Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 509, 2021 г.

А. Г. Быцко

ДВА СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНТИСИММЕТРИЗАТОРА В АЛГЕБРЕ ГЕККЕ

§1. Введение

Алгебра Гекке $H_N(q)$ – это ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}(q)$ с единицей, генераторами $\mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_{N-1}$ и соотношениями

$$\mathsf{R}_k^2 = 1 + (q - q^{-1})\,\mathsf{R}_k, \qquad k = 1, \ldots, N-1, \tag{1}$$

$$\mathsf{R}_k\mathsf{R}_m\mathsf{R}_k = \mathsf{R}_m\mathsf{R}_k\mathsf{R}_m, \qquad |k-m| = 1, \tag{2}$$

$$\mathsf{R}_k\mathsf{R}_m = \mathsf{R}_m\mathsf{R}_k, \qquad |k-m| \geqslant 2. \tag{3}$$

Алгебра Гекке может рассматриваться как q-деформация групповой алгебры симметрической группы S_N. Соотношение (2) совпадает с уравнением Янга–Бакстера в форме группы кос. По этой причине представления алгебры Гекке играют важную роль в теории квантовых групп [2, 3] и теории квантовых интегрируемых систем.

Напомним, что q-деформация числа $k \in \mathbb{Z}$ определяется следующей формулой

$$[k] = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}. \tag{4}$$

Нам понадобятся следующие легко проверяемые тождества:

$$[k-1] + [k+1] = [2][k], \qquad [k-1][k+1] + 1 = [k]^2. \tag{5}$$

Элемент $\mathsf{P}_N \in H_N(q)$, называемый q-антисимметризатором, задается рекуррентными соотношениями (в которых $\mathsf{P}_N \in H_{N+1}(q)$ понимается как элемент $\mathsf{P}_N \otimes id$)

$$\mathsf{P}_1 = 1, \qquad \mathsf{P}_{N+1} = \frac{1}{[N+1]}\,\mathsf{P}_N\big(q^N - [N]\,\mathsf{R}_N\big)\,\mathsf{P}_N. \tag{6}$$

Ключевые слова: алгебра Гекке, антисимметризатор, унитарное представление на тензорном произведении пространств.

Работа частично поддержана программой NCCR SwissMAP Национального Научного Фонда Швейцарии.

P_N является идемпотентом,

$$\mathsf{P}_N^2 = \mathsf{P}_N, \tag{7}$$

и для него выполняются соотношения

$$(\mathsf{R}_k + q^{-1} \cdot 1)\, \mathsf{P}_N = \mathsf{P}_N\, (\mathsf{R}_k + q^{-1} \cdot 1) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N-1. \tag{8}$$

Обозначим через P'_N образ элемента $\mathsf{P}_N \in H_{N+1}(q)$ при сдвиге генераторов

$$\mathsf{R}'_k = \mathsf{R}_{k+1}, \qquad k = 1, \ldots, N-1. \tag{9}$$

В данной работе будет доказано соотношение

$$(\mathsf{P}_N - \mathsf{P}'_N)^3 = \frac{[N-1][N+1]}{[N]^2}\, (\mathsf{P}_N - \mathsf{P}'_N). \tag{10}$$

Также для генераторов $\mathsf{T}_k = q^{-1} \cdot 1 + \mathsf{R}_k$ будет получено соотношение

$$\begin{aligned}\big([2]^2 + 1\big)\, \mathsf{T}_N \mathsf{P}_N \mathsf{T}_N = {} & \frac{[2]\big([N+2] + 2[N]\big)}{[N]}\, \mathsf{T}_N \mathsf{P}_{N-1} \\ & - \frac{[N-1]}{[N]}\, \mathsf{P}_{N-1} \mathsf{T}_N \mathsf{T}_{N-1} \mathsf{T}_N \mathsf{T}_{N-1} \mathsf{T}_N \mathsf{P}_{N-1}\end{aligned} \tag{11}$$

и будут рассмотрены ограничения, накладываемые соотношениями (10) и (11) на унитарные представления алгебры Гекке на тензорных степенях пространства $\mathbb{C}^n$. В работе [1] соотношение (10) было получено для проектора Джонса–Венцля (Jones–Wenzl projector) алгебры Темперли–Либа $TL_N(Q)$. Отметим, что в алгебре Темперли–Либа соотношение (11) упрощается до следующего

$$\mathsf{T}_N \mathsf{P}_N \mathsf{T}_N = \frac{[N+1]}{[N]}\, \mathsf{T}_N \mathsf{P}_{N-1}. \tag{12}$$

§2. Вывод соотношений для P_N

Введем новые генераторы

$$\mathsf{T}_k = q^{-1} \cdot 1 + \mathsf{R}_k. \tag{13}$$

Для них соотношения (1)–(3) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\mathsf{T}_k^2 = (q + q^{-1})\mathsf{T}_k, \qquad k = 1, \dots, N-1, \tag{14}$$

$$\mathsf{T}_k\mathsf{T}_m\mathsf{T}_k - \mathsf{T}_m\mathsf{T}_k\mathsf{T}_m = \mathsf{T}_k - \mathsf{T}_m, \qquad |k-m| = 1, \tag{15}$$

$$\mathsf{T}_k\mathsf{T}_m = \mathsf{T}_m\mathsf{T}_k, \qquad |k-m| \geqslant 2, \tag{16}$$

а формулы (6), (8) и (9) принимают вид

$$\mathsf{P}_1 = 1, \qquad \mathsf{P}_{N+1} = \mathsf{P}_N - \rho_N\,\mathsf{P}_N\,\mathsf{T}_N\,\mathsf{P}_N, \qquad \rho_N = \frac{[N]}{[N+1]}, \tag{17}$$

$$\mathsf{T}_k\,\mathsf{P}_N = \mathsf{P}_N\,\mathsf{T}_k = 0, \qquad k = 1, \dots, N-1, \tag{18}$$

$$\mathsf{T}'_k = \mathsf{T}_{k+1}, \qquad k = 1, \dots, N-1. \tag{19}$$

Пусть ϕ_N – автоморфизм алгебры $H_N(q)$, заданный на генераторах следующим образом:

$$\phi_N\big(\mathsf{T}_k\big) = \mathsf{T}_{N-k}, \qquad k = 1, \dots, N-1. \tag{20}$$

Из соотношений (18) следует, что $\mathsf{T}_k\,\phi_N\big(\mathsf{P}_N\big) = \phi_N\big(\mathsf{P}_N\big)\mathsf{T}_k = 0$ для всех $k = 1, \dots, N-1$. Из соотношений (17) следует, что $(\mathsf{P}_N - 1)$ есть сумма мономов от T_1, …, T_{N-1}. Эти свойства позволяют установить инвариантность проектора P_N под действием автоморфизма ϕ_N:

$$\begin{aligned} \phi_N\big(\mathsf{P}_N\big) &= \phi_N\big(\mathsf{P}_N\big)(1 - \mathsf{P}_N + \mathsf{P}_N) = \phi_N\big(\mathsf{P}_N\big)\mathsf{P}_N \\ &= \big(\phi_N\big(\mathsf{P}_N - 1\big) + 1\big)\mathsf{P}_N = \mathsf{P}_N. \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что $\phi_{N+1}\big(\phi_N(\mathsf{X}) \otimes id\big) = \mathsf{X}'$ для любого $\mathsf{X} \in H_N(q)$. В частности, с учетом свойства (21), мы имеем $\phi_{N+1}\big(\mathsf{P}_N \otimes id\big) = \mathsf{P}'_N$. Поэтому, применяя автоморфизм ϕ_{N+1} к соотношению (17), мы получаем

$$\mathsf{P}_{N+1} = \mathsf{P}'_N - \rho_N\,\mathsf{P}'_N\,\mathsf{T}_1\,\mathsf{P}'_N. \tag{22}$$

Лемма 1. *В алгебре $H_{N+2}(q)$ выполняются следующие соотношения:*

$$\mathsf{P}_{N+1} - \mathsf{P}'_{N+1} = \rho_N\, \mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1} - \mathsf{T}_1)\mathsf{P}'_N, \tag{23}$$

$$\rho_N\, \mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N = \mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N, \tag{24}$$

$$\rho_N\, \mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N = \mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}'_N\bigl(\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 - \mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\bigr)\mathsf{P}'_N \\ &\qquad\qquad = -\frac{[N+1]}{[N]^3}\bigl(\mathsf{P}_{N+1} - \mathsf{P}'_{N+1}\bigr). \end{aligned} \tag{26}$$

Доказательство. Применяя сдвиг (19) к соотношению (17), получаем

$$\mathsf{P}'_{N+1} = \mathsf{P}'_N - \rho_N\, \mathsf{P}'_N\, \mathsf{T}_{N+1}\, \mathsf{P}'_N. \tag{27}$$

Соотношение (23) есть разность соотношений (22) и (27).

Заметим, что в силу соотношений (18) мы имеем при $N \geqslant 2$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}'_N\mathsf{P}'_{N-1} = \mathsf{P}'_{N-1}\mathsf{P}'_N = \mathsf{P}'_N, \quad \mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_{N-1} = \mathsf{P}'_{N-1}\mathsf{T}_{N+1}, \\ &\qquad \mathsf{T}_N\mathsf{P}'_N = \mathsf{P}'_N\mathsf{T}_N = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Докажем соотношение (25). При $N = 1$ оно совпадает с соотношением (14) для $k = 1$. При $N \geqslant 2$, получаем

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N \\ &\overset{(27)}{=} \mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_{N-1}\mathsf{T}_{N+1} - \rho_{N-1}\, \mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_{N-1}\mathsf{T}_N\, \mathsf{P}'_{N-1}\mathsf{T}_{N+1})\mathsf{P}'_N \\ &\overset{(28)}{=} \mathsf{P}'_N(\mathsf{T}^2_{N+1} - \rho_{N-1}\, \mathsf{T}_{N+1}\mathsf{T}_N\mathsf{T}_{N+1})\mathsf{P}'_N \\ &\overset{(14),(15)}{=} \mathsf{P}'_N([2]\mathsf{T}_{N+1} - \rho_{N-1}\,(\mathsf{T}_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{T}_N + \mathsf{T}_{N+1} - \mathsf{T}_N))\mathsf{P}'_N \\ &\overset{(28)}{=} ([2] - \rho_{N-1})\, \mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N = \frac{1}{\rho_N}\, \mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N. \end{aligned} \tag{29}$$

Последнее равенство использует тождество

$$[2] - \rho_{N-1} = \frac{[2][N] - [N-1]}{[N]} \overset{(5)}{=} \frac{[N+1]}{[N]} = \frac{1}{\rho_N}. \tag{30}$$

Соотношение (24) можно получить из соотношения (25) применяя автоморфизм ϕ_{N+2} и принимая во внимание, что $\phi_{N+2}(\mathsf{P}'_N) = \mathsf{P}'_N$.

Докажем соотношение (26). При $N = 1$ оно совпадает с соотношением (15) для $k = 1$, $m = 2$ поскольку $\mathsf{P}_2 = 1 - \frac{1}{[2]}\mathsf{T}_1$. Для доказательства в случае $N \geqslant 2$ рассмотрим разность соотношений (17) и (22) (взятую с заменой N на $(N+1)$):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_{N+1}}(\mathsf{P}_{N+1} - \mathsf{P}'_{N+1}) = \mathsf{P}_{N+1}\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}_{N+1} - \mathsf{P}'_{N+1}\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_{N+1} \\
&\overset{(22),(27)}{=} (\mathsf{P}'_N - \rho_N\,\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N)\mathsf{T}_{N+1}(\mathsf{P}'_N - \rho_N\,\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N) \\
&\qquad - (\mathsf{P}'_N - \rho_N\,\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N)\mathsf{T}_1(\mathsf{P}'_N - \rho_N\,\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N) \\
&= \mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1} - \mathsf{T}_1)\mathsf{P}'_N + \rho_N^2\,\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 - \mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1})\mathsf{P}'_N \\
&\overset{(23)}{=} \frac{1}{\rho_N}(\mathsf{P}_{N+1} - \mathsf{P}'_{N+1}) \\
&\qquad + \rho_N^2\,\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 - \mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1})\mathsf{P}'_N.
\end{aligned}$$

Равенство первого и последнего выражений эквивалентно соотношению (26) поскольку имеет место тождество

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_N} - \frac{1}{\rho_{N+1}} &= \frac{[N+1]}{[N]} - \frac{[N+2]}{[N+1]} = \frac{[N+1]^2 - [N][N+2]}{[N][N+1]} \\
&\overset{(5)}{=} \frac{1}{[N][N+1]}.
\end{aligned} \tag{31}$$

□

Предложение 1. *В алгебре $H_{N+2}(q)$ выполняется соотношение (10).*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\big(\mathsf{P}_{N+1} - \mathsf{P}'_{N+1}\big)^2 \overset{(23)}{=} \rho_N^2\,\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1} - \mathsf{T}_1)\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1} - \mathsf{T}_1)\mathsf{P}'_N \\
&= \rho_N^2\,\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1} + \mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 - \mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 - \mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1})\mathsf{P}'_N \\
&\overset{(24),(25)}{=} \rho_N\,\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1} + \mathsf{T}_1 - \rho_N\,\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 - \rho_N\,\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1})\mathsf{P}'_N.
\end{aligned}$$

Используя это соотношение, получаем

$$\begin{aligned}
&\big(\mathsf{P}_{N+1} - \mathsf{P}'_{N+1}\big)^3 \overset{(23)}{=} \rho_N\,\big(\mathsf{P}_{N+1} - \mathsf{P}'_{N+1}\big)^2\,\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1} - \mathsf{T}_1)\mathsf{P}'_N \\
&= \rho_N^2\,\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1} - \mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1} - \mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 \\
&\quad + \rho_N\,\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 - \rho_N\,\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1} \\
&\quad + \rho_N\,\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1 - \rho_N\,\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1})\mathsf{P}'_N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(24),(25)}{=} \rho_N\,\mathsf{P}'_N(\mathsf{T}_{N+1}-\mathsf{T}_1+\rho_N^2\,\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\\
&\qquad -\rho_N^2\,\mathsf{T}_{N+1}\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_1\mathsf{P}'_N\mathsf{T}_{N+1})\mathsf{P}'_N\\
&\overset{(23),(26)}{=} \mathsf{P}_{N+1}-\mathsf{P}'_{N+1}-\frac{1}{[N+1]^2}\big(\mathsf{P}_{N+1}-\mathsf{P}'_{N+1}\big)\\
&\overset{(5)}{=} \frac{[N][N+2]}{[N+1]^2}\big(\mathsf{P}_{N+1}-\mathsf{P}'_{N+1}\big). \qquad \square
\end{aligned}$$

Отметим, что все соотношения Леммы 1 выполняются и для алгебры Темперли-Либа $TL_N(Q)$ с параметром $Q=[2]$, генераторы которой удовлетворяют не соотношениям (15), а соотношениям $\mathsf{T}_k\mathsf{T}_m\mathsf{T}_k=\mathsf{T}_k$ при $|k-m|=1$. Поэтому Предложение 1 имеет место и для алгебры $TL_N(Q)$. Однако для генераторов алгебры $TL_N(Q)$ выполняются и более простые соотношения (см. формулы (28)–(31) в [1]), что позволяет дать более простой вывод соотношения (10) для проектора Джонса-Венцля.

Предложение 2. *В алгебре $H_{N+1}(q)$, $N\geqslant 2$, выполняется соотношение (11).*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T}_N\mathsf{P}_N\mathsf{T}_N+\mathsf{P}_N \overset{(17)}{=} \mathsf{T}_N(\mathsf{P}_{N-1}-\rho_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{P}_{N-1})\mathsf{T}_N+\mathsf{P}_N\\
&\overset{(28),(14)}{=} [2]\mathsf{T}_N\mathsf{P}_{N-1}-\rho_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}\mathsf{T}_N\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{T}_N\mathsf{P}_{N-1}+\mathsf{P}_N\\
&\overset{(15)}{=} [2]\mathsf{T}_N\mathsf{P}_{N-1}-\rho_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{T}_N\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}-\rho_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}\mathsf{T}_N\mathsf{P}_{N-1}\\
&\qquad +\rho_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}+\mathsf{P}_N\\
&\overset{(28),(17)}{=} ([2]-\rho_{N-1})\mathsf{T}_N\mathsf{P}_{N-1}+\mathsf{P}_{N-1}-\rho_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{T}_N\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Умножая полученное равенство с двух сторон на T_N и используя соотношения (14) и (28), получаем

$$\begin{aligned}
\big([2]^2+1\big)\,\mathsf{T}_N\mathsf{P}_N\mathsf{T}_N &= \big([2]^2([2]-\rho_{N-1})+[2]\big)\mathsf{T}_N\mathsf{P}_{N-1}\\
&\quad -\rho_{N-1}\mathsf{P}_{N-1}\mathsf{T}_N\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{T}_N\mathsf{T}_{N-1}\mathsf{T}_N\mathsf{P}_{N-1}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Соотношения (11) и (33) эквивалентны поскольку имеет место тождество

$$[2]([2]-\rho_{N-1})+1 \stackrel{(30)}{=} \frac{[2]}{\rho_N}+1=\frac{[2][N+1]+[N]}{[N]} \qquad (34)$$

$$\stackrel{(5)}{=} \frac{[N+2]+2[N]}{[N]}. \qquad \square$$

§3. Об унитарных представлениях на $\left(\mathbb{C}^n\right)^{\otimes N}$

Будем рассматривать алгебру $H_N(q)$ как комплексную алгебру с параметром $q\in\mathbb{C}$, $|q|=1$ и инволюцией $*$ такой, что

$$q^*=q^{-1}, \qquad \mathsf{R}_k^*=\mathsf{R}_k^{-1} \qquad (35)$$

Унитарность генераторов R_k эквивалентна эрмитовости генераторов T_k,

$$\mathsf{T}_k^*=(q^{-1}\cdot 1+\mathsf{R}_k)^*=q\cdot 1+\mathsf{R}_k^{-1} \stackrel{(1)}{=} q\cdot 1+\mathsf{R}_k-(q-q^{-1})\cdot 1=\mathsf{T}_k. \qquad (36)$$

Пусть $I\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ - единичная матрица, а $T\in\mathrm{Mat}(n^2,\mathbb{C})$ - эрмитова матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$T^2=(q+q^{-1})\,T, \qquad T_1\,T_2\,T_1-T_2\,T_1\,T_2=T_1-T_2, \qquad (37)$$

где $T_1\equiv T\otimes I$ и $T_2\equiv I\otimes T$, а $\otimes$ обозначает кронекеровское произведение. Тогда гомоморфизм $\tau: H_N(q)\to\mathrm{Mat}(n^N,\mathbb{C})$ такой, что

$$\tau(\mathsf{T}_k)=T_k\equiv I^{\otimes(k-1)}\otimes T\otimes I^{\otimes(N-k-1)} \qquad (38)$$

есть $*$-представление алгебры $H_N(q)$ на тензорном произведении $\left(\mathbb{C}^n\right)^{\otimes N}$. В таком представлении $\tau(\mathsf{R}_k)=R_k$ суть унитарные матрицы, являющиеся решением уравнения Янга-Бакстера

$$R_kR_{k+1}R_k=R_{k+1}R_kR_{k+1}. \qquad (39)$$

Отметим, что при $q=1$ матрицы R_k унитарны и инволютивны. Классификация решений уравнения (39) для этого случая была получена в работе [4].

Поскольку $(q+q^{-1})\in\mathbb{R}$ при $|q|=1$, а соотношения (37) инвариантны при замене $T_k\to -T_k$, $q\to -q$, то можно рассматривать только случай $(q+q^{-1})>0$. (При $(q+q^{-1})=0$, единственная эрмитова матрица такая, что $T^2=0$, есть $T=0$.)

Предложение 3. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ *и* $q = e^{i\gamma}$, *где* $\frac{\pi}{N+1} \leqslant \gamma < \frac{\pi}{N}$. *Тогда, если эрмитова матрица* $T \neq 0$ *удовлетворяет соотношениям* (37) *и* τ *есть соответствующее ей представление* (38), *то* $\tau(\mathsf{P}_N) = 0$.

Доказательство. Обозначим $P_N = \tau(\mathsf{P}_N)$. Поскольку $0 < \gamma < \frac{\pi}{N}$, то $\rho_n = \frac{[n]}{[n+1]} = \frac{\sin(n\gamma)}{\sin((n+1)\gamma)}$ определены (и положительны) при всех $n = 1, \ldots, N-1$. Следовательно, проекторы P_k, рекурсивно определяемые формулой (17), существуют при всех $k = 1, \ldots, N$. Из формулы (17) также следует эрмитовость всех проекторов P_k и, тем самым, положительная полуопределенность матриц $(P_N - P'_N)^4$ и $(P_N - P'_N)^2$. Однако следствием соотношения (10) является равенство

$$(P_N - P'_N)^4 = \frac{[N-1][N+1]}{[N]^2}(P_N - P'_N)^2, \tag{40}$$

где $\frac{[N-1][N+1]}{[N]^2} \leqslant 0$ поскольку $(N-1)\gamma < \pi$ и $\pi \leqslant (N+1)\gamma < 2\pi$. То есть правая часть в (40) есть отрицательно полуопределенная матрица. Тем самым, соотношение (40) может выполняться только если $P_N = P'_N$. Но тогда $0 = T_1 P_N = T_1 P''_N = T \otimes P_N$. Откуда $P_N = 0$ поскольку $T \neq 0$. □

Отметим, что доказанное утверждение близко к утверждению о C^*-представлениях алгебры Гекке на гильбертовом пространстве, полученному в работе [5]. В рассматриваемом нами случае трансляционная инвариантность представления (38) накладывает дополнительные ограничения. В частности, как показано в работе [1], унитарные представления алгебры Темперли-Либа на пространстве $\left(\mathbb{C}^n\right)^{\otimes N}$ существуют только при $|q + q^{-1}| = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$.

Предложение 4. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 3$ *и* $q = e^{i\gamma}$, *где* $\frac{\pi}{N+1} < \gamma < \frac{\pi}{N}$ *и при этом*

$$[N+2] + 2[N] < 0. \tag{41}$$

Тогда, если эрмитова матрица $T \neq 0$ *удовлетворяет соотношениям* (37) *и* τ *– соответствующее ей представление* (38), *то* $\tau(\mathsf{P}_{N-1}) = 0$.

Доказательство. В силу предложения 3 мы имеем $P_N = 0$. Так как при этом $[N] > 0$, то соотношение (11) принимает вид

$$[2]\big([N+2] + 2[N]\big)\, T_N P_{N-1} \\ = [N-1]\, P_{N-1} T_N T_{N-1} T_N T_{N-1} T_N P_{N-1}. \tag{42}$$

Поскольку $[N-1]>0$, то правая часть в (42) есть положительно полуопределенная матрица. Матрица $[2]T_N P_{N-1} = (T_N P_{N-1})(T_N P_{N-1})^*$ также положительно полуопределенная так как T_N и P_{N-1} коммутируют. Значит, если выполняется условие (41), то левая часть в (42) есть отрицательно полуопределенная матрица. Тем самым, соотношение (42) может выполняться только если $T_N P_{N-1} = 0$. Но $T_N P_{N-1} = P_{N-1} \otimes T$, где $T \neq 0$. Значит $P_{N-1} = 0$. □

Заметим, что $[N+2]+2[N] = 1$ при $\gamma = \frac{\pi}{N+1}$ и $[N+2]+2[N] = -[2] < 0$ при $\gamma = \frac{\pi}{N}$. Поэтому для любого интервала $\big(\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}\big)$, $N \geqslant 3$, существуют значения γ, для которых выполняется условие (41).

Предложение 5. *Пусть $q = e^{i\gamma}$, где $\gamma \in \big(\arccos(\sqrt{\frac{1}{8}(1+\sqrt{5})}, \frac{1}{2}\pi\big)$. Если эрмитова матрица $T \neq 0$ удовлетворяет соотношениям* (37)*, то $T = [2]\,(I \otimes I)$.*

Доказательство. Рассмотрим соответствующее представление (38). При $\gamma \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, мы имеем $T = [2]\,(I \otimes I)$ так как $P_2 = 0$ в силу предложения 3.

Для $N = 3$ условие (41) выполняется если $f(\gamma) \equiv \sin 5\gamma + 2\sin 3\gamma < 0$. Уравнение $f(\gamma) = (16\cos^4\gamma - 4\cos^2\gamma - 1)\sin\gamma = 0$ имеет на интервале $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ единственный корень, соответствующий значению $\cos^2\gamma_0 = \frac{1}{8}(1+\sqrt{5})$. Учитывая, что $f(\frac{1}{3}\pi) < 0$, мы заключаем, что при $\gamma \in \big(\gamma_0, \frac{1}{3}\pi\big)$ условие (41) выполняется. Тогда $P_2 = 0$ в силу предложения 4 и, тем самым, $T = [2]\,(I \otimes I)$. □

Список литературы

1. A. Bytsko, *A relation for the Jones-Wenzl projector and tensor space representations of the Temperley–Lieb algebra.*— Linear and Multilinear Algebra **68** (2020) 2239–2253.
2. Д.И. Гуревич, *Алгебраические аспекты квантового уравнения Янга–Бакстера.*— Алгебра и анализ **2** (1990) вып. 4, 119–148.
3. M. Jimbo, *A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang–Baxter equation.*— Lett. Math. Phys. **11** (1986) no. 3, 247–252.
4. G. Lechner, U. Pennig, and S. Wood, *Yang–Baxter representations of the infinite symmetric group.*— Adv. Math. **355** (2019) 106769.
5. H. Wenzl, *Hecke algebras of type A_n and subfactors.*— Inv. Math. **92** (1988) 349–383.

Bytsko A. G. Two relations for the antisymmetrizer in the Hecke algebra.

We prove two relations for the antisymmetrizer in the Hecke algebra and derive certain restrictions imposed by these relations on unitary representations of the Hecke algebra on tensor powers of the space $\mathbb{C}^n$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 С.-Петербург, Россия;
Section of Mathematics,
University of Geneva,
C.P. 64, 1211 Genève 4, Switzerland
E-mail: bytsko@pdmi.ras.ru

Поступило 20 ноября 2021 г.