Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 509, 2021 г.

Т. А. Болохов

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПАУЛИ-ВИЛЛАРСА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ С СИНГУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Введение

Модели квантовой механики с сингулярным взаимодействием представляют из себя интересный пример систем, у которых решение оказывается проще, чем корректно построенный гамильтониан. Действительно, оператор рассеяния соответствующей системы квантовой механики может быть вычислен через резольвенту оператора энергии. Такая резольвента, в свою очередь, может быть выражена с помощью изящной конструкции Крейна [1] через резольвенту оператора невозмущенной системы. В то время как построение самого возмущенного гамильтониана требует введения регуляризации и последующей процедуры перенормировки.

Построение резольвенты по Крейну предоставляет широкую возможность для выбора как количества центров взаимодействия (ранга возмущения), так и их конкретного вида и степени локальности. Математические аспекты теории сингулярных взаимодействий и построения соответствующих Гамильтонианов подробно описаны в литературе [2, 3, 11]. Стандартный подход к проблеме подразумевает аппроксимацию возмущенного гамильтониана T^κ операторами вида

$$T_v^* + \beta_n(\kappa) v_n(v_n, \cdot\,), \tag{1}$$

где v_n – аппроксимации сингулярного потенциала v регулярной функцией, и изучение вопросов сходимости этого выражения при $n \to \infty$ в смысле нормы графика или нормы разности разольвент. Ввиду того, что оператор T^κ и невозмущенный оператор T определены на разных областях, выражение (1) оказывается не всегда удобным в использовании. Действие оператора T приходится заменять на действие оператора T_v^*, сопряженного к сужению T на ядро потенциала v, что требует

Ключевые слова: сингулярные возмущения самосопряженных операторов, регуляризация Паули-Вилларса.

вычитания расходящейся части и, таким образом, порождает дополнительный предельный переход.

В данной работе рассматривается несколько отличный, физический подход к проблеме, в котором регуляризуется не только потенциал, но и невозмущенный Гамильтониан. Мы изучаем вопрос, в какой мере предел выражения

$$TP^\Lambda + \beta(\Lambda)P^\Lambda v(P^\Lambda v, \cdot), \tag{2}$$

где P^Λ – регуляризующий множитель, дает нам в пределе $\Lambda \to \Lambda_0$ оператор, соответствующий резольвенте, построенной для потенциала v. На примере взаимодействия трехмерной частицы с δ-потенциалом [4] мы покажем, как этот подход, помимо классической регуляризации импульсом обрезания, работает для регуляризации методом Паули-Вилларса. Этот метод мы понимаем как использование в качестве P^Λ рациональной функции T, стремящейся к единичному оператору при значении параметра регуляризации Λ стремящемуся к точке перенормировки Λ_0

$$P^\Lambda(T) \to I, \quad \Lambda \to \Lambda_0.$$

Такая регуляризация может быть удобна, например, в случае, когда существует простое выражение для резольвенты оператора T

$$R(\lambda) = \frac{I}{T - \lambda I},$$

но при этом его спектральный проектор записывается только в виде формального интеграла от $R(\lambda)$. В такой ситуации выражения типа

$$P^\Lambda = \frac{P(T/\Lambda)}{Q(T/\Lambda)} = \sum_{k,n} q_{kn} R^n(q_k \Lambda)$$

представляется в виде суммы степеней известной резольвенты R, взятой в точках, соответствующих корням q_k полинома Q. В частности, множитель

$$P^\Lambda = \frac{\Lambda}{T + \Lambda} = \Lambda R(-\Lambda)$$

является простейшим примером регуляризации Паули-Вилларса, который, как мы покажем, вполне работает для теории сингулярных возмущений.

Кроме того, формальная регуляризация вида (2) работает и для других резольвент, описываемых теорией расширений Крейна. В частности, мы покажем, что регуляризация Паули-Вилларса может быть использована для инфракрасных (то есть исходно нелокальных) расширений квадратичной формы гауссова функционала основного состояния свободной скалярной теории поля [10].

Работа построена следующим образом. В первой части мы приводим основные формулы для построения резольвенты возмущенного оператора по невозмущенной резольвенте и сингулярному потенциалу. Во второй части описываем процедуру перенормировки выражения (2) и выводим критерии для его сходимости к оператору, соответствующему возмущенной резольвенте. В третьей части мы проверяем, что указанные критерии выполняются для регуляризации модели взаимодействия трехмерной частицы с δ-потенциалом методами обрезания импульса и Паули-Вилларса. В четвертой части мы демонстрируем работу регуляризации Паули-Вилларса для расширений квадратичной формы функционала основного состояни свободной скалярной теории поля.

§1. Сингулярные возмущения самосопряженного оператора

Пусть T – полуограниченный самосопряженный оператор в Гильбертовом пространстве H, заданный на всюду плотной области определения $\mathcal{D}(T) \subset H$, для которого известна резольвента

$$R(\lambda) = \frac{I}{T - \lambda I}.$$

Теория Крейна позволяет, путем добавки слагаемых конечного ранга, строить из $R(\lambda)$ резольвенты других операторов, в некотором смысле близких к T. Например, с помощью добавки ранга 1, можно построить резольвенту следующего вида

$$R^{\kappa}(\lambda) = R(\lambda) + \frac{d_{\lambda}(d_{\bar{\lambda}}, \cdot)}{\kappa - \gamma(\lambda)}, \tag{3}$$

где d_{λ} – это аналитический дефектный вектор, а $\gamma(\lambda)$ – функция, аналитическая вне спектра T, определяемая соотношением

$$\frac{\gamma(\mu) - \gamma(\lambda)}{\mu - \lambda} = (d_{\bar{\mu}}, d_{\lambda}). \tag{4}$$

Уравнение (4) задает функцию $\gamma(\lambda)$ с точностью до константы, изменение которой компенсируется переопределением параметра κ.

Для резольвенты сингулярного возмущения самосопряженного оператора, аналитический дефектный вектор d_λ может быть выражен через сингулярный потенциал v (обобщенную функцию)

$$d_\lambda = R(\lambda)v.$$

Более строго v определяется как линейный функционал $v(f), f \in \mathcal{D}(T)$ замкнутый в норме графика оператора T, такой, что его ядро является линейным множеством, всюду плотным в исходном гильбертовом пространстве H. То есть, по классификации теории сингулярных возмущений [5], потенциал v принадлежит пространству $\mathcal{H}_{-2}(T)$. Рассматривая действие этого функционала на множество векторов $\{R(\lambda)h : h \in H\}$, мы получим линейный функционал, заданный на всём пространстве H и, следовательно, определяемый некоторым вектором $d_{\bar{\lambda}} \in H$ по формуле

$$v(R(\lambda)h) = (d_{\bar{\lambda}}, h)$$

(мы считаем, что скалярное произведение линейно по второму аргументу и антилинейно по первому).

Запишем скалярное произведение вектора $R(\bar{\lambda})d_{\bar{\mu}}$ с произвольным вектором $h \in H$

$$\begin{aligned}(R(\bar{\lambda})d_{\bar{\mu}}, h) = v(R(\lambda)R(\mu)h) = v(\frac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda}h)\\ = \frac{v(R(\mu)h) - v(R(\lambda)h)}{\mu - \lambda} = \frac{(d_{\bar{\mu}}, h) - (d_{\bar{\lambda}}, h)}{\mu - \lambda},\end{aligned}$$

то есть вектор d_λ удовлетворяет соотношению из определения аналитического дефектного вектора [1, 6]

$$d_\mu - d_\lambda = (\mu - \lambda)R(\lambda)d_\mu.$$

Рассматривая скалярное произведение

$$(d_{\bar{\mu}}, d_\lambda) = v(R_\mu d_\lambda) = v(\frac{d_\lambda - d_\mu}{\lambda - \mu}) = \frac{v(d_\lambda - d_\mu)}{\lambda - \mu}, \tag{5}$$

мы получаем, что разность $d_\lambda - d_\mu$ лежит в области определения оператора T. То же самое можно сказать и про разности

$$d_\lambda - (I - icR(-ic))d_{ic}, \quad d_\mu - (I - icR(-ic))d_{ic},$$

где точка ic находится на мнимой оси и не равна нулю. Следовательно

$$v(d_\lambda - d_\mu) = v(d_\lambda - (I - icR(-ic))d_{ic}) - v(d_\mu - (I - icR(-ic))d_{ic})$$

и мы можем взять в качестве $\gamma(\lambda)$ выражение

$$\gamma(\lambda) = v(d_\lambda - (I - icR(-ic))d_{ic}).$$

Заметим, что действие функционала v на дефектные векторы может быть записано как формальное скалярное произведение

$$\gamma(\lambda) = \big(v, \big(\frac{I}{T - \lambda I} - \big(I - \frac{icI}{T + ic}\big)\frac{I}{T - icI}\big)v\big) \\ = \big(v, \big(\frac{I}{T - \lambda I} - \frac{T}{T^2 + c^2 I}\big)v\big),$$

которое, при переходе к представлению оператора T в виде интеграла по спектральной мере, в точности совпадает с интегральным представлением для функций Неванлинны [8].

Сужение T_v оператора T на ядро функционала v

$$T_v: \quad h \to Th, \quad h \in \mathcal{D}(T_v) = \{h : h \in \mathcal{D}(T), v(h) = 0\}$$

представляет из себя замкнутый симметрический оператор, для которого d_λ является дефектным вектором. Дествительно, если $h \in \mathcal{D}(T_v)$, то

$$(d_{\bar\lambda}, (T_v - \lambda)h) = v(R_\lambda(T - \lambda)h) = v(h) = 0.$$

И, следовательно, $R^\kappa(\lambda)$ является резольвентой некоторого самосопряженного расширения оператора T_v, а κ входит в формулу (3) как параметр расширения.

§2. Перенормированный гамильтониан

Наша задача состоит в том, чтобы построить расширение, соответствующее резольвенте R^κ в терминах невозмущенного оператора T и потенциала v. Выражение

$$T^\kappa = T + \beta v v(\cdot),$$

очевидно, не имеет смысла, ввиду того, что функционал v не принадлежит пространству H. Для того, чтобы исправить ситуацию, домножим T и v на регуляризующий множитель P_Λ, являющийся вещественной функцией T, влияние которого исчезает при значении параметра Λ стремящемся к некоторой точке перенормировки Λ_0. Мы будем считать, что

$$P^\Lambda \to I, \quad \Lambda \to \Lambda_0$$

и, кроме того, при каждом $\Lambda \neq \Lambda_0$ функционал $v(P^\Lambda\,\cdot\,)$ должен быть ограничен на всем пространстве H, то есть

$$v(P^\Lambda\,\cdot\,) = (P^\Lambda v,\,\cdot\,), \quad P^\Lambda v \in H.$$

Тогда оператор T^κ записывается в следующем виде

$$T^\kappa = \lim_{\Lambda\to\Lambda_0}\bigl(TP_\Lambda + \beta(\Lambda)P^\Lambda v v(P^\Lambda\cdot)\bigr), \tag{6}$$

где константа взаимодействия β также может зависеть от Λ и стремится к нулю при $\Lambda \to \Lambda_0$. Данное выражение и последующие вычисления являются более общим вариантом конструкции, использованной в работе [9].

Для того, чтобы предел (6) задавал самосопряженный оператор с резольвентой $R^\kappa(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке λ вне спектра этого оператора для любого вектора $h \in H$ существовал предел

$$\lim_{\Lambda\to\Lambda_0}\bigl(TP_\Lambda + P^\Lambda v\beta(\Lambda)v(P^\Lambda\,\cdot\,) - \lambda\bigr)R^\kappa(\lambda)h = h. \tag{7}$$

Здесь необходимость следует из того свойства самосопряженного оператора, что область его определения есть образ действия резольвенты на всё Гильбертово пространство H

$$\mathcal{D}(T^\kappa) = \{R^\kappa(\lambda)h : h \in H\}.$$

А достаточность – из симметричности выражения (6): порождаемый пределом оператор является симметрическим и, следовательно, не может быть шире, чем самосопряженный оператор, соответствующий резольвенте R^κ.

Подставим в формулу (7) выражение для резольвенты (3) и, опустив знак предела, раскроем скобки

$$\bigl(P^\Lambda T - \lambda + \beta(\Lambda)P^\Lambda v(P^\Lambda v,\,\cdot\,)\bigr)\bigl(R(\lambda) + \frac{d_\lambda(d_{\bar\lambda},\,\cdot\,)}{\kappa - \gamma(\lambda)}\bigr)h \tag{8}$$

$$= P^\Lambda(T-\lambda)R(\lambda)h - \lambda R(\lambda)(I - P^\Lambda)h + \frac{P^\Lambda(T-\lambda)d_\lambda(d_{\bar\lambda},h)}{\kappa-\gamma(\lambda)} \tag{9}$$

$$-\lambda(I-P^\Lambda)\frac{d_\lambda(d_{\bar\lambda},h)}{\kappa-\gamma(\lambda)} + \beta(\Lambda)P^\Lambda v(P^\Lambda v, R(\lambda)h) \tag{10}$$

$$+\beta(\Lambda)\frac{P^\Lambda v(P^\Lambda v, d_\lambda)(d_{\bar\lambda},h)}{\kappa-\gamma(\lambda)} \tag{11}$$

$$= P^\Lambda h - \lambda R(\lambda)(I-P^\Lambda)h + \beta(\Lambda)P^\Lambda v((I-P^\Lambda)d_{\bar\lambda},h) \tag{12}$$

$$+\Big(\frac{1}{\kappa-\gamma(\lambda)}+\beta(\Lambda)\big(1+\frac{(P^\Lambda v, d_\lambda)}{\kappa-\gamma(\lambda)}\big)\Big)P^\Lambda v(d_{\bar\lambda}, h). \tag{13}$$

По определению P^Λ

$$\lim_{\Lambda\to\Lambda_0} P^\Lambda h = h, \quad \lim_{\Lambda\to\Lambda_0}(I-P^\Lambda)h = 0$$

поэтому первое слагаемое в (12) стремятся к h, а второе стремится к нулевому вектору. Равентсво нулю коэффициента в слагаемом (13)

$$\frac{1}{\kappa-\gamma(\lambda)}+\beta(\Lambda)\big(1+\frac{(P^\Lambda v, d_\lambda)}{\kappa-\gamma(\lambda)}\big) = 0 \tag{14}$$

должно являться уравнением для функции $\beta(\Lambda)$

$$\beta(\Lambda) = -\frac{1}{\kappa-\gamma(\lambda)+(P^\Lambda v, d_\lambda)}.$$

Но, как несложно заметить, уравнение (14) не решается одновременно для всех значений спектрального параметра λ. Поэтому мы можем считать, что оно выполняется только в некоторой точке μ, а далее сделаем оценку для значения выражения (13) в произвольной точке λ. Положим

$$\beta(\Lambda) = \beta(\Lambda, \mu) = -\frac{1}{\kappa-\gamma(\mu)+(P^\Lambda v, d_\mu)}. \tag{15}$$

Запишем вспомогательное равенство

$$\begin{aligned}(P^\Lambda v, d_\lambda) - \gamma(\lambda) - (P^\Lambda v, d_\mu) + \gamma(\mu) = (\mu-\lambda)(d_{\bar\mu}, d_\lambda)\\ + (P^\Lambda v, d_\lambda - d_\mu) = (\mu-\lambda)(d_{\bar\mu}, d_\lambda) + (\lambda-\mu)(P^\Lambda d_{\bar\mu}, d_\lambda)\\ = (\mu-\lambda)((I-P^\Lambda)d_{\bar\mu}, d_\lambda),\end{aligned} \tag{16}$$

здесь мы при переходе между строками воспользовались резольвентным тождеством

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu.$$

Соотношение (16) позволяет оценить коэффициент в (13) через убывающую разность $I - P^\Lambda$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\kappa-\gamma(\lambda)} + \beta(\Lambda)\big(1 + \frac{(P^\Lambda v, d_\lambda)}{\kappa-\gamma(\lambda)}\big)\\
&= \frac{1}{\kappa-\gamma(\lambda)}\big(1 - \frac{\kappa-\gamma(\lambda)+(P^\Lambda v, d_\lambda)}{\kappa-\gamma(\mu)+(P^\Lambda v, d_\mu)}\big)\\
&= \frac{\beta(\Lambda)}{\kappa-\gamma(\lambda)}\big(\gamma(\mu)-\gamma(\lambda)+(P^\Lambda v, d_\lambda)-(P^\Lambda v, d_\mu)\big)\\
&= (\mu-\lambda)\frac{\beta(\Lambda)}{\kappa-\gamma(\lambda)}((I-P^\Lambda)d_{\bar\mu}, d_\lambda).
\end{aligned}$$

Таким образом, слагаемое (13) переписывается как

$$(\mu-\lambda)\frac{\beta(\Lambda)}{\kappa-\gamma(\lambda)}((I-P^\Lambda)d_{\bar\mu}, d_\lambda)P^\Lambda v(d_{\bar\lambda}, h).$$

Модуль этого выражения может быть оценен сверху через произведение

$$|\beta(\Lambda)|\,\Big|\frac{\mu-\lambda}{\kappa-\gamma(\lambda)}\Big|\,|((I-P^\Lambda)d_{\bar\lambda}, h)|\,||P^\Lambda v||$$

и, таким образом, если знаменатель $\kappa - \gamma(\lambda)$ не обращается в ноль (то есть точка λ не попадает в дискретный спектр T^κ), для выполнения равенства (7) достаточно показать что

$$\lim_{\Lambda\to\Lambda_0}|\beta(\Lambda)|\,|((I-P^\Lambda)d_{\bar\lambda}, h)|\,||P^\Lambda v|| = 0. \tag{17}$$

Выполнение этого соотношения должно проверяться для конкретного оператора T, потенциала v и регуляризации P^Λ, что и является предметом дальнейшего рассмотрения настоящей работы.

§3. Взаимодействие с точечным потенциалом в трехмерном пространстве

Пусть $H = L^2(\mathbb{R}^3)$ – пространство Фурье-образов функций в трехмерном координатном пространстве со скалярным произведением

$$(f,h) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{f(\boldsymbol{k})}g(\boldsymbol{k})\,d^3k,$$

и T – преобразование Фурье оператора Лапласа

$$T : f(\boldsymbol{k}) \to k^2 f(\boldsymbol{k}),$$

где $k = |\boldsymbol{k}|$. Его резольвента $R(\lambda)$ есть оператор умножения на функцию $(k^2-\lambda)^{-1}$

$$R(\lambda) : h(\boldsymbol{k}) \to \frac{1}{k^2-\lambda} h(\boldsymbol{k}).$$

Преобразование Фурье от трехмерной δ-функции дает нам сингулярный потенциал

$$v(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Как несложно увидеть, функция $v(\boldsymbol{k})$ не лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$, но при этом соответствующий ей линейный функционал

$$v : f(\boldsymbol{k}) \to \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{k})\, d^3k$$

корректно определен и замкнут на области определения оператора T

$$\mathcal{D}(T) = \{h : \int\limits_{\mathbb{R}^3} |h(\boldsymbol{k})|^2 d^3k < \infty, \int\limits_{\mathbb{R}^3} k^4 |h(\boldsymbol{k})|^2 d^3k < \infty\}.$$

Аналитический дефектный вектор, соответствующий потенциалу v, имеет вид

$$d_\lambda(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2-\lambda)}.$$

Эта функция интегрируется с квадратом в пространстве $\mathbb{R}^3$, но при этом не попадает в область определения оператора T.

Вычислим скалярное произведение в определении для функции $\gamma(\lambda)$

$$\frac{\gamma(\lambda)-\gamma(\mu)}{\lambda-\mu} = (d_{\bar{\mu}}, d_\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(k^2-\lambda)(k^2-\mu)}$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty \frac{k^2\, dk}{(k^2-\lambda)(k^2-\mu)} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3(\lambda-\mu)}$$

$$\times \int\limits_0^\infty \Big(\frac{\lambda}{k^2-\lambda} - \frac{\mu}{k^2-\mu}\Big)\, dk = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{i\sqrt{\lambda}-i\sqrt{\mu}}{\lambda-\mu}\Big),$$

здесь мы считаем, что разрез у корня направлен вдоль положительной полуоси, так что

$$\mathrm{Im}\sqrt{\lambda} > 0, \quad \overline{\sqrt{\lambda}} = -\sqrt{\bar{\lambda}}.$$

Таким образом, в качестве функции Неванлинны можно взять

$$\gamma(\lambda) = \frac{i\sqrt{\lambda}}{4\pi}$$

и далее перейти к вычислениям оценок для конкретных регуляризаций.

3.1. Регуляризация спектральным проектором. Рассмотрим в качестве регуляризующего множителя P^Λ спектральный проектор

$$P^\Lambda_\sigma : h(\boldsymbol{k}) \to \begin{cases} h(\boldsymbol{k}), k < \Lambda, \\ 0, k \geq \Lambda, \end{cases} \quad , \quad \Lambda > 0$$

точка перенормировки Λ_0 при этом равна бесконечности. Тогда, с помощью вспомогательного интеграла

$$\int\limits_0^\Lambda \frac{dk}{k^2 - \mu} = \frac{i\pi\sqrt{\mu}}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{2} \ln \frac{\Lambda - \sqrt{\mu}}{\Lambda + \sqrt{\mu}},$$

можно вычислить скалярное произведение

$$(P^\Lambda_\sigma v, d_\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{|k|<\Lambda} \frac{d^3k}{k^2 - \mu} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\Lambda \frac{k^2\, dk}{k^2 - \mu}$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \big(\Lambda + \mu \int\limits_0^\Lambda \frac{dk}{k^2 - \mu}\big) = \frac{1}{4\pi^2} \big(2\Lambda + i\pi\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu} \ln \frac{\Lambda - \sqrt{\mu}}{\Lambda + \sqrt{\mu}}\big), \quad (18)$$

и подставив это выражение в (15), получить

$$\beta(\Lambda) = \frac{-4\pi^2}{4\pi^2\kappa + 2\Lambda + \sqrt{\mu} \ln \frac{\Lambda - \sqrt{\mu}}{\Lambda + \sqrt{\mu}}} = \mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda}), \quad \Lambda \to \infty.$$

Как и следовало ожидать, $\gamma(\mu)$ сокращается со вторым слагаемым в (18), при $\Lambda \to \infty$ зависимоть от μ в $\beta(\Lambda)$ исчезает, по сравнению со вкладом от κ. Воспользуемся идемпотентностью спектрального проектора

$$I - P^\Lambda_\sigma = (I - P^\Lambda_\sigma)^2 \quad (19)$$

и оценим квадрат выражения, стоящего под знаком предела в (17)

$$|\beta(\Lambda)|^2 |((I - P^\Lambda_\sigma) d_{\bar{\lambda}}, h)|^2 ||P^\Lambda_\sigma v||^2$$
$$\leq |\beta(\Lambda)|^2 ||(I - P^\Lambda_\sigma) d_{\bar{\lambda}}||^2 ||(I - P^\Lambda_\sigma) h||^2 ||P^\Lambda_\sigma v||^2. \quad (20)$$

Проведем следующие вычисления

$$||P_\sigma^\Lambda v||^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{|k|<\Lambda} d^3k = \frac{\Lambda^3}{6\pi^2},$$

$$||(I-P_\sigma^\Lambda)d_\lambda||^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{|k|\geq\Lambda} \frac{d^3k}{(k^2-\lambda)^2} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int\limits_\Lambda^\infty \frac{k^2\,dk}{(k^2-\lambda)^2}$$
$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \Big(\int\limits_\Lambda^\infty \frac{dk}{k^2-\lambda} - \lambda \int\limits_\Lambda^\infty \frac{dk}{(k^2-\lambda)^2} \Big)$$
$$= -\frac{1}{8\pi^2} \Big(\frac{3}{\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Lambda-\sqrt{\lambda}}{\Lambda+\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\Lambda-\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\Lambda+\sqrt{\lambda}} \Big) = \mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda}).$$

Отсюда видно, что первый, второй и четвертый множители в правой части (20) дают ограниченную величину при $\Lambda\to\infty$, в то время как третий множитель, $||(I-P_\sigma^\Lambda)h||^2$, стремится к нулю ввиду того, что действие P_σ^Λ на каждом векторе стремится к единичному оператору. То есть можно сделать вывод, что регуляризация (6) со спектральным проектором P_σ^Λ дает выражение, сходящееся на каждом векторе к возмущенному оператору T^κ.

3.2. Регуляризация методом Паули-Вилларса. Самый простой способ регуляризации методом Паули-Вилларса состоит в использовании множителя

$$P_{\mathrm{PV}}^\Lambda = \Lambda^2 R(-\Lambda^2) = \frac{\Lambda^2}{k^2+\Lambda^2}. \tag{21}$$

Запишем вспомогательные интегралы

$$\int\limits_0^\infty \frac{dk}{k^2-\lambda} = \frac{i\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \int\limits_0^\infty \frac{dk}{k^2+\Lambda^2} = \frac{\pi}{2\Lambda}$$
$$\int\limits_0^\infty \frac{dk}{(k^2+\Lambda^2)(k^2-\lambda)} = \frac{i\pi}{2\sqrt{\lambda}\Lambda(\Lambda-i\sqrt{\lambda})}$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(k^2+\Lambda^2)^2} = \frac{\pi^2}{\Lambda}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(k^2+\Lambda^2)(k^2-\lambda)} = \frac{2\pi^2}{\Lambda-i\sqrt{\lambda}}$$

и вычислим скалярное произведение

$$(P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}}v, d_\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\Lambda^2\, d^3k}{(k^2+\Lambda^2)(k^2-\lambda)} = \frac{\Lambda^2}{4\pi(\Lambda - i\sqrt{\lambda})}$$
$$= \frac{\Lambda}{4\pi} + \frac{i\sqrt{\lambda}}{4\pi} + \mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda}).$$

Далее подставим его в (15) и получим следующий коэффициент $\beta(\Lambda)$

$$\beta(\Lambda) = \frac{-4\pi}{4\pi\kappa - i\sqrt{\mu} + \frac{\Lambda^2}{\Lambda - i\sqrt{\mu}}} = -\frac{4\pi}{\Lambda} + \frac{16\pi^2\kappa}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda^3}).$$

Как и в случае регуляризации спектральным проектором, зависимость от μ здесь появляется только в третьем порядке разложения по степеням $\frac{1}{\Lambda}$. Вычислим теперь следующие множители

$$||P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}}v||^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\Lambda^4\, d^3k}{(k^2+\Lambda^2)^2} = \frac{\Lambda^3}{8\pi}$$

$$||(I - P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}})^{1/2}d_\lambda||^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{k^2\, d^3k}{(k^2+\Lambda^2)(k^2-\lambda)^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{dk}{k^2+\Lambda^2} + \frac{2\lambda}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{dk}{(k^2+\Lambda^2)(k^2-\lambda)}$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{dk}{(k^2+\Lambda^2)(k^2-\lambda)^2} = \frac{1}{4\pi\Lambda} + \mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda^2})$$

и подставим их в оценку для выражения (17)

$$\begin{aligned}&|\beta(\Lambda)|^2|((I - P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}})d_{\bar\lambda}, h)|^2||P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}}v||^2\\ &\le |\beta(\Lambda)|^2||(I - P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}})^{1/2}d_{\bar\lambda}||^2||(I - P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}})^{1/2}h||^2||P^{\Lambda}_{\sigma}v||^2\\ &= \mathcal{O}(1)||(I - P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}})^{1/2}h||^2. \end{aligned}\tag{22}$$

Несложно увидеть, что интеграл

$$||(I - P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}})^{1/2}h||^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{k^2}{k^2+\Lambda^2}|h(\boldsymbol{k})|^2\, d^3k$$

стремится к нулю при $\Lambda \to \infty$ для любой квадратично-интегрируемой функции $h(\boldsymbol{k})$. Отсюда следует, что всё выражение (17) стремится к нулю для регуляризации (21). Таким образом, регуляризация Паули-Вилларса (21) вполне применима для вычисления перенормированного гамильтониана взаимодействия скалярной частицы с δ-потенциалом.

§4. Расширения квадратичной формы основного состояния свободной скалярной теории поля

Другим примером использования схемы перенормировки, описанной во второй части, являются инфракрасные расширения квадратичной формы гауссова функционала основного состояния свободного квантового поля. В этом случае мы опять работаем в пространстве Фурье-образов функций в трехмерном пространстве, но скалярное произведение теперь порождается квадратичной формой оператора Лапласа

$$(f,h)_\Delta = \int\limits_{\mathbb{R}^3} k^2 \overline{f(\boldsymbol{k})} h(\boldsymbol{k})\, d^3k. \tag{23}$$

В качестве невозмущенного оператора T рассматривается оператор умножения на функцию $\frac{1}{k}$

$$T : f(\boldsymbol{k}) \to \frac{1}{k} f(\boldsymbol{k})$$

с резольвентой

$$R(\lambda) : h(\boldsymbol{k}) \to \frac{1}{\frac{1}{k} - \lambda} h(\boldsymbol{k}) = \frac{k}{1 - k\lambda} h(\boldsymbol{k}). \tag{24}$$

Такой оператор в скалярном произведении (23) порождает квадратичную форму гауссиана основного состояния свободного квантового поля

$$q(h) = (h, Th)_\Delta = \int\limits_{\mathbb{R}^3} k |h(\boldsymbol{k})|^2\, d^3k.$$

Для расширения этой формы используется сингулярный потенциал

$$v(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{k^3}, \tag{25}$$

квадрат которого, из-за поведения в начале координат (то есть в инфракрасной области), не интегрируем в ространстве $\mathbb{R}^3$ даже в скалярном произведении (23).

Вычислим функцию Неванлинны $\gamma(\mu)$, соответствующую резольвенте (24) и потенциалу (25)

$$\begin{aligned}(d_{\bar{\mu}}, d_\lambda)_\Delta &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{k^4\, d^3k}{(1-k\mu)(1-k\lambda)k^6} = 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{dk}{(1-k\mu)(1-k\lambda)} \\ &= \frac{4\pi}{\mu-\lambda} \int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{k-\lambda^{-1}} - \frac{1}{k-\mu^{-1}}\Big)\, dk \\ &= \frac{4\pi}{\mu-\lambda}(\ln(-\lambda) - \ln(-\mu)),\end{aligned}$$

где разрез у логарифма направлен вдоль отрицательной полуоси. Таким образом, в качестве функции Неванлинны можно взять вещественную ветвь логарифма с отрицательным аргументом

$$\gamma(\lambda) = -4\pi \ln(-\lambda\kappa), \quad \kappa > 0$$

которая, как и резольвента оператора T, определена на всей комплексной плоскости, за исключением положительной полуоси. Здесь мы включили размерный параметр расширения κ в определение $\gamma(\lambda)$, для того, чтобы логарифм был корректно определен как функция безразмерной переменной.

4.1. Регуляризация спектральным проектором. Рассмотрим в качестве регуляризующего множителя P^Λ спектральный проектор

$$P_\sigma^\Lambda : h(\boldsymbol{k}) \to \begin{cases} h(\boldsymbol{k}), k > \Lambda, \\ 0, k \le \Lambda \end{cases}$$

при этом точкой перенормировки будет являться значение $\Lambda_0 = 0$.

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned}(P_\sigma^\Lambda v, d_\mu)_\Delta &= \int\limits_{|\boldsymbol{k}|>\Lambda} \frac{k^3}{k^6(1-k\mu)} d^3k = 4\pi \int\limits_\Lambda^\infty \frac{dk}{1(1-k\mu)} \\ &= 4\pi \int\limits_\Lambda^\infty \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-\mu^{-1}}\Big) dk = -4\pi \ln \frac{-\mu\Lambda}{1-\mu\Lambda},\end{aligned}$$

как можно заметить, оно логарифмически расходится при $\Lambda \to 0$. Далее вычислим константу взаимодействия $\beta(\Lambda)$

$$\beta(\Lambda) = \frac{-1}{-\gamma(\mu) + (P_\sigma^\Lambda v, d_\mu)_\Delta} = \frac{-1}{4\pi \ln(-\mu\kappa) - 4\pi \ln \frac{-\mu\Lambda}{1-\mu\Lambda}} = \frac{1}{4\pi \ln \frac{\Lambda\kappa^{-1}}{1-\mu\Lambda}},$$

расходящийся квадрат модуля вектора $||P_\sigma^\Lambda v||^2$

$$||P_\sigma^\Lambda v||^2_\Delta = \int\limits_{|\boldsymbol{k}|>\Lambda} \frac{k^2\, d^3k}{k^6} = 4\pi \int\limits_\Lambda^\infty \frac{dk}{k^2} = \frac{4\pi}{\Lambda}, \quad \Lambda \to 0 \tag{26}$$

и квдарат модуля

$$\begin{aligned} ||(I - P_\sigma^\Lambda) d_\lambda||^2_\Delta &= \int\limits_{|\boldsymbol{k}|>\Lambda} \frac{k^2\, d^3k}{(1-k\lambda)^2 k^4} \\ &= 4\pi \int\limits_\Lambda^\infty \frac{dk}{(1-k\lambda)^2} = \frac{4\pi\Lambda}{1-\Lambda\lambda}. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь видно, что произведение (26) и (27) дает ограниченную величину, которая, после домножения на $|\beta(\Lambda)|^2$ стремится к нулю при $\Lambda \to 0$.

4.2. Регуляризация Паули-Вилларса. Как и в случае взаимодействия скалярной трехмерной частицы с δ-потенциалом, мы будем использовать регуляризующий множитель

$$P_{\mathrm{PV}}^\Lambda = \Lambda R(-\Lambda) = \frac{k\Lambda}{1+k\Lambda}, \quad I - P_{\mathrm{PV}}^\Lambda = \frac{1}{1+k\Lambda},$$

и, соответственно, точку перенормировки Λ_0 равную бесконечности.

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (P_{\mathrm{PV}}^\Lambda v, d_\mu)_\Delta &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{k^4 \Lambda\, d^{3k}}{(1-r\mu)(1+k\Lambda)} = 4\pi\Lambda \int\limits_0^\infty \frac{dk}{(1-k\mu)(1+k\Lambda)} \\ &= \frac{4\pi\Lambda}{\Lambda+\mu} \int_0^\infty \Big(\frac{1}{k+\Lambda^{-1}} - \frac{1}{k-\mu^{-1}}\Big)\, dk = \frac{4\pi\Lambda}{\Lambda+\mu} \ln \frac{\Lambda}{-\mu} \end{aligned}$$

и константу связи

$$\beta(\Lambda) = \frac{-1}{(P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}}v, d_\mu)_\Delta - \gamma(\mu)} = \frac{-1}{\frac{4\pi\Lambda}{\Lambda+\mu}\ln\frac{\Lambda}{-\mu} + 4\pi\ln(-\mu\kappa)}$$
$$= \frac{-1}{\frac{4\pi\Lambda}{\Lambda+\mu}\ln(\Lambda\kappa) + \frac{4\pi\mu}{\Lambda+\mu}\ln(-\mu\kappa)}.$$

Далее вычислим квадрат модуля вектора, аппроксимирующего потенциал

$$||P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}}v||^2_\Delta = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{k^4\Lambda\, d^3k}{k^6(1+k\Lambda)^2} = 4\pi\Lambda^2 \int\limits_0^\infty \frac{dk}{(1+k\Lambda)^2} = 4\pi\Lambda \qquad (28)$$

и скалярное произведение

$$((I - P^{\Lambda}_{\mathrm{PV}})d_\lambda, d_\lambda)_\Delta = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{k^2\, d^3k}{(1-k\lambda)^2(1+k\Lambda)}$$
$$= 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{dk}{(1-k\lambda)^2(1+k\Lambda)} == \frac{4\pi}{\lambda^2\Lambda} \int\limits_0^\infty \frac{dk}{(k-\lambda^{-1})^2(k+\Lambda^{-1})}$$
$$= \frac{4\pi}{\lambda^2\Lambda}\frac{d}{d\lambda^{-1}} \int\limits_0^\infty \frac{dk}{(k-\lambda^{-1})(k+\Lambda^{-1})} = -4\pi\frac{d}{d\lambda}\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}$$
$$\times \int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{k-\lambda^{-1}} - \frac{1}{k+\Lambda^{-1}}\Big)\, dk = -4\pi\frac{d}{d\lambda}\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}\ln\frac{-\lambda}{\Lambda}$$
$$= \frac{4\pi}{\Lambda+\lambda}\ln\frac{\Lambda}{-\lambda} - \frac{4\pi\lambda}{(\Lambda+\lambda)^2}\ln\frac{\Lambda}{-\lambda} + \frac{4\pi}{\Lambda+\lambda}. \qquad (29)$$

Видно, что произведение квадрата $\beta(\Lambda)$, выражений (28) и (29) стремится к нулю при $\Lambda \to \infty$ как величина $\mathcal{O}(\frac{1}{\ln\Lambda})$, а значит приближение возмущенного оператора (6) с помощью регуляризации Паули-Вилларса работает и для этой модели.

Заключение

Мы показали, что регуляризация Паули-Вилларса может быть использована для построения перенормированных гамильтонианов и квадратичных форм энергии систем с сингулярным взаимодействием. В качестве примеров использовались скалярная трехмерная частица, взаимодействующая с δ-потенциалом и квадратичная форма гауссиана основного состояния свободного квантового поля.

Список литературы

1. М. Г. Крейн, *Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения I.* — Мат. сб. **20**(63) (1947) 431–495.
2. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Springer, 1988.
3. A. Kiselev, B. Simon, *Rank one perturbations with infinitesimal coupling.* — J. Funct. Anal. **130** (1995), 345–356.
4. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом*, Докл. АН СССР **137**, No. 5 (1961), 1011–1014.
5. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbation of Differential Operators. Solvable Schrödinger type Operators*, Cambridge University Press, 2000.
6. A. Alonso, B. Simon, *The Birman - Krein - Vishik theory of selfadjoint extensions of semibounded operators.* — J. Operator Theory **4** (1980), 251–270.
7. W. Pauli, F. Villars, *On the invariant regularization in relativistic quantum theory.* — Rev. Mod. Phys. **21** (1949), 434–444.
8. F. Gesztesy, E. Tsekanovskii, *On Matrix-Valued Herglotz Functions*, arXiv:funct-an/9712004.
9. Л. Д. Фаддеев, *Замечания о расходимостях и размерной трансмутации в теории Янга-Миллса.* — Теор. мат. физ. **148** (2006), 133.
10. Т. А. Болохов, *Инфракрасные расширения квадратичной формы основного состояния скалярной теории поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **494** (2020), 64.
11. S. Albeverio, P. Kurasov, *Rank one perturbations, approximations and selfadjoint extensions.* —J. Funct. Anal. **148** (1997), 152–169.

Bolokhov T. A. Pauli-Villars regularization for some models with singular perturbations.

We show how Pauli-Villars regularization works in the construction of renormalized Hamiltonian for two examplars of quantum systems with singular pertuabations. The systems are the scalar 3-dimensional particle interacting with δ-potential and the infrared extensions of the quadratic forms of the gaussian functional of the ground state in the quantum field theory.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: timur@pdmi.ras

Поступило 8 ноября 2021 г.