

С. Э. Деркачёв, А. В. Иванов

КОЭФФИЦИЕНТЫ РАКА ДЛЯ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{R})$

§1. ВВЕДЕНИЕ

Унитарные неприводимые представления группы $SL(2, \mathbb{R})$ были впервые исследованы Баргманном [1]. Помимо унитарных представлений двух непрерывных серий существуют унитарные представления дискретных серий. Этот факт делает исследование группы более сложным и создает определенные технические трудности (см. [2]).

Кроме того, при разложении тензорного произведения двух унитарных представлений непрерывных серий на неприводимые возникают представления дискретных серий, а представления непрерывной серии входят с кратностью два [3–5, 11]. Несмотря на это разложение тензорного произведения двух представлений ($3j$ -символы или коэффициенты Клебша–Гордана) для группы $SL(2, \mathbb{R})$ были давно изучены в работах [3–5].

Насколько нам известно, задача о вычислении коэффициентов Рака, связанных с разложением тензорного произведения трех представлений, решена до сих пор лишь частично. Наличие в разложении представлений из разных серий (непрерывной и дискретной) приводит к тому, что вычисление $6j$ -символов, или коэффициентов Рака, распадается на множество отдельных задач. Случаи, когда тройное произведение содержит хотя бы один множитель из дискретной серии, были изучены Гроневельтом [6, 7].

В данной работе мы изучаем разложение тензорного произведения трех представлений, когда все факторы являются представлениями непрерывной серии. Основная идея состоит в применении методов, разработанных для вычисления диаграмм Фейнмана, к проблеме вычисления коэффициентов Рака. Такой метод был применен для нахождения коэффициентов Рака в случае группы $SL(2, \mathbb{C})$ (см. [10]).

Ключевые слова: коэффициент Рака, $6j$ -символ, группа $SL(2, \mathbb{R})$, диаграмма Фейнмана.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 19-11-00131). Также, А. В. Иванов является победителем конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность спонсорам и жюри.

Впервые коэффициенты Рака в случае группы $SL(2, \mathbb{C})$ были вычислены Исмагиловым [8, 9] другим методом. Разложение тензорного произведения в случае группы $SL(2, \mathbb{R})$ сложнее, так что разработка эффективных методов вычисления коэффициентов Рака представляется важной задачей.

Работа имеет следующую структуру. Сначала мы приводим основные определения, вводим удобные обозначения и объясняем метод диаграмм Фейнмана. После этого мы формулируем основные факты из разложения двойного произведения и переходим к выводу диаграммного представления для $6j$ -символов. В последней части при приводим пример вычисления для специального случая. Отметим, что основные свойства группы $SL(2, \mathbb{R})$ и ее представлений можно найти в монографиях [12, 13]. Мы будем придерживаться обозначений работы [11].

§2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Группа $SL(2, \mathbb{R})$ является множеством вещественных матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ с единичным определителем $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$. Из общей теории известно [13], что набор представлений для такой группы состоит из трех серий: дискретной, непрерывной и дополнительной. В рамках нашей работы нам понадобятся только первые две, поэтому кратко сформулируем их основные свойства.

Дискретные серии \mathcal{D}_h^+ и \mathcal{D}_h^- нумеруются параметром $h \in \mathbb{N}/2$. Функциональное пространство в этом случае является множеством аналитических функций $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^\pm)$ в верхней/нижней полуплоскости $\mathbb{C}^{+/-}$. Скалярное произведение для \mathcal{D}_h^\pm определяется так: пусть $z = x + iy$, тогда

$$(\phi, \psi)_\pm = \frac{2h-1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \theta(\pm y) |2y|^{2h-2} \overline{\phi(z)} \psi(z),$$

где $\theta(y) = 1$ при $y \geq 0$ и $\theta(y) = -1$ при $y < 0$. Действие оператора представления $\Gamma^{(h, \pm)}(g^{-1})$ на функцию определяется следующим образом

$$[\Gamma^{(h, \pm)}(g^{-1})\phi](z) = (\gamma z + \delta)^{-2h} \phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \quad \text{где } \phi \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^\pm).$$

Непрерывная унитарная серия $\mathcal{P}^{\rho, \varepsilon}$ характеризуется двумя параметрами: непрерывным $\rho \in \mathbb{R}$ и дискретным $\varepsilon = 0, 1$. Функциональное

пространство для $\mathcal{P}^{\rho,\varepsilon}$ совпадает с $L_2(\mathbb{R})$, так что скалярное произведение определяется равенством

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} dz \overline{\phi(z)} \psi(z).$$

Действие оператора представления $T^{(\rho,\varepsilon)}(g^{-1})$ на функцию определяется формулой

$$[T^{(\rho,\varepsilon)}(g^{-1})\phi](z) = \frac{\text{sgn}^\varepsilon(\gamma z + \delta)}{|\gamma z + \delta|^{1+2i\rho}} \phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \text{ где } \phi \in L_2(\mathbb{R}).$$

Все приведенные формулы имеют одинаковую структуру, так что удобно перейти к универсальным обозначениям. Прямой буквой «a» будем обозначать набор (a_1, a_2) , где первый параметр $a_1 \in \mathbb{C}$, а второй принимает значения из множества $\{\mathbb{N}_0, \pm\}$.

Определим основные операции: пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, тогда

$$\text{Re}(a) = (\text{Re}(a_1), a_2), \quad \sigma \cdot a = (\sigma \cdot a_1, a_2), \quad (2.1)$$

$$a + b = \begin{cases} (a_1 + b_1, a_2 + b_2 \bmod 2), & \text{если } a_2, b_2 \in \mathbb{N}_0; \\ (a_1 + b_1, a_2), & \text{если } a_2 \in \{\pm\} \text{ и } b_2 \in \mathbb{N}_0; \\ (a_1 + b_1, a_2), & \text{если } a_2 = b_2 \in \{\pm\}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Другие комбинации индексов в этой работе не фигурируют. С учетом последних определений набор рассматриваемых унитарных представлений и их свойств можно обобщить в виде следующей таблицы.

Тип серии	непрерывная	дискретная
Параметр «a»	$a \in (\frac{1}{2} + i\mathbb{R}, \{0, 1\})$	$a \in (\mathbb{N}/2, \pm)$
Пространство интегрирования \mathcal{V}_a	\mathbb{R}	\mathbb{C}^\pm
Переменная «z»	$z \in \mathbb{R}$	$z = x + iy \in \mathbb{C}^\pm$
Мера $\mathcal{D}^a z$	dz	$\frac{2a_1-1}{\pi} 2y ^{2a_1-2} dx dy$
Пространство представления \mathcal{H}^a	$L_2(\mathbb{R}, \mathcal{D}^a z)$	$\mathcal{A}(\mathbb{C}^\pm) \cap L_2(\mathbb{C}^\pm, \mathcal{D}^a z)$

Формулы для скалярного произведения и действия оператора представления T^a могут быть записаны универсальным образом

$$(\phi, \psi)_a = \int_{\mathcal{V}_a} \mathcal{D}^a z \overline{\phi(z)} \psi(z), \quad \phi, \psi \in \mathcal{H}^a, \quad (2.3)$$

$$[T^a(g^{-1})\phi](z) = D_{2a}(\gamma z + \beta)\phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \quad z \in \mathcal{V}_a, \phi \in \mathcal{H}^a, \quad (2.4)$$

где функция $D_a(z)$ определяется следующим соотношением

$$D_a(z) = D_{(a_1, a_2)}(z) = \begin{cases} |z|^{-a_1} \operatorname{sgn}^{a_2}(z), & \text{если } a_2 \in \mathbb{N}_0; \\ z^{-a_1} \text{ and } z \in \mathbb{C}^{a_2}, & \text{если } a_2 \in \{\pm\}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Диаграммная техника. Удобно представить основные шаги аналитических вычислений при помощи диаграммной техники. Исходному аналитическому выражению однозначным образом сопоставляется диаграмма и каждому преобразованию аналитического выражения – преобразование диаграммы. Основным строительным блоком является функция $D_a(z_2 - \bar{z}_1)$. Мы будем обозначать ее направленной линией, соединяющей точек z_2 и z_1 , с индексом «а», как это показано в левой части рис. 1. Отметим, что величина $z_2 - \bar{z}_1$ может быть из \mathbb{C}^\pm , так что для полноты описания мы должны ввести элемент с комплексно-сопряженным аргументом. Его мы будем обозначать двойной линией, как это показано в правой части рис. 1.

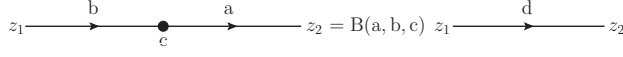
$$D_a(z_2 - \bar{z}_1) = z_1 \xrightarrow{a} z_2 \quad D_a(\bar{z}_2 - z_1) = z_1 \xlongequal{a} z_2$$

Рис. 1. Линия – элемент диаграммной техники.

Далее, точкой с индексом «с» будем обозначать оператор интегрирования с мерой $\mathcal{D}^c z$. Интеграл от произведения двух D-функций вычисляется явным образом и, с точностью до коэффициента пропорциональности, ответ выражается при помощи D-функции. Аналитически это общее правило записывается следующим образом

$$\int_{\mathcal{V}_c} \mathcal{D}^c z D_b(z_1 - \bar{z}) D_a(z - \bar{z}_2) = V(a, b, c) D_d(z_1 - \bar{z}_2). \quad (2.6)$$

С помощью диаграммной техники это соотношение представлено на рис. 2. Данное правило называется правилом интегрирования цепочки или цепным правилом. Коэффициент $V(a, b, c)$ для каждого случая вычисляется отдельно. Специальный пример можно найти в последнем разделе.

Рис. 2. Цепное правило, где $d = a + b - 2\text{Re}(c)$.

§3. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Рассмотрим разложение тензорного произведения двух унитарных представлений в прямой интеграл. При этом мы ограничимся случаем, когда одно из представлений принадлежит непрерывному спектру, а второе может быть как непрерывным, так и дискретным. Формально такое разложение можно записать так

$$\Gamma^a \otimes \Gamma^b = \int' dc \Gamma^c, \quad (3.1)$$

где знак «интегрирования» со штрихом означает, что разложение может содержать сумму по дискретной составляющей. Для расшифровки рассмотрим каждый случай отдельно.

Если оба параметра, $a = (1/2 + i\rho_1, \varepsilon_1)$ и $b = (1/2 + i\rho_2, \varepsilon_2)$, принадлежат непрерывному спектру, то разложение (3.1) имеет вид

$$\Gamma^{(\frac{1}{2} + i\rho_1, \varepsilon_1)} \otimes \Gamma^{(\frac{1}{2} + i\rho_2, \varepsilon_2)} = \sum_{h=1+\varepsilon/2}^{+\infty} \Gamma^{(h,+)} \oplus \sum_{h=1+\varepsilon/2}^{+\infty} \Gamma^{(h,-)} \oplus 2 \int_{\mathbb{R}_+} d\rho \Gamma^{(\frac{1}{2} + i\rho, \varepsilon)}, \quad (3.2)$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \bmod 2$. Отметим появление нетривиальной кратности 2 в последнем слагаемом формулы (3.2). Технически это связано с наличием двух ортогональных проекторов на пространство представления.

Если первый параметр $b = (h, \pm)$ принадлежит дискретному спектру, а второй $b = (1/2 + i\rho_2, \varepsilon_2)$ – непрерывному, то мы получаем

$$\Gamma^{(h, \pm)} \otimes \Gamma^{(\frac{1}{2} + i\rho_2, \varepsilon_2)} = \sum_{j=1+\varepsilon_1/2}^{+\infty} \Gamma^{(j, \pm)} \oplus \int_{\mathbb{R}_+} d\rho \Gamma^{(\frac{1}{2} + i\rho, \varepsilon)}, \quad (3.3)$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_2 + 2h) \bmod 2$.

Проекторы из тензорного произведения в каждую составляющую прямого интеграла могут быть построены явным образом. Символом $P(a, b|c)$ с тремя аргументами будем обозначать оператор проекции из

$T^a \otimes T^b$ в T^c – интегральный оператор вида

$$\Phi(z_1, z_2) \xrightarrow{P(a,b|c)} \int_{\mathcal{V}_a} \mathcal{D}^a z_1 \int_{\mathcal{V}_b} \mathcal{D}^b z_2 P \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ z_1 & z_2 & z \end{array} \right) \Phi(z_1, z_2), \quad (3.4)$$

где $P \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ z_1 & z_2 & z \end{array} \right)$ – соответствующее интегральное ядро. Ядро дуального оператора проекции, который является отображением из T^c в $T^a \otimes T^b$, может быть получено комплексным сопряжением $P(a, b|c)$. Тогда оператор действует по правилу

$$\Phi(z) \mapsto \int_{\mathcal{V}_c} \mathcal{D}^c z P \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ z_1 & z_2 & z \end{array} \right) \overline{\Phi(z)}. \quad (3.5)$$

Ядро проектора $P(a, b|c)$ вычисляется явным образом и представляется в виде следующего произведения D-функций $D_\alpha(z - \bar{z}_1)D_\beta(z - \bar{z}_2)D_\gamma(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$, где индексы α, β, γ зависят от параметров представлений. Таким образом, интегральному ядру проектора соответствует простая диаграмма в виде треугольника: вершинам треугольника соответствуют точки z, z_1 и z_2 , которые соединяются линиями, изображающими необходимые D-функции.

Проекторы ортогональны друг другу и образуют полную систему. В терминах ядер интегральных операторов $P(a, b|c)$ соотношение ортогональности выражается тождеством

$$\int_{\mathcal{V}_a} \mathcal{D}^a z_1 \int_{\mathcal{V}_b} \mathcal{D}^b z_2 P \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c' \\ z_1 & z_2 & z' \end{array} \right) P \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ z_1 & z_2 & z \end{array} \right) = N(c, a, b) \delta(c', c) \delta(z - z') + \delta(c', -c) S(z', z), \quad (3.6)$$

где $N(c, a, b)$ – константа нормировки (см. [11]), и $S(c)$ – сплетающий оператор, такой что $S(c) T^c = T^{-c} S(c)$. Отметим, что второе слагаемое в правой части появляется в том случае, если представления T^c и T^{-c} эквивалентны.

Соотношение полноты эквивалентно следующему тождеству для R-функций

$$\int' dc \int_{\mathcal{V}_c} \frac{\mathcal{D}^c z}{N(c, a, b)} P \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ z_3 & z_4 & z \end{array} \right) P \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ z_1 & z_2 & z \end{array} \right) = \delta(z_1 - z_3) \delta(z_2 - z_4). \quad (3.7)$$

Доказательство последнего соотношения может быть получено прямым вычислением с использованием явных формул для ядер (см. [14]).

§4. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Постановка задачи. Рассмотрим тензорное произведение трех представлений $T^{a_1} \otimes T^{a_2} \otimes T^{a_3}$, каждое из которых является представлением унитарной непрерывной серии, то есть $a_j \in (1/2 + i\mathbb{R}_+, \{0, 1\})$ для $j = 1, 2, 3$. Используя формулы (3.2) и (3.3), мы можем разложить произведение в прямой интеграл. Более того, это можно сделать несколькими способами:

$$T^{a_1} \otimes T^{a_2} \otimes T^{a_3} \xrightarrow{P(a_1, a_2 | b_\varepsilon) \otimes \mathbf{1}} T^{b_\varepsilon} \otimes T^{a_3} \xrightarrow{P(b, a_3 | c_\delta)} T^{c_\delta}, \quad (4.1)$$

$$T^{a_1} \otimes T^{a_2} \otimes T^{a_3} \xrightarrow{\mathbf{1} \otimes P(a_2, a_3 | b_\varepsilon)} T^{a_1} \otimes T^{b_\varepsilon} \xrightarrow{P(a_1, b_\varepsilon | c_\delta)} T^{c_\delta}, \quad (4.2)$$

где параметры b_ε и c_δ контролируются разложениями двойных произведений (3.2) и (3.3). Интегральные ядра проекторов, соответствующих схемам разложения (4.1) и (4.2), явным образом строятся из интегральных ядер основных проекторов

$$W_{b_\varepsilon}^{12} \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & c_\delta \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \end{array} \right) = \int_{\mathcal{V}_{b_\varepsilon}} \mathcal{D}^{b_\varepsilon} z_0 P \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & b_\varepsilon \\ z_1 & z_2 & z_0 \end{array} \right) P \left(\begin{array}{cc|c} b_\varepsilon & a_3 & c_\delta \\ z_0 & z_3 & z \end{array} \right), \quad (4.3)$$

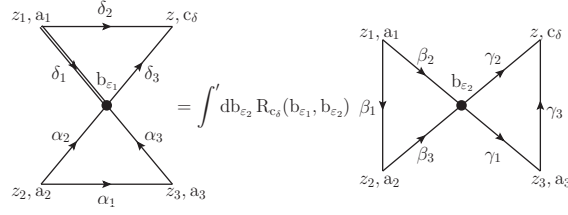
$$W_{b_\varepsilon}^{23} \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & c_\delta \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \end{array} \right) = \int_{\mathcal{V}_{b_\varepsilon}} \mathcal{D}^{b_\varepsilon} z_0 P \left(\begin{array}{cc|c} a_2 & a_3 & b_\varepsilon \\ z_2 & z_3 & z_0 \end{array} \right) P \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_\varepsilon & c_\delta \\ z_1 & z_0 & z \end{array} \right). \quad (4.4)$$

Коэффициенты Рака, или $6j$ -символы, определяются как ядро интегрального оператора, связывающего разложения (4.3) и (4.4)

$$W_{b_{\varepsilon_1}}^{23} \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & c_\delta \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \end{array} \right) = \int' db_{\varepsilon_2} R_{c_\delta}(b_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}) W_{b_{\varepsilon_2}}^{12} \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & c_\delta \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \end{array} \right), \quad (4.5)$$

где «интегрирование» понимается в смысле разложения (3.2).

Последнее соотношение можно переписать на языке диаграмм, см. рис. 3. Для этого достаточно использовать определения элементов диаграммной техники и вид проекторов. Индексы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ и $\delta_i, i = 1, 2, 3$, зависят от параметров $b_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}$ и c_δ и должны выписываться для каждой ситуации отдельно.

Рис. 3. Определение $6j$ -символов.

Представление для коэффициентов Рака. Используя свойство ортогональности проекторов (3.6), равенство (4.5) можно переписать в более удобном эквивалентном виде

$$\int_{\mathcal{V}_{a_1}} \mathcal{D}^{a_1} z_1 \int_{\mathcal{V}_{a_2}} \mathcal{D}^{a_2} z_2 \overline{P \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} b_{\varepsilon_2} \\ z_0 \end{array} \right)} W_{b_{\varepsilon_1}}^{23} \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \middle| \begin{array}{c} c_{\delta} \\ z \end{array} \right) \quad (4.6)$$

$$= N(b_{\varepsilon_2}, a_1, a_2) R_{c_{\delta}}(b_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}) P \left(\begin{array}{c|c} b_{\varepsilon_2} & a_3 \\ z_0 & z_3 \end{array} \middle| \begin{array}{c} c_{\delta} \\ z \end{array} \right).$$

Последнее соотношение представлено в графическом виде на рис. 4 и может быть использовано в качестве альтернативного определения коэффициентов Рака. Это соотношение показывает, что $6j$ -символы являются коэффициентами пропорциональности между двумя диаграммами. Тот факт, что диаграмма в левой части рис. 4 обязана быть пропорциональна диаграмме в правой части, является прямым следствием ковариантности диаграммы в левой части относительно преобразований из группы $SL(2, \mathbb{R})$. Хорошо известно, что любая функция, зависящая от трех переменных (в нашем случае это z_0 , z и z_3) и ковариантная относительно преобразований из группы $SL(2, \mathbb{R})$, однозначно фиксируется этим требованием и, с точностью до коэффициента пропорциональности, дается выражением, соответствующим правой диаграмме.

Для вычисления матричных элементов R-оператора мы используем переход $z \rightarrow \infty$. В этом случае D-функция (базовый элемент диаграммной техники) имеет следующее асимптотическое разложение

$$D_a(z_1 - \bar{z}_2) \xrightarrow{z_1 \rightarrow \infty} D_a(z_1)(1 + o(1)). \quad (4.7)$$

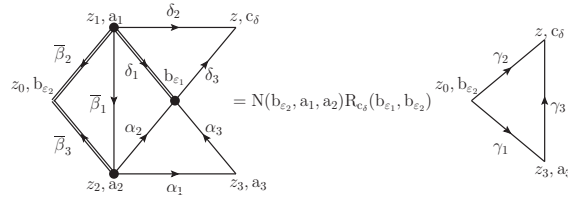


Рис. 4. $6j$ -символы как коэффициенты пропорциональности.

Схематически, см. рис. 5, это означает, что мы удаляем две линии в верхней правой вершине. Конечно, мы можем использовать асимптотику и по другим переменным, $z_0 \rightarrow \infty$ или $z_3 \rightarrow \infty$, вместо указанной. На результат это не повлияет.

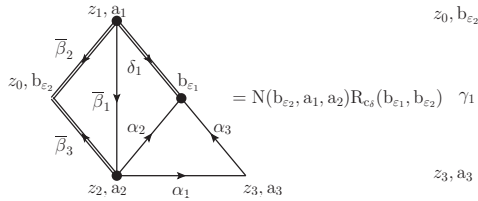


Рис. 5. Соотношение после перехода $z \rightarrow \infty$.

Диаграмма в левой части рис. 5 неудобна для вычислений, поскольку содержит вершину, в которой сходятся четыре линии. В работе Горишнего–Исаева [15] была установлена нетривиальная симметрия диаграмм данного типа, позволяющая сводить вычисление исходной диаграммы к вычислению более простых диаграмм. Мы собираемся упростить задачу, воспользовавшись трюком Горишнего–Исаева [15] в преобразованном виде. Для этого умножим обе части соотношения, см. рис. 5, на функцию $D_{2\text{Re}b_{\epsilon_2} - \gamma_1}(\overline{z_3 - z_0})D_{(i\epsilon, 0)}(z_3 - z_0)$, где ϵ является дополнительным параметром регуляризации. Тогда после интегрирования с мерой $\mathcal{D}^{b_{\epsilon_2}} z_0$ получаем результат, представленный на рис. 6. При вычислении было использовано соотношение

$$\int_{\mathcal{V}_a} \mathcal{D}^a z D_{2\text{Re}(a) - \gamma + i\epsilon/2}(-\bar{z}) D_{\gamma + i\epsilon/2}(-z) = \Omega(a, \gamma) \delta(\epsilon), \quad (4.8)$$

где функция $\Omega(a, \gamma)\delta(\epsilon)$ должна вычисляться для каждого случая отдельно.

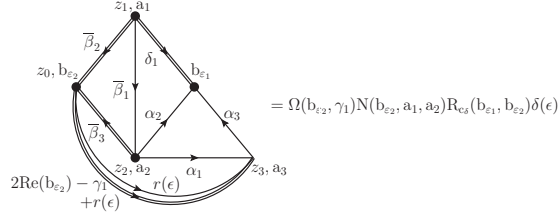


Рис. 6. Производящая диаграмма, где $r(\epsilon) = (i\epsilon/2, (b_{\epsilon_2})_2)$.

Заметим, что точки z_2 и z_3 относятся к непрерывным сериям и, следовательно, имеют одинаковые меры. Таким образом, благодаря инвариантности относительно трансляций мы можем перенести интегрирование из точки z_2 в точку z_3 . Затем мы можем удалить интегрирование по переменной z_1 , после чего равенство на рис. 5 преобразуется в равенство на рис. 7.

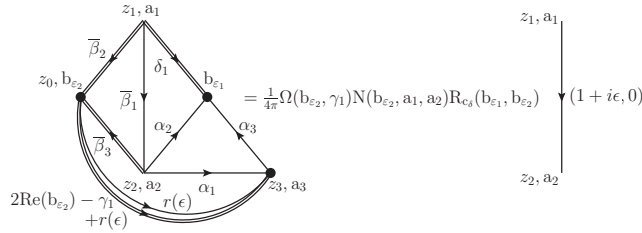


Рис. 7. Соотношение после трюка Горишнего–Исаева, где $r(\epsilon) = (i\epsilon/2, (b_{\epsilon_2})_2)$.

Диаграмма на рис. 7 более удобна для вычисления, так как теперь все вершины одного типа. Для простоты мы можем выбрать точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. b_j -символы не зависят от параметра регуляризации ϵ , так что, используя гладкую зависимость, мы можем перейти к значению $\epsilon = 0$. Таким образом, коэффициенты Рака удовлетворяют равенству на рис. 8, где линия от точки b_{ϵ_2} до точки a_3 имеет индекс $2\text{Re}(b_{\epsilon_2}) - \gamma_1$.

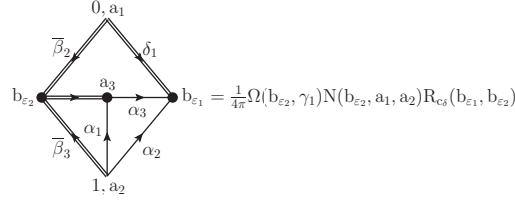


Рис. 8. Представление для коэффициентов Рака.

§5. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ

В качестве примера рассмотрим случай, когда индексы $a_1, a_2, a_3, b_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}$ и c_δ принадлежат непрерывной серии. В этом случае, как это было отмечено ранее, все переменные интегрирования лежат на вещественной оси и, следовательно, различие в диаграммной технике между одинарными и двойными линиями пропадает. Ядро проектора из секции 3 имеет вид

$$P \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c_\varepsilon \\ z_1 & z_2 & z \end{array} \right) = D_{c+b-a+(0, a_2+\varepsilon)}(z-z_1) D_{c+a-b+(0, b_2+\varepsilon)}(z-z_2) \times D_{2-a-b-c+(0, \varepsilon)}(z_2-z_1), \quad (5.1)$$

и для полноты изложения явно выпишем оставшиеся индексы, пользуясь представлением проектора (5.1) и диаграммной записью на рис. 3. Пусть

$$\begin{aligned} \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \sigma &\in \mathbb{R}_+, & \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta &\in \{0, 1\}, \\ a_1 &= (1/2 + i\rho_1, \hat{\varepsilon}_1), & b_{\varepsilon_1} &= (1/2 + i\tilde{\rho}_1, \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3), \\ a_2 &= (1/2 + i\rho_2, \hat{\varepsilon}_2), & b_{\varepsilon_2} &= (1/2 + i\tilde{\rho}_2, \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2), \\ a_3 &= (1/2 + i\rho_3, \hat{\varepsilon}_3), & c_\delta &= (1/2 + i\sigma, \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1/2 - i[\tilde{\rho}_1 + \rho_2 + \rho_3], \varepsilon_1), & \beta_1 &= (1/2 - i[\tilde{\rho}_2 + \rho_1 + \rho_2], \varepsilon_2), \\ \alpha_2 &= (1/2 + i[\tilde{\rho}_1 - \rho_2 + \rho_3], \varepsilon_1 + \hat{\varepsilon}_2), & \beta_2 &= (1/2 + i[\tilde{\rho}_2 - \rho_1 + \rho_2], \varepsilon_2 + \hat{\varepsilon}_1), \\ \alpha_3 &= (1/2 + i[\tilde{\rho}_1 + \rho_2 - \rho_3], \varepsilon_1 + \hat{\varepsilon}_3), & \beta_3 &= (1/2 + i[\tilde{\rho}_2 + \rho_1 - \rho_2], \varepsilon_2 + \hat{\varepsilon}_2), \\ \delta_1 &= (1/2 - i[\sigma + \tilde{\rho}_1 + \rho_1], \delta), & \gamma_1 &= (1/2 - i[\sigma + \tilde{\rho}_2 + \rho_3], \delta). \end{aligned}$$

Для вычисления диаграммы на рис. 8 нам потребуются два вспомогательных приема. Первый из них – это цепное соотношение, представленное на рис. 2. Для рассматриваемого случая коэффициент B был посчитан явно в работе [14] и имеет вид: пусть a, b такие, что

$a_2, b_2 \in \{0, 1\}$ и c из непрерывного спектра, тогда

$$B(a, b, c) = \frac{2\pi A(2 - a - b)}{A(1 - a)A(1 - b)}, \quad (5.2)$$

где $A(a) = \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{\pi a_1}{2}\right) \Gamma(1 - a_1), & a_2 = 0; \\ 2i \cos\left(\frac{\pi a_1}{2}\right) \Gamma(1 - a_1), & a_2 = 1. \end{cases}$

Второе соотношение – преобразование Меллина–Барнса. Явная формула выводится по аналогии со случаем $SL(2, \mathbb{C})$ (см. [10]) и основана на использовании тождества

$$\sum_{\varepsilon=0,1} \int_{\mathbb{R}} d\rho \frac{\operatorname{sgn}^\varepsilon(x)}{|x|^{\frac{1}{2}+i\rho}} \frac{\operatorname{sgn}^\varepsilon(y)}{|y|^{\frac{1}{2}-i\rho}} = 4\pi\delta(x - y), \quad (5.3)$$

и правила интегрирования цепочки или цепного тождества.

Лемма 5.1. Пусть индекс «а» такой, что $a_2 \in \{0, 1\}$. Пусть также $z_2, z_1, z \in \mathbb{R}$ и $\theta = (1/2 + i\rho, \varepsilon)$. Тогда верна формула

$$D_a(z_1 - z_2) = \sum_{\varepsilon=0,1} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho}{4\pi} B(a, \theta, \theta) D_{a+\theta-1}(z_2 - z) D_{1-\theta}(z_1 - z). \quad (5.4)$$

Перейдем к вычислению диаграммы на рис. 8. Применим преобразование Меллина–Барнса к линии с индексом α_3 . Затем, выбирая $z = 1$ в Лемме 5.1, мы получаем диаграмму, которую можно вычислить, применив трижды цепное соотношение, см. рис. 2.

Теорема 1. Пусть выполнены все предположения данного раздела. Тогда $\Omega(b_{\varepsilon_2}, \gamma_1) = 4\pi$ и $6j$ -символы выписываются в виде

$$\begin{aligned} R_{c,\delta}(b_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}) &= \frac{\pi \tilde{\rho}_2 (-1)^{\varepsilon_2}}{16} \left(\frac{\sinh(\pi \tilde{\rho}_2)}{\cosh(\pi \tilde{\rho}_2)} \right)^{1-2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \\ &\sum_{\varepsilon=0,1} \int_{\mathbb{R}} d\rho \frac{A(2 - \alpha_3 - \theta, 1 - \delta_1 - \alpha_2 + \theta)}{A(1 - \alpha_3, 1 - \theta, 1 - \delta_1, \theta - \alpha_2)} \\ &\frac{A(2 + \gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_3 - \theta, 3 - \bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \theta + \gamma_1)}{A(\gamma_1, 2 - \alpha_1 - \alpha_3 - \theta, 1 - \bar{\beta}_2, 2 - \bar{\beta}_3 - \alpha_1 - \alpha_3 - \theta + \gamma_1)}. \end{aligned}$$

§6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чтобы избежать большого нагромождения формул и технических деталей, мы решили ограничиться разбором одного примера. Предполагается, что разбору всех возможных случаев будет посвящена отдельная работа.

В заключение обсудим примеры вычислений, которые отсутствуют в тексте работы и, следовательно, остаются открытыми для дальнейшего исследования. Их отсутствие связано в первую очередь с двумя основными вопросами.

Первый вопрос связан с построением ядра оператора проекции (3.4). В рассматриваемом примере из раздела 5 он строится сразу в факторизованном виде. Однако, если проектор содержит хотя бы один индекс из дискретной серии, то факторизация в явном виде формально отсутствует, поскольку в этом случае ядро строится из блоков, аналитических в верхней или нижней полуплоскости [11].

Второй вопрос связан с первым и относится к выбору регуляризации. Пример из раздела 5 выделен тем, что значения всех индексов обеспечивают сходимость интегралов. Если в диаграмме имеется индекс из дискретной серии, то под интегралом появятся величины типа $x^{\pm n}$, которые формально приведут к появлению расходящихся. По этой причине необходимо аккуратно ввести регуляризацию диаграммы и проследить за раскрытием возникающих неопределенностей. Тот же вопрос касается и вывода вспомогательных утверждений, цепного правила и преобразования Меллина–Барнса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. A. Bargmann, *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*. — Ann. Math., **48**, No. 3 (1947), 568–640.
2. S. Lang, *SL₂(\mathbf{R})*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1975.
3. L. Pukánszky, *On the Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group. I*. — Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 116–152.
4. R. P. Martin, *On the decomposition of tensor products of principal series representations for real-rank one semisimple groups*. — Trans. Amer. Math. Soc. **201** (1975), 177–211.
5. J. Repka, *Tensor products of unitary representations of $SL_2(\mathbf{R})$* . — Bull. Amer. Math. Soc. **82**, No. 6 (1976), 930–932.
6. W. Groenevelt, *Wilson function transforms related to Racah coefficients*. — Acta Appl. Math. **91**, No. 2 (2006), 133–191.
7. W. Groenevelt, *The Wilson function transform*. — Int. Math. Research Notices, **2003**, No. 52 (2003), 2779–2817.

8. R. S. Ismagilov, *On Racah operators*. — Funktsional. Anal. Prilozhen. **40**, No. 3 (2006), 69–72; (Funct. Anal. Appl. **40**, No. 3 (2006), 222–224).
9. R. S. Ismagilov, *Racah operators for principal series of representations of the group $SL(2, \mathbb{C})$* . — Mat. Sbornik **198**, No. 3 (2007), 77–90; (Sb. Math. **198**, No. 3 (2007), 369–381).
10. S. E. Derkachov, V. P. Spiridonov, *On the $6j$ -symbols for $SL(2, \mathbb{C})$ group*. — Theor. Math. Phys. **198**, No. 1 (2019), 29–47.
11. M. Kirch and A. N. Manashov, *Noncompact $SL(2, \mathbb{R})$ spin chain*. — JHEP, **0406**, 035 (2004)
12. A. W. Knap, *Representation theory of semisimple groups: an overview based on examples*, Princeton, N.J.:Princeton Univ. Press, 1986.
13. I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions, Vol. 5. Integral Geometry and Representation Theory*, Academic Press, 1966.
14. A. V. Ivanov, *On the completeness of projectors for tensor product decomposition of continuous series representations groups $SL(2, \mathbb{R})$* . — J. Math. Sci. **242**, No. 5 (2019), 692–700.
15. S. G. Gorishnii, A. P. Isaev, *An approach to the calculation of many-loop massless Feynman integrals*. — Theor. Math. Phys. **62**, No. 3 (1985), 232–240.

Derkachev S. E., Ivanov A. V. Racah coefficients for the group $SL(2, \mathbb{R})$.

The paper is devoted to the derivation of a universal integral representation for $6j$ -symbols, or Racah coefficients, for the tensor product of three unitary representations of the main series of the group

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: derkach@pdmi.ras.ru
E-mail: regul1@mail.ru

Поступило 5 ноября 2021 г.