\text{sc}} \left(e^{\curvearrowright} \right) = \text{шарик с линией}. \quad (57)$$

Для начала заметим, что оператор $x\partial_x$, действуя на x^n дает nx^n . Найдем решение для Γ_0 в виде комбинации вакуумных диаграмм. Используя тот факт, что в нашем случае все вакуумные диаграммы являются полиномами от параметра $i\alpha$, поскольку вершина пропорциональна $i\alpha$, для произвольного члена γ_0 из Γ_0 получим

$$i\alpha \frac{\partial}{\partial i\alpha} \gamma_0 = (\text{число вершин в } \gamma_0) \cdot \gamma_0. \quad (58)$$

Если количество вершин в диаграмме γ_0 умножить на $3/2$, то получится число внутренних линий, потому что каждая вершина содержит

три линии, а каждая линия имеет две вершины на концах. То есть

$$\frac{3}{2}i\alpha \frac{\partial}{\partial i\alpha} \gamma_0 = (\text{число внутренних линий в } \gamma_0) \cdot \gamma_0. \quad (59)$$

Далее, множитель $6 \cdot i\alpha$ символизирует число способов присоединить тройную вершину к двум линиям. Другими словами, мы берем γ_0 , разрезаем произвольным образом одну внутреннюю линию и подсоединяем к разрезу тройную вершину. А затем суммируем получившиеся диаграммы по всем внутренним линиям.

Определение 9. Пусть D – диаграмма. Тогда оператор $\mathbb{F}(D)$ действует на D следующим образом: он разрезает произвольную внутреннюю линию в D , присоединяет тройную вершину \lrcorner всеми возможными способами, а затем суммирует по всем внутренним линиям из D .

Сказанное выше означает, что нам нужно найти такие диаграммные суммы Γ_0 и Γ_1 , чтобы равенство (56) можно было записать в виде

$$\mathbb{F}(\Gamma_0) + 3 \text{---} \bigcirc = \Gamma_1. \quad (60)$$

Легко убедиться, что функции из определения (57) удовлетворяют последнему равенству, то есть

$$\mathbb{F}(\text{⊗}) + 3 \text{---} \bigcirc = \text{---} \text{⊗}$$

Однако, они не единственны. Так что, для фиксации решения, дополнительно проанализируем уравнение (49). Воспользуемся формулой (45) и перепишем (49) в более удобном виде

$$3i\alpha = \Gamma_1 \left(1 + 3i\alpha\Gamma_1 - 9i\alpha^2 \frac{\partial}{\partial i\alpha} \Gamma_1 \right). \quad (61)$$

В предыдущем разделе мы выбрали анзац для Γ_0 . Согласно ему, функция Γ_1 представляет собой набор диаграмм с одной внешней линией. Рассмотрим подробнее последнее слагаемое в (61) для произвольного члена γ_1 из Γ_1 . Используя аргументы из предыдущего раздела, мы можем записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} 9i\alpha \left(i\alpha \frac{\partial}{\partial i\alpha} \right) \gamma_1 &= 9i\alpha [\text{число вершин в } \gamma_1] \cdot \gamma_1 \\ &= 6i\alpha [\text{число внутренних линий в } \gamma_1] \cdot \gamma_1 + 3i\alpha \gamma_1 \quad (62) \\ &= \mathbb{F}(\gamma_1) + 3i\alpha \gamma_1. \end{aligned}$$

Далее, после суммирования по всем γ_1 подставим последнее соотношение в равенство (61). Тогда получим

$$3i\alpha = \Gamma_1 \cdot [1 - \mathbb{F}(\Gamma_1)] \implies \Gamma_1 = 3i\alpha \sum_{k \geq 0} \left(\mathbb{F}(\Gamma_1) \right)^k. \quad (63)$$

Давайте докажем одно вспомогательное соотношение и применим его к нашей ситуации.

Лемма 5.1. *Рассмотрим вершину с тремя внешними линиями \lrcorner и определим следующий объект*

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \mathbb{H}_2^{\text{sc}} \left(e^{\lrcorner} \right). \quad (64)$$

Тогда справедливо равенство, изображенное на рисунке 4.

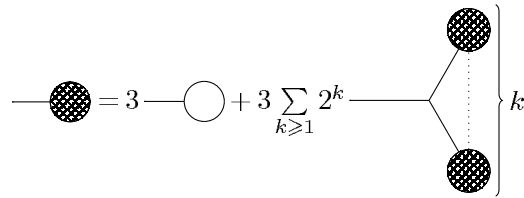


Рис. 4. Разложение суммы сильно связанных диаграмм.

Доказательство. Начнем с левой части равенства, изображенного на рисунке 4, и воспользуемся определением (57) для суммы сильно связанных диаграмм с одной внешней линией. После этого мы можем выбрать одну вершину, один конец которой останется внешним. Конечно, следует учитывать соответствующий коэффициент, который появляется из-за выбора одного элемента среди $n + 1$ одинаковых. Так получаем

следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} &= \mathbb{H}_1^{\text{sc}} \left(e^{\text{---} \bigwedge \text{---}} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} \mathbb{H}_1^{\text{sc}} \left(\text{---} \bigwedge^{n+1} \text{---} \right) \\ &= 3 \text{---} \bigcirc \text{---} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mathbb{H}_1^{\text{sc}} \left(\text{---} \bigwedge \mathbb{H}_2^{\text{c}} \left(\text{---} \bigwedge^n \text{---} \right) \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Затем мы воспользуемся тем фактом, что любая связная диаграмма ζ из $\mathbb{H}_2^{\text{c}} \left(\text{---} \bigwedge^n \text{---} \right)$ может быть представлена в виде древесной диаграммы после того, как все сильно связанные поддиаграммы заменены точками. Более того, нас интересуют только такие ζ , что $\mathbb{H}(\zeta)$ является сильно связной диаграммой. Это означает, что мы должны изучать только цепочки. Следовательно, с учетом необходимых множителей последнюю часть (65) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &3 \text{---} \bigcirc \text{---} \\ &+ \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{n_k \geq \dots \geq n_1 \geq 1 \\ n_k + \dots + n_1 = n}} \frac{C_{n_k \dots n_1}^n}{n! \text{Sid}(n_k, \dots, n_1)} \mathbb{H}_1^{\text{sc}} \left(\text{---} \bigwedge \mathbb{H}_2^{\text{sc}} \left(\text{---} \bigwedge^{n_k} \text{---} \right) \dots \mathbb{H}_2^{\text{sc}} \left(\text{---} \bigwedge^{n_1} \text{---} \right) \right). \end{aligned}$$

Затем, используя следующее пересуммирование

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{n_k \geq \dots \geq n_1 \geq 1 \\ n_k + \dots + n_1 = n}} \frac{C_{n_k \dots n_1}^n}{n! \text{Sid}(n_k, \dots, n_1)} \rightarrow \sum_{n_k, \dots, n_1 \geq 1} \frac{1}{k! n_k! \dots n_1!}, \quad (66)$$

соотношение (28) и определение (64), получаем формулу

$$3 \text{---} \bigcirc \text{---} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \mathbb{H}_1^{\text{sc}} \left(\text{---} \bigwedge \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right)^k \right), \quad (67)$$

из которой следует утверждение леммы. \square

Отметим, что справедливо одно дополнительное равенство

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{1}{2} \mathbb{F} \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right). \quad (68)$$

Теперь мы готовы применить все описанные выше соотношения к нашей задаче. Действительно, используя формулу (68), мы можем переписать правую часть равенства, изображенного на рисунке 4, в форме, изображенной на рисунке 5.

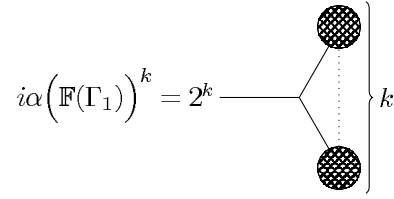


Рис. 5. Соотношение для простейшей кубической модели.

Последнее соотношение приводит к связи между уравнением из леммы 5.1 и уравнением из (63). Отсюда получаем следующие решения

$$\Gamma_0 = \text{---}\bigcirc\text{---}, \quad \Gamma_1 = \text{---}\bigcirc\text{---}. \quad (69)$$

§6. МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ

6.1. Основная идея. Отметим, что благодаря факторизации (7) кубической модели мы можем изучать только одномерный интеграл. Основным объектом этого раздела является $I(\alpha)$ из второй формулы в (7). Логарифм $I(\alpha)$ называется эффективным действием

$$J(\alpha) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{S[x]} dx \right) \quad (70)$$

и играет важную роль в физике, поскольку равняется сумме классического действия $S[y]$ из определения 8 в некоторой точке y и квантовых поправок. Выведем это представление.

Сначала мы сдвигаем переменную интегрирования $x \rightarrow x + y$, а затем масштабируем ее следующим образом $x \rightarrow x/\sqrt{1 - 6i\alpha y}$. После этого получаем разложение

$$J(\alpha) = S[y] - \frac{1}{2} \ln(1 - 6i\alpha y) + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} + is(\alpha, y)x^3 + t(\alpha, y)x} dx \right), \quad (71)$$

где

$$t = t(\alpha, y) = \frac{-y + 3i\alpha y^2}{(1 - 6i\alpha y)^{1/2}}, \quad s = s(\alpha, y) = \frac{\alpha}{(1 - 6i\alpha y)^{3/2}}.$$

Из формулы (71) видно, что квантовое действие $J(\alpha)$ равно сумме классического действия $S[y]$, первой поправки $-\frac{1}{2}\ln(1 - 6i\alpha y)$ и высших поправок.

Отметим, что в интеграле появился свободный параметр y , который можно выбрать удобным способом. Также третий член (с логарифмом) из (71) можно переписать в терминах известной функции

$$W(t, s) = W\left(\frac{-y + 3i\alpha y^2}{(1 - 6i\alpha y)^{1/2}}, \frac{\alpha}{(1 - 6i\alpha y)^{3/2}}\right).$$

Давайте воспользуемся леммой 4.3, которая позволяет нам интерпретировать $W(t, s)$ как сумму сильно связанных диаграмм. Для этого выберем первый аргумент функции W равным значению функции $\tilde{\beta}$ в точке s . Этот переход позволяет сократить количество вычислений в общем случае.

Таким образом, нам необходимо решить нелинейное уравнение $t(\alpha, y) = \tilde{\beta}(s(\alpha, y))$. Используем представление (50) для функции $\tilde{\beta}$ и запишем соотношение явно

$$\frac{-y + 3i\alpha y^2}{(1 - 6i\alpha y)^{1/2}} = \sum_{k \geq 0} b_{2k+1} \left(\frac{\alpha}{(1 - 6i\alpha y)^{3/2}} \right)^{2k+1}. \quad (72)$$

Фактически нам нужно найти решение y этого уравнения как функцию параметра α . Затем, подставляя его в формулу (71), получаем значение интеграла $J(\alpha)$. В то же время, если рассматривать только первые несколько сильно связанных вкладов в W , мы получим приближительное значение интеграла. Обратим внимание, что для расчета сильно связанных диаграмм необходимо учитывать, что каждая линия соответствует 1, а каждая вершина \lrcorner соответствует $i\alpha/(1 - 6i\alpha y_0)^{3/2}$.

Другими словами, используя леммы 4.5 и 4.6, мы можем записать третий член формулы (71) в виде

$$W(\tilde{\beta}(s), s) = \Gamma_0(s) = \sum_{k \geq 1} c_{2k} s^{2k} = \sum_{k \geq 1} c_{2k} \left(\frac{\alpha}{(1 - 6i\alpha y)^{3/2}} \right)^{2k}.$$

6.2. Пример. Давайте найдем приближение для решения уравнения (72). Будем искать в виде ряда Тейлора $y(\alpha) = \sum_{k \geq 0} y_k \alpha^k$ по степеням параметра α .

Затем, подставляя следующие разложения

$$\begin{aligned} \frac{-y + 3i\alpha y^2}{(1 - 6i\alpha y)^{1/2}} &= -y + \frac{9\alpha^2 y^3}{2} + o(\alpha^2), \\ \frac{\alpha}{(1 - 6i\alpha y)^{3/2}} &= \alpha + 9i\alpha^2 y + o(\alpha^2), \end{aligned}$$

в уравнение (72) и используя анзац для $y(\alpha)$, получаем соотношения для первых трех коэффициентов

$$y_0 = 0, \quad y_1 = -b_1 = -3i, \quad y_2 = \frac{1}{2} (9y_0^3 - 18ib_1 y_0) = 0.$$

Отсюда $y = -3i\alpha + o(\alpha^2)$, а интеграл в первом приближении

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= S[y] - \underbrace{\frac{1}{2} \ln(1 - 6i\alpha y)}_{\frac{1}{2}(-6i\alpha y + o(\alpha^2))} + W \left(\underbrace{\frac{-y + 3i\alpha y^2}{\sqrt{1 - 6i\alpha y}}, \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 6i\alpha y^3}}}_{c_0 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + o(\alpha^2)} \right) \\ &= -\frac{15}{2} \alpha^2 + o(\alpha^2) \end{aligned}$$

дает тот же результат, что и в формуле (31), где использовались леммы 4.5 и 4.6.

§7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном разделе хотелось бы прокомментировать переход от простейшей кубической модели к произвольной. Прежде всего отметим, что диаграммные равенства из разделов 3 и 4, уравнение Дайсона–Швингера, преобразование Лежандра носят общий характер. Они верны для всех моделей. Таким образом, для перехода от одной модели к другой нам нужно изменить только несколько базовых блоков, которые представлены в следующей таблице.

	Кубическая модель	Произвольная модель
Переменные	$k \in \mathbb{N}$	$z \in \mathcal{M}$, \mathcal{M} – многообразие
Поле	$x_{(\cdot)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$	$\phi(\cdot) \in \mathcal{A}$, \mathcal{A} функ. пр-во на \mathcal{M}
Кл. действие	$S[x]$ из опр. 8	$S[\phi]$ – функционал на \mathcal{A}
Пропагатор	δ_{ij} , $i, j \in \mathbb{N}$	$G(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathcal{M}$
Производная	$\frac{\partial}{\partial x_k}$	$\frac{\delta}{\delta \phi(z)}$ – функ. производная
Интеграл по путям	$\Phi_1(\exp(S[\cdot]))$	$\int_{\mathcal{A}} \exp(S[\phi]) \mathcal{D}\phi$
Вершины	$\frown \sim i\alpha_k$	ζ – набор вершин

Отметим, что все расчеты раздела 5 основаны на свойствах модели. Например, на связи между \frown и $i\alpha$. Следовательно, расчеты не носят общего характера. Однако, полученный в разделе 5 результат о том, что Γ_0 и Γ_1 являются суммами сильно связных диаграмм, без внешних линий и с одной внешней линией соответственно, является общим.

Раздел 6 посвящен методу фонового поля. Конечно, мы снова провели все расчеты на основе простейшей модели. Но основная идея, заключающаяся в том, что метод основан на сдвиге переменной функцией специального типа, сохраняется для общего случая.

Также стоит отметить, что эти заметки содержат только основные и элементарные равенства. Анализ более сложных моделей и их свойств можно найти в приведенном выше списке литературы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Field*, John Wiley & Sons Inc., 3rd edition, 1980.
2. M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory*, Boulder, CO, Westview Press, 1995.
3. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. Volume 1*, Cambridge University Press, 1995.
4. A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.
5. M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, 2014.
6. P. J. Daniell, *Integrals in an infinite number of dimensions*. — *Annals Math.* **20**, No. 4 (1919), 281–288.
7. L. A. Takhtajan, *Quantum Mechanics for Mathematicians*, American Mathematical Society, Graduate Series in Mathematics **95**, 2008.

8. A. V. Ivanov, *Notes on functional integration*. — Zap. Nauchn. Semin. POMI **487** (2019), 140–150.
9. R. P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*. — Review Modern Phys. **20** (1948), 367–387.
10. R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Dover Publications, Emended Editon edition, 2010.
11. S. K. Lando, *Lectures on generating functions*. — The Student Mathematical Library **23** (2003), 1–148.
12. J. Zinn-Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, Oxford University Press, USA, 2005.
13. L. F. Abbott, *Introduction to the background field method*. — Acta Phys. Polon. B **13** (1982), 33–50.
14. I. Y. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S matrix in gauge-invariant theories*. — Theor. Math. Phys. **21** (1974), 1165–1172.
15. L. D. Faddeev, *Mass in Quantum Yang-Mills Theory: Comment on a Clay Millennium problem*, (2009), [arXiv:0911.1013](https://arxiv.org/abs/0911.1013) [math-ph].
16. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for ϕ^3 model*. — Zap. Nauchn. Semin. POMI **487** (2019), 151–166.
17. A. N. Vasiliev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, CRC Press, 1998.
18. P. Cvitanovi, *Field Theory*, Nordita Classics Illustrated, Copenhagen, Denmark, 1983.
19. O. Valle, M. Soares, *Airy Functions and Applications to Physics*, Imperial College Press, 2010.
20. N. Christofides, *Graph theory: an algorithmic approach*, London: Academic Press, 1975.
21. P. L. Walker, *An introduction to complex analysis*, New York, Wiley, 1975.

Ivanov A. V., Russkikh M. A. Quantum field theory on the example of the simplest cubic model.

The paper is devoted to the description of the basic tools of quantum field theory on the example of the simplest cubic model. We introduce concepts such as the functional integral, generating functions, the background field method and the Feynman diagram technique, as well as consider the connections between them. The model in question allows you to perform all calculations explicitly. We also provide all the necessary proofs and derivations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербургский международный
математический институт
им. Леонарда Эйлера, С.-Петербург, Россия
E-mail: regul1@mail.ru
E-mail: russkix-maksim@mail.ru

Поступило 6 ноября 2021 г.