

А. В. Иванов

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ГУСТАФСОНА ДЛЯ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{R})$

§1. ВВЕДЕНИЕ

Интегралы Густафсона первого и второго типов играют важную роль в современной математической физике. Впервые они появились в работах [1–3] при изучении многомерных интегралов с параметрами, а также их деформированных q -аналогов. В качестве приложений стоит отметить теорию ортогональных полиномов [4], а также дуальность в суперсимметричной квантовой теории поля [5], где используются эллиптические аналоги упомянутых интегралов [6–8].

Одно из последних, достаточно плодотворных, направлений связано с исследованием интегрируемых моделей [9–11]. Так, при анализе спиновых цепочек для группы $SL(2, \mathbb{C})$ появилась необходимость в независимом выводе интегралов Густафсона первого и второго типов [12]. Вывод основан на обобщении формул суммирования из работы [2] на случай “комплексных” Гамма-функций.

Данная работа посвящена обобщению понятия интеграла Густафсона на случай Гамма-функций, возникающих при работе с группой $SL(2, \mathbb{R})$, см. [13–15]. Как известно, формула Планшереля для указанной группы содержит как интегральную часть, так и суммирование по дискретным представлениям. Это приводит к тому, что плотность меры имеет набор полюсов в комплексной плоскости, и процесс вычисления интегралов путем замыкания контуров в полуплоскости перестает быть тривиальным. Именно поэтому доказательство основано не только на обычном использовании формул суммирования, но и на введении области интегрирования специального вида. Предполагается, что полученные результаты помогут при дальнейшем анализе интегралов Густафсона, а также в теории интегрируемых моделей.

Ключевые слова: интеграл Густафсона, многомерный интеграл, группа $SL(2, \mathbb{R})$.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 19-11-00131). Автор является победителем конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность спонсорам и жюри.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводятся все необходимые объекты, а затем формулируется и доказывается теорема для интеграла первого типа. В разделе 3 приводится теорема для интеграла второго типа. В заключении обсуждаются результаты и открытые вопросы.

§2. ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО ТИПА

Введем переменные специального вида $\mathbf{u} = (u, \epsilon)$, которые состоят из комплексной составляющей $u \in \mathbb{C}$ и дискретной $\epsilon \in \{0, 1\}$. Мы будем выделять их курсивом. Далее определим базовые операции для таких объектов: пусть $\mathbf{u}_i = (u_i, \epsilon_i)$, $i = 1, 2$, и $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 &= (u_1 + u_2, \epsilon_1 + \epsilon_2 \bmod 2), \\ -\mathbf{u}_1 &= (-u_1, \epsilon_1), \quad k \cdot \mathbf{u}_1 = (ku_1, k\epsilon_1 \bmod 2).\end{aligned}$$

Затем определим аналоги косинуса и синуса следующими равенствами

$$\begin{aligned}c(\mathbf{u}) = c(u, \epsilon) &= \begin{cases} \cos(\pi u/2), & \epsilon = 0; \\ i \sin(\pi u/2), & \epsilon = 1, \end{cases} \\ s(\mathbf{u}) = s(u, \epsilon) &= \begin{cases} \sin(\pi u/2), & \epsilon = 0; \\ -i \cos(\pi u/2), & \epsilon = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Определение. *С учетом всего вышеизложенного Гамма-функцией для группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ мы будем называть $\Gamma(\mathbf{u}) = 2^{1-u} c(\mathbf{u}) \Gamma(u)$, где $\Gamma(u)$ – стандартная Гамма-функция.*

Отметим, что такие функции удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{\Gamma(\mathbf{u})\Gamma(-\mathbf{u})} = \frac{u}{2\pi} \frac{s(-\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})}. \quad (1)$$

Далее, введем в рассмотрение контур специального вида $\gamma(u)$, где $u \in \mathbb{C}$, который начинается в точке $-\infty + i\mathrm{Im}(u) - i0$, затем проходит вдоль $\mathbb{R} + i\mathrm{Im}(u) - i0$, огибает против часовой стрелки точку u и возвращается вдоль $\mathbb{R} + i\mathrm{Im}(u) + i0$ в точку $-\infty + i\mathrm{Im}(u) + i0$. Также отметим, что $i\mathbb{R}$ отделяет на комплексной плоскости две открытые области, левую \mathbb{C}_l и правую \mathbb{C}_r .

Теорема 1. *Пусть натуральное $N > 1$ и $\{z_i, w_i \in \mathbb{C}_r\}_{i=1}^N$ – набор чисел, обладающих свойством $\mathrm{Im}(w_i) \neq \mathrm{Im}(w_j)$ для всех $i \neq j$. Пусть*

также $\mathbf{z}_i = (z_i, \delta_i)$ и $\mathbf{w}_i = (w_i, \varepsilon_i)$, где $\delta_i, \varepsilon_i \in \{0, 1\}$, находятся в области аналитичности правой части (2). Определим далее множество S_N всех возможных перестановок σ набора чисел $\{1, \dots, N\}$. Тогда с учетом всего вышеизложенного верно соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(N-1)!} \sum_{\sigma \in S_N} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \sum_{\epsilon_k=0,1} \int_{\gamma_{\sigma(k)}} \frac{du_k}{4\pi i} \right) \frac{\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{N-1} \Gamma(\mathbf{z}_i - \mathbf{u}_j) \Gamma(\mathbf{u}_j + \mathbf{w}_i)}{\prod_{i < j}^{N-1} \Gamma(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \Gamma(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)} \\ &= \prod_{i,j=1}^N \Gamma(\mathbf{z}_i + \mathbf{w}_j) / \Gamma \left(\sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i + \mathbf{w}_i) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma_i = \gamma(w_i)$ для всех i . Для случая $N = 2$ произведение с условием $i < j$ равно единице. Переход к другим значениям параметров понимается в смысле аналитического продолжения.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} & T_1(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N; u_1, \dots, u_{N-1}) \\ &= \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{N-1}=0,1} \left(\prod_{i < j}^{N-1} \frac{s(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)}{c(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)} \right) \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{N-1} c(\mathbf{z}_i - \mathbf{u}_j) c(\mathbf{u}_j + \mathbf{w}_i) \end{aligned} \quad (3)$$

и проанализируем ее свойства периодичности, а именно, сдвиг на единицу. Действительно, пусть переменная u_1 сдвинута на величину 1. Заметим, что используя свойства

$$c(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{1}) = \pm i c(\mathbf{u}_j + \mathbf{e}), \quad s(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{1}) = \pm i s(\mathbf{u}_j + \mathbf{e}), \quad (4)$$

где $\mathbf{1} = (1, 0)$ и $\mathbf{e} = (0, 1)$, не трудно убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} c(\mathbf{z}_i - \mathbf{1} - \mathbf{u}_j) c(\mathbf{u}_j + \mathbf{1} + \mathbf{w}_i) &= c(\mathbf{z}_i - \mathbf{u}_j + \mathbf{e}) c(\mathbf{u}_j + \mathbf{w}_i + \mathbf{e}), \\ \frac{s(\mathbf{u}_i - \mathbf{1} - \mathbf{u}_j)}{c(\mathbf{u}_j + \mathbf{1} - \mathbf{u}_i)} &= - \frac{s(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j + \mathbf{e})}{c(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i + \mathbf{e})}. \end{aligned}$$

Следовательно, используя определение (3), мы получаем равенство

$$\begin{aligned} & T_1(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N; u_1 + 1, u_2, \dots, u_{N-1}) \\ &= (-1)^N T_1(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N; u_1, \dots, u_{N-1}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно изучить сдвиги остальных переменных. Окончательный результат формулируется так: пусть $\{p_n \in \mathbb{Z}\}_{n=1}^{N-1}$, тогда

$$\begin{aligned} & T_1(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N; u_1 + p_1, \dots, u_{N-1} + p_{N-1}) \\ &= (-1)^N \sum_{n=1}^{N-1} p_n T_1(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N; u_1, \dots, u_{N-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Приступим к вычислению интеграла. Ясно, что условия теоремы обеспечивают работу с функцией (3) в области регулярности. Таким образом, мы должны отслеживать лишь сингулярности Гамма-функций, которые имеют вид $-w_i - p_i$, где $p_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В этом случае левая часть формулы (2) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} & C \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{p_1, \dots, p_{N-1}=0}^{+\infty} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{p_k}}{p_k!} \prod_{i \neq \sigma(k)}^N \Gamma(w_i - w_{\sigma(k)} - p_k) \\ & T_1(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N; -w_{\sigma(1)} - p_1, \dots, -w_{\sigma(N-1)} - p_{N-1}) \\ & \left(\prod_{i < k}^{N-1} (w_{\sigma(i)} + p_i - w_{\sigma(k)} - p_k) \right) \left(\prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{N-1} \Gamma(z_i + w_{\sigma(k)} + p_k) \right), \end{aligned}$$

где $C = 2^{\frac{3}{2}N^2 - \frac{3}{2}N - (N-1)} \sum_{i=1}^N (z_i + w_i) \pi^{-\frac{(N-2)(N-1)}{2}} [(N-1)!]^{-1}$.

Тогда, учитывая свойство периодичности (5), последняя формула после преобразований Гамма-функций принимает вид

$$\begin{aligned} & C \sum_{\sigma \in S_N} T_1(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N; -w_{\sigma(1)}, \dots, -w_{\sigma(N-1)}) \\ & \left(\prod_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^N \Gamma(z_i + w_{\sigma(k)}) \right) \left(\prod_{k=1}^{N-1} \prod_{i \neq \sigma(k)} \Gamma(w_i - w_{\sigma(k)}) \right) \\ & \sum_{p_1, \dots, p_{N-1}=0}^{+\infty} \left(\prod_{i < k}^{N-1} (w_{\sigma(i)} + p_i - w_{\sigma(k)} - p_k) \right) \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{N-1} \frac{(z_i + w_{\sigma(k)})_{p_k}}{(1 - w_i + w_{\sigma(k)})_{p_k}}. \end{aligned}$$

Мы специально выделили внутреннее суммирование в последней строке, поскольку оно может быть вычислено при помощи формулы из работ [2, 16]

$$\sum_{p_1, \dots, p_{N-1}=0}^{+\infty} \left(\prod_{i < k}^{N-1} (w_{\sigma(i)} + p_i - w_{\sigma(k)} - p_k) \right) \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{N-1} \frac{(z_i + w_{\sigma(k)})_{p_k}}{(1 - w_i + w_{\sigma(k)})_{p_k}}$$

$$= \Gamma \left(1 - \sum_{i=1}^N (z_i + w_i) \right) \frac{\prod_{k=1}^{N-1} \Gamma(1 + w_{\sigma(k)} - w_{\sigma(N)})}{\prod_{k=1}^N \Gamma(1 - z_k - w_{\sigma(N)})} \left(\prod_{i < j}^{N-1} (w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(j)}) \right).$$

Далее мы трансформируем часть функций путем применения соотношений

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u), \quad \Gamma(1-u)\Gamma(u)\sin(\pi u) = \pi, \quad \sin(\pi u) = 2s(\mathbf{u})c(\mathbf{u}), \quad (6)$$

и после некоторых сокращений получим

$$\frac{\Gamma(1 - \sum_{i=1}^N (z_i + w_i))}{\pi 2^{-\sum_{i=1}^N (z_i + w_i)} (N-1)!} \left(\prod_{i,j=1}^N \Gamma(z_i + w_j) \right) \sum_{\sigma \in S_N} \frac{\prod_{k=1}^N s(z_k + w_{\sigma(N)})}{\prod_{k=1}^{N-1} s(w_{\sigma(N)} - w_{\sigma(k)})}. \quad (7)$$

Остается просуммировать последний фактор. Для этого мы воспользуемся формулой для обычных тригонометрических функций из [2], Лемма 5.10. Вспоминая, что δ_k и ε_j – дискретные параметры для переменных z_k и w_j соответственно, мы можем выписать следующую цепочку соотношений

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in S_N} \frac{\prod_{k=1}^N s(z_k + w_{\sigma(N)})}{\prod_{k=1}^{N-1} s(w_{\sigma(N)} - w_{\sigma(k)})} \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \frac{\prod_{k=1}^N (-i)^{\varepsilon_{\sigma(N)} - \delta_k} \sin \left(\pi \left(\frac{z_k - \delta_k}{2} + \frac{w_{\sigma(N)} + \varepsilon_{\sigma(N)}}{2} \right) \right)}{\prod_{k=1}^{N-1} (-i)^{\varepsilon_{\sigma(N)} - \varepsilon_{\sigma(k)}} \sin \left(\pi \left(\frac{w_{\sigma(N)} + \varepsilon_{\sigma(N)}}{2} - \frac{w_{\sigma(k)} + \varepsilon_{\sigma(k)}}{2} \right) \right)} \\ &= (N-1)! (-i)^{\sum_{k=1}^N (\varepsilon_k - \delta_k)} \sin \left(\pi \sum_{k=1}^N \frac{z_k - \delta_k + w_k + \varepsilon_k}{2} \right) \\ &= (N-1)! s \left(\sum_{k=1}^N (z_k + w_k) \right), \end{aligned}$$

из которой следует правая часть равенства (2), что и доказывает теорему. \square

§3. ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО ТИПА

Теорема 2. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $\{z_i \in \mathbb{C}_r\}_{i=1}^{2N+2}$ – набор чисел со свойством $\text{Im}(z_i) \neq \text{Im}(z_j) \neq 0$ для всех $i \neq j$. Пусть также $\mathbf{z}_i = (z_i, \delta_i)$, где $\delta_i \in \{0, 1\}$, находятся в области аналитичности правой части (8). Определим далее множество S всех возможных инъективных отображений σ из $\{1, \dots, N\}$ в $\{1, \dots, 2N+2\}$. Тогда с учетом всего вышеизложенного верно соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^N N!} \sum_{\sigma \in S} \left(\prod_{k=1}^N \sum_{\epsilon_k=0,1} \int_{\gamma_{\sigma(k)}} \frac{du_k}{4\pi i} \right) \frac{\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{2N+2} \Gamma(\mathbf{z}_j \pm \mathbf{u}_i)}{\prod_{k=1}^N \Gamma(\pm 2\mathbf{u}_k) \prod_{i < j}^N \Gamma(\mathbf{u}_i \pm \mathbf{u}_j) \Gamma(-\mathbf{u}_i \pm \mathbf{u}_j)} \\ & = \prod_{i < j}^{2N+2} \Gamma(\mathbf{z}_i + \mathbf{z}_j) / \Gamma\left(\sum_{i=1}^{2N+2} \mathbf{z}_i\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma_i = \gamma(\mathbf{z}_i)$ для всех i , и знак \pm означает, что оба множителя присутствуют. Для случая $N = 1$ произведение с условием $i < j$ в знаменателе левой части соотношения равно единице. Переход к другим значениям параметров понимается в смысле аналитического продолжения.

Доказательство. Мы повторим основные шаги из предыдущего раздела, обращая внимание лишь на существенные изменения. Давайте определим функцию

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{2N+2}; u_1, \dots, u_N) & = \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N=0,1} \\ & \times \left(\prod_{k=1}^N \frac{s(-2\mathbf{u}_k)}{c(2\mathbf{u}_k)} \right) \left(\prod_{i < j}^N \frac{s(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) s(-\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)}{c(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) c(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)} \right) \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^{2N+2} c(\mathbf{z}_j \pm \mathbf{u}_k). \end{aligned} \quad (9)$$

Используя соотношения (4), легко увидеть, что функция обладает свойством периодичности, которое можно сформулировать так: сдвиг аргумента $u_j \rightarrow u_j + 1$ для произвольного $j \in \{1, \dots, N\}$ не изменяет функцию T_2 .

Далее, мы переходим к подсчету вычетов. Из-за свойств точек $\{z_i\}_{i=1}^{2N+2}$ функция T_2 не содержит полюсов, поэтому мы должны отслеживать лишь полюса для Гамма-функций вида $-z_i - p_i$, где $p_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тогда, используя периодичность функции T_2 , мы получаем выражение

$$\begin{aligned}
 & C \sum_{\sigma \in S} T_2(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{2N+2}; -z_{\sigma(1)}, \dots, -z_{\sigma(N)}) \\
 & \sum_{p_1, \dots, p_N=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^N (-z_{\sigma(k)} - p_k) \right) \left(\prod_{i<j}^N [(z_{\sigma(i)} + p_i)^2 - (z_{\sigma(j)} + p_j)^2] \right) \\
 & \left(\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{2N+2} \Gamma(z_j + z_{\sigma(i)} + p_i) \right) \prod_{k=1}^N \frac{(-1)^{p_k}}{p_k!} \prod_{n \neq \sigma(k)}^{2N+2} \Gamma(z_n - z_{\sigma(k)} - p_k),
 \end{aligned}$$

где $C = 2^{3N^2+3N-2N} \sum z_n \pi^{-N^2} (N!)^{-1}$. Внутренняя сумма может быть вычислена при помощи формулы суммирования из работы [2]

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p_1, \dots, p_N=-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^N \frac{z_{\sigma(k)} + p_k}{z_{\sigma(k)}} \right) \\
 & \prod_{k<j}^N \frac{(z_{\sigma(k)} + p_k)^2 - (z_{\sigma(j)} + p_j)^2}{z_{\sigma(k)}^2 - z_{\sigma(j)}^2} \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^{2N+2} \frac{\Gamma(z_j \pm (z_{\sigma(k)} + p_k))}{\Gamma(z_j \pm z_{\sigma(k)})} \\
 & \frac{\Gamma\left(1 - \sum_{n=1}^{2N+2} z_n\right) \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^{2N+2} \Gamma(1 - z_j \pm z_{\sigma(k)})}{\left(\prod_{k=1}^N \Gamma(1 \pm 2z_{\sigma(k)}) \right) \prod_{\substack{1 \leq k < j \leq N \\ \delta, \epsilon = \pm}} \Gamma(1 + \delta z_{\sigma(k)} + \epsilon z_{\sigma(j)}) \prod_{k<j}^{2N+2} \Gamma(1 - z_k - z_j)}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что если $p_j < 0$ для некоторого $j \in \{1, \dots, N\}$, тогда соответствующее слагаемое не дает вклада в сумму. Следовательно, мы можем убрать множество $\{\dots, -2, -1\}$ из области суммирования. Затем, применяя свойство (6) и производя некоторые сокращения, мы получаем следующий результат

$$\begin{aligned}
 & \frac{2^{-N+\sum_{n=1}^{2N+2} z_n}}{\pi N!} \Gamma\left(1 - \sum_{n=1}^{2N+2} z_n\right) \prod_{i<j}^{2N+2} \Gamma(\mathbf{z}_i + \mathbf{z}_j) \\
 & \left(\prod_{i<j}^{2N+2} s(\mathbf{z}_i + \mathbf{z}_j) \right) \sum_{\sigma \in S} \frac{\prod_{k=1}^N s(2z_{\sigma(k)}) s(-2z_{\sigma(k)}) \prod_{\delta, \epsilon = \pm} \prod_{i<j}^N s(\delta z_{\sigma(i)} + \epsilon z_{\sigma(j)})}{\prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^{2N+2} s(\mathbf{z}_j + z_{\sigma(k)}) \prod_{k=1}^N \prod_{j \neq \sigma(k)}^{2N+2} s(\mathbf{z}_j - z_{\sigma(k)})}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Далее необходимо адаптировать теорему суммирования синусов на рассматриваемый случай. Она имеет вид

$$\begin{aligned} & \prod_{i < j}^{2N+2} s(\mathbf{z}_i + \mathbf{z}_j) \sum_{\sigma \in S} \frac{\prod_{k=1}^N s(2\mathbf{z}_{\sigma(k)}) s(-2\mathbf{z}_{\sigma(k)}) \prod_{\delta, \epsilon = \pm} \prod_{k < j}^N s(\delta \mathbf{z}_{\sigma(k)} + \epsilon \mathbf{z}_{\sigma(j)})}{\prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^{2N+2} s(\mathbf{z}_j + \mathbf{z}_{\sigma(k)}) \prod_{k=1}^N \prod_{j \neq \sigma(k)}^{2N+2} s(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{\sigma(k)})} \\ & = N! 2^N s \left(\sum_{i=1}^{2N+2} \mathbf{z}_i \right), \end{aligned}$$

где при выводе были использованы определения s -функций и предельный случай формулы суммирования (7.11) из работы [2]. После подстановки последнего соотношения в формулу (10) и следует утверждение теоремы 2. \square

§4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе удалось обобщить понятия интегралов Густафсона первого и второго типов на случай группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ путем специального выбора области интегрирования. Основная проблема состояла в том, что плотность меры содержит серию полюсов в комплексной плоскости, в отличие от случая группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, где плотность является полиномиальной функцией. Из-за этого при подсчете появляются “лишние” вклады. Мы убрали эти слагаемые путем введения специальных контуров.

В качестве примера актуальной задачи можно привести вопрос о возможности перехода в области интегрирования от используемых контуров к прямой $i\mathbb{R}$. На примере формулы (2) это выглядит так

$$\sum_{\sigma \in S_N} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \sum_{\epsilon_k=0,1} \int_{\gamma_{\sigma(k)}} \frac{du_k}{4\pi i} \right) \rightarrow \left(\prod_{k=1}^{N-1} \sum_{\epsilon_k=0,1} \int_{i\mathbb{R}} \frac{du_k}{4\pi i} \right), \quad (11)$$

где $N > 2$, так как при $N = 2$ тригонометрическая часть подынтегрального выражения (3) не содержит полюсов, что дает возможность перейти к интегрированию по мнимой оси.

При этом в переходе (11) не вполне ясно, нужно ли вводить дополнительные контуры, которые могли бы учитывать наличие дискретного спектра. Такая точка зрения следует из работы о полноте [15], из которой видно, что точки дискретного спектра совпадают с полюсами

плотности меры для непрерывного спектра. В любом случае, дальнейшее изучение дополнительных контуров является важной задачей, поскольку она связана с исследованием свойств собственных функций для интегрируемых моделей.

В качестве другого открытого вопроса можно привести вывод детерминантного представления для интеграла Густафсона. Основной загвоздкой является наличие тригонометрических функций в знаменателях (3) и (9). Это обстоятельство мешает факторизовать функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. A. Gustafson, *Some q -beta and Mellin–Barnes integrals with many parameters associated to the classical groups*. — SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 525–551.
2. R. A. Gustafson, *Some q -beta and Mellin–Barnes integrals on compact Lie groups and Lie algebras*. — Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 69–119.
3. R. A. Gustafson, *Some q -beta integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that generalize the Askey–Wilson and Nasrallah–Rahman integrals*. — SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 441–449.
4. J. V. Stokman, *On BC type basic hypergeometric orthogonal polynomials*. — Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1527–1579.
5. V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov, *Elliptic hypergeometry of supersymmetric dualities*. — Comm. Math. Phys. **304** (2011), 797–874.
6. V. P. Spiridonov, *Theta hypergeometric integrals*. — St. Petersburg Math. J. **15** (2003), 929–967.
7. V. P. Spiridonov, S. O. Warnaar, *Inversions of integral operators and elliptic beta integrals on root systems*. — Adv. Math. **207** (2006), 91–132.
8. V. P. Spiridonov, *Short proofs of the elliptic beta integrals*. — Ramanujan J. **13** (2007), 265–283.
9. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Spin Chains and Gustafson’s Integrals*. — J. Phys. A, Math. Theor. **50** (2017), 294006.
10. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, P. A. Valinevich, *Gustafson integrals for $SL(2, \mathbb{C})$ spin magnet*. — J. Phys. A, Math. Theor. **50** (2017), 294007.
11. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, P. A. Valinevich, *$SL(2, \mathbb{C})$ Gustafson Integrals*. — SIGMA **14** (2018), 030.
12. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *On Complex Gamma-Function Integrals*. — SIGMA **16** (2020), 003.
13. I. M. Gel’fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions. Vol. 5, Integral geometry and representation theory*. — Academic Press, New York, London, 1–499 (1966).
14. M. Kirch, A. N. Manashov, *Noncompact $SL(2, \mathbb{R})$ spin chain*. — JHEP (2004), 0406, 035.
15. A. V. Ivanov, *On the completeness of projectors for tensor product decomposition of continuous series representations groups $SL(2, \mathbb{R})$* . — J. Math. Sci. (N. Y.), **242**, No. 5 (2019), 692–700.

16. S. C. Milne, *A q -analog of the Gauss summation theorem for hypergeometric series in $U(n)$* . — Adv. Math. **72** (1988), 59–131.

Ivanov A. B. On Gustafson integrals for the group $SL(2, \mathbb{R})$.

In this paper, we calculate the Gustafson integrals of the first and second types for the group $SL(2, \mathbb{R})$ in the case of an integration domain of a special form. The definitions of the analogs of the sine, cosine and Gamma functions are given, and their main properties are formulated. The conclusion lists open questions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки 27,
С.-Петербург 191023, Россия
E-mail: regul1@mail.ru

Поступило 21 октября 2021 г.