Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 508, 2021 г.

Н. Д. Филонов, П. А. Ходунов

О ЛОКАЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $-\Delta u + a\partial_z u = 0$

Введение

Рассмотрим уравнение

$$-\Delta u + b \cdot \nabla u = 0 \tag{0.1}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Здесь b – заданная вектор-функция,

$$b \in L_{p,loc}(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad p \geqslant 2,$$

u – искомая скалярная функция, $u \in W^1_{2,loc}(\Omega)$. Уравнение (0.1) мы понимаем в слабом смысле

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \big(\nabla \eta + b\eta\big)\, dx = 0 \qquad \forall\ \eta \in C^1_0(\Omega).$$

Свойства решений уравнения (0.1) в зависимости от свойств коэффициента b изучались во многих работах, см. [6–9]. Нас интересует ограниченность решения u. Хорошо известно, что если $p = n > 2$ или $p > n = 2$, то решение ограничено, и более того, гельдерово. Наоборот, если $p < n$ при $n > 2$ или $p = n = 2$, то решение u может иметь особенность в точке, $u \notin L_{\infty,loc}(\Omega)$, см., например, [2]. В физических задачах коэффициент b имеет смысл скорости течения жидкости, поэтому естественно также рассматривать уравнение (0.1) при дополнительном условии $\operatorname{div} b = 0$. При таком условии ситуация резко меняется. Известно, что если $\operatorname{div} b = 0$ и

$$p = 2 \quad \text{при} \quad n = 2, 3, \qquad p > n/2 \quad \text{при} \quad n \geqslant 4,$$

то $u \in L_{\infty,loc}$, см. [8] (отметим, что в этой работе рассматривалось также параболическое уравнение $\partial_t u - \Delta u + b \cdot \nabla u = 0$). Кроме того, в [3] был построен пример неограниченного решения u уравнения (0.1) при $\operatorname{div} b = 0$, $b \in L_p$ при $p < \frac{n-1}{2}$, $n \geqslant 6$. Решение в этом примере имеет особенность на оси; особенности в одной точке не может быть, поскольку для решений уравнения (0.1) с соленоидальным $b \in L_2$ выполняется

Ключевые слова: линейные эллиптические уравнения, соленоидальный дрифт, локальная ограниченность решения, анизотропные пространства Соболева.

принцип максимума, см. [9]. Вопрос, будет ли решение ограничено при $p \in [\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}]$, оставался открытым. В настоящей работе мы ответим на этот вопрос для $p = \frac{n-1}{2}$.

Наложим на коэффициент b еще одно структурное условие:

предположим, что вектор $b(x)$ имеет фиксированное направление. Введем обозначение

$$x = (z, x'), \quad \text{где} \quad z = x_1, \ x' = (x_2, \dots, x_n).$$

Если $b(x) = a(x)\vec{e}_z$, где a — скалярная функция, то из условия соленоидальности

$$\operatorname{div} b = \partial_z a = 0$$

вытекает, что a зависит только от последних $(n-1)$ переменных, $a = a(x')$. Таким образом, уравнение (0.1) переписывается в следующем виде:

$$-\Delta u(z, x') + a(x')\partial_z u(z, x') = 0. \tag{0.2}$$

Естественно рассматривать это уравнение в цилиндре $\Omega = Q_1$, где

$$Q_R = (-R, R) \times B'_R, \qquad B'_R = \left\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| < R\right\}.$$

Мы предполагаем, что $a \in L_p(B'_1)$, $p \geqslant 2$, $u \in W^1_2(Q_1)$, и уравнение понимаем в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla \eta + a\,\eta\,\partial_z u\right) dz dx' = 0 \qquad \forall\, \eta \in C^1_0(Q_1). \tag{0.3}$$

В этой ситуации задача решается полностью, а критическим показателем является $\frac{n-1}{2}$. Мы покажем, что при $p > \frac{n-1}{2}$ решение u обязано быть ограниченным.

Теорема 0.1. *Пусть $a \in L_p(B'_1)$, где*

$$p = 2 \quad \textit{при} \quad n = 3, 4; \qquad p > \frac{n-1}{2} \quad \textit{при} \quad n \geqslant 5.$$

Пусть $u \in W^1_2(Q_1)$ является решением (0.2). Тогда $u \in L_\infty(Q_{1/2})$ и

$$\|u\|_{L_\infty(Q_{1/2})} \leqslant C\left(1 + \|a\|_{L_p(B'_1)}\right)^\mu \|u\|_{W^1_2(Q_1)},$$

где C и μ зависят только от n и p.

Отметим, что ограниченность u в случаях $p = 2$ при $n = 3$ и $p > 2$ при $n = 4$ была известна [8] и для уравнения (0.1).

Кроме того, мы построим примеры неограниченных решений u при $p = \frac{n-1}{2}$. Эти примеры являются, разумеется, и примерами для уравнения (0.1).

§1. Примеры

Примеры мы предъявим в меньшем цилиндре $Q_{1/3}$, ясно, что размер роли не играет. Напомним, что $x = (z, x')$, и будем обозначать $r = |x'|$. Пусть $n \geqslant 3$.

1. Функции

$$u(x) = \ln|\ln r| + z, \qquad a(x') = \frac{(n-3)\ln r - 1}{r^2 \ln^2 r}$$

удовлетворяют уравнению (0.2) и обладают свойствами

$$a \in L_{\frac{n-1}{2}}\left(B'_{1/3}\right), \qquad u \in W_2^1\left(Q_{1/3}\right), \quad u \notin L_\infty\left(Q_{1/3}\right). \tag{1.1}$$

Действительно, при $n \geqslant 4$

$$\int\limits_{B'_{1/3}} \left|\frac{1}{r^2 \ln r}\right|^{\frac{n-1}{2}} dx' = c\int\limits_0^{1/3} \frac{dr}{r|\ln r|^{\frac{n-1}{2}}} < \infty,$$

поэтому $a \in L_{\frac{n-1}{2}}\left(B'_{1/3}\right)$, а при $n = 3$

$$a(x') = -\frac{1}{r^2\ln^2 r} \quad \text{и} \quad \int\limits_{B'_{1/3}} |a(x')|\,dx' = c\int\limits_0^{1/3}\frac{dr}{r\ln^2 r} = \frac{c}{\ln 3} < \infty,$$

то есть $a \in L_1\left(B'_{1/3}\right)$. Ясно также, что $u \in W_2^1\left(Q_{1/3}\right)$.

Далее,

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-2}}\partial_r(r^{n-2}\partial_r u) + \partial_z^2 u = \frac{1}{r^{n-2}}\partial_r\left(\frac{r^{n-3}}{\ln r}\right) = \frac{n-3}{r^2\ln r} - \frac{1}{r^2\ln^2 r}.$$

Правая часть суммируема, поэтому дифференцирование оправдано. Наконец,

$$a\,\partial_z u = a = \frac{n-3}{r^2\ln r} - \frac{1}{r^2\ln^2 r}.$$

2. Функции

$$u(x) = \ln|\ln r|\cdot e^z, \quad a(x') = \frac{(n-3)\ln r - 1}{r^2\ln^2 r\ln|\ln r|} + 1$$

также удовлетворяют (0.2) и (1.1). Доказательство аналогично.

§2. Анизотропные пространства функций

Для доказательства теоремы 0.1 нам потребуются анизотропные пространства и аналоги классических теорем в них. Теория таких пространств изложена в [1].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область.

Определение 2.1. Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – мультииндекс, $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$. Анизотропным пространством Лебега $L_{\vec{p}}(\Omega) = L_{(p_1,\dots,p_n)}(\Omega)$ называется пространство измеримых функций на Ω, для которых конечна норма. При $p_j = \infty$ соответствующая норма заменяется на esssup

$$\|f\|_{\vec{p}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\dots \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n}.$$

Здесь подразумевается, что функция f продолжена нулем вне Ω.

Обычное пространство Лебега $L_p(\Omega)$ соответствует мультииндексу $(p, p, \dots, p)$.

Имеет место аналог неравенства Гельдера.

Теорема 2.2 ([1], Теорема 2.4)**.** *Пусть*

$$f \in L_{\vec{p}}(\Omega), \quad g \in L_{\vec{q}}(\Omega), \quad \frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда $fg \in L_1(\Omega)$ *и*

$$\|f\,g\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_{\vec{p}}(\Omega)} \|g\|_{L_{\vec{q}}(\Omega)}.$$

Следствие 2.3. *Пусть* $u \in L_{\vec{p}}(\Omega)$, $p_j \geqslant q$ *при* $j = 1, \dots, n$. *Тогда*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant d^{\frac{n}{q} - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j}} \|u\|_{L_{\vec{p}}(\Omega)},$$

где $d = \operatorname{diam} \Omega$ *– диаметр множества.*

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\|u\|^q_{L_q(\Omega)} \leqslant \|u\|^q_{L_{\vec{p}}(\Omega)} \, \|1\|_{L_{\vec{r}}(\Omega)},$$

где $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$, r_j – сопряженный показатель к $\frac{p_j}{q}$. Поместим Ω в куб с ребром длины d и сторонами, параллельными координатным плоскостям. Тогда

$$\|1\|_{L_{\vec{r}}(\Omega)} \leqslant \left(\int_0^d \left(\dots\left(\int_0^d 1^{r_1}\,dx_1\right)^{r_2/r_1}\dots\right)^{r_n/r_{n-1}} dx_n\right)^{1/r_n}$$
$$= \left(\left(\dots\left(d^{r_2/r_1}\cdot d\right)^{r_3/r_2}\dots\right)^{r_n/r_{n-1}}\cdot d\right)^{1/r_n} = d^S,$$

где

$$S = \left(\dots\left(\left(\frac{r_2}{r_1}+1\right)\cdot\frac{r_3}{r_2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\frac{r_n}{r_{n-1}}+1\right)\times\frac{1}{r_n}$$
$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} = n - \sum_{j=1}^n \frac{q}{p_j}. \qquad \square$$

Лемма 2.4. *Пусть последовательность мультииндексов $\vec{s}_k$ такова, что $(s_k)_j \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ при каждом $j = 1, \dots, n$. Предположим, что функция $u \in L_{\vec{s}_k}(\Omega)$ и $\|u\|_{L_{\vec{s}_k}(\Omega)} \leqslant M$ при всех k. Тогда $u \in L_\infty(\Omega)$ и $\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant M$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ множество

$$\{x \in \Omega : |u(x)| > M + \varepsilon\}$$

имеет положительную меру. По теореме Фубини найдется такое положительное δ, что

$$\mathrm{mes}\,\{x_n : \mathrm{mes}\,\{\dots\mathrm{mes}\,\{x_2 : \mathrm{mes}\,\{x_1 : |u(x)| > M+\varepsilon\} > \delta\} > \delta \dots\} > \delta\} > \delta.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{L_{\vec{s}_k}(\Omega)} \geqslant (M+\varepsilon)\,\delta^{\sum_{j=1}^n \frac{1}{(s_k)_j}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M+\varepsilon.$$

Мы пришли к противоречию. $\square$

Анизотропное пространство Соболева $W^l_{\vec{p}}(\Omega)$ определяется аналогично обычному пространству Соболева, но все нормы всех производных берутся в $L_{\vec{p}}(\Omega)$. Имеет место следующая теорема вложения.

Теорема 2.5 ([1], Теорема 10.2, Теорема 26.3.5 и замечание после нее)**.** *Пусть* Ω *— ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. Пусть мультииндексы* $\vec{p}$ *и* $\vec{q}$ *таковы, что* $q_j \geqslant p_j$*. Обозначим*

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right).$$

Если $\varkappa = 1$ *и* $1 < p_n < q_n < \infty$*, то пространство* $W^1_{\vec{p}}(\Omega)$ *непрерывно вкладывается в* $L_{\vec{q}}(\Omega)$*. Если* $\varkappa < 1$*, то это вложение компактно.*

Нам будут нужны следующие частные случаи этой теоремы.

Теорема 2.6. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса,* $n \geqslant 3$*. Пусть*

$$p > \frac{n-1}{2}, \qquad \chi := \frac{n+p'-1}{(n-2)p'},$$

где p' *– сопряженный показатель к* p *(отметим, что* $\chi > 1$*). Тогда вложение*

$$W^1_2(\Omega) \subset L_{(2\chi, 2\chi p', \dots, 2\chi p')}(\Omega) \quad \textit{непрерывно},$$

а вложение

$$W^1_2(\Omega) \subset L_{(2, 2p', \dots, 2p')}(\Omega) \quad \textit{компактно}. \tag{2.1}$$

§3. Случай гладкого решения

В этом параграфе мы докажем оценку для L_∞-нормы гладкого решения. Мы используем технику Мозеровских итераций, введенную в [5].

Теорема 3.1. *Пусть* $n \geqslant 3$*,* $p > \frac{n-1}{2}$*,* $a \in L_p(B'_{3/4})$*. Пусть* $u \in C^\infty(\overline{Q_{3/4}})$ *является решением уравнения* (0.2)*. Тогда*

$$\|u\|_{L_\infty(Q_{1/2})} \leqslant C \left(1 + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right)^\mu \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{3/4})}$$

для некоторых C *и* μ*, зависящих только от* n *и* p*.*

Замечание 3.2. Можно доказать неравенство для любых двух цилиндров Q_r и Q_R при $R > r > 0$. Для дальнейшего нам удобно взять $r = 1/2$ и $R = 3/4$.

Доказательство. Пусть $\beta \geqslant 0$. Пусть $\zeta \in C_0^\infty(Q_{3/4})$. Возьмем в качестве пробной функции $\eta(x) = \zeta^2(x)|u(x)|^\beta u(x)$. Тогда

$$\nabla\eta = 2\zeta\nabla\zeta|u|^\beta u + (\beta+1)\zeta^2|u|^\beta\nabla u.$$

Ясно, что $\eta \in C_0^1(Q_{3/4})$. Подставляя η в тождество (0.3), получим

$$\int\limits_{Q_{3/4}} \left(2\zeta|u|^\beta u\nabla u\cdot\nabla\zeta + (\beta+1)\zeta^2|u|^\beta|\nabla u|^2 + a\zeta^2|u|^\beta u\,\partial_z u\right)dx = 0,$$

откуда

$$\int\limits_{Q_{3/4}} \left(2\zeta|u|^\beta u\nabla u\cdot\nabla\zeta + (\beta+1)\zeta^2|u|^\beta|\nabla u|^2\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\beta+2}\int_{Q_{3/4}} a\zeta^2\partial_z\left(|u|^{\beta+2}\right)dx = \frac{2}{\beta+2}\int_{Q_{3/4}} a\zeta\partial_z\zeta|u|^{\beta+2}dx. \qquad (3.1)$$

Обозначим $w(x) = |u(x)|^{\frac{\beta+2}{2}}$. Тогда

$$\nabla(\zeta w) = |u|^{\frac{\beta+2}{2}}\nabla\zeta + \frac{\beta+2}{2}\zeta|u|^{\frac{\beta-2}{2}}u\nabla u.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{Q_{3/4}} \left|\nabla(\zeta w)\right|^2 dx = \int\limits_{Q_{3/4}} \Bigg(w^2|\nabla\zeta|^2 + (\beta+2)\zeta|u|^\beta u\nabla u\cdot\nabla\zeta$$

$$+ \left(\frac{\beta+2}{2}\right)^2\zeta^2|u|^\beta|\nabla u|^2\Bigg)dx \leqslant \int\limits_{Q_{3/4}} w^2|\nabla\zeta|^2\,dx$$

$$+ \frac{\beta+2}{2}\int\limits_{Q_{3/4}} \left(2\zeta|u|^\beta u\nabla u\cdot\nabla\zeta + (\beta+1)\zeta^2|u|^\beta|\nabla u|^2\right)dx,$$

где мы воспользовались неравенством $\frac{\beta+2}{2} \leqslant \beta+1$. Учитывая (3.1), получаем

$$\int\limits_{Q_{3/4}} |\nabla(\zeta w)|^2\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{3/4}} w^2\left(|\nabla\zeta|^2 + |a|\,|\zeta\partial_z\zeta|\right)dx. \qquad (3.2)$$

Мы доказали (3.2) для любой функции $\zeta \in C_0^\infty(Q_{3/4})$. По непрерывности (3.2) верно и для функций $\zeta \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(Q_{3/4})$ при достаточно большом

q. Пусть $1/2 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 3/4$. Положим $\zeta(x) = \nu(r)\nu(|z|)$, где

$$\nu(r) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant r_1, \\ \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, & \text{при } r_1 < r < r_2, \\ 0, & \text{при } r_2 \leqslant r \leqslant \frac{3}{4}, \end{cases}$$

– непрерывная кусочно линейная функция, не превосходящая единицы. Ясно, что $\zeta \in \mathring{W}^1_q(Q_{3/4})$ с любым q. Подставляя ζ в (3.2), получим

$$\int\limits_{Q_{3/4}} |\nabla(\zeta w)|^2 \, dx \leqslant \frac{2}{(r_2 - r_1)^2} \int\limits_{Q_{r_2}} w^2 \, dx + \frac{1}{r_2 - r_1} \int\limits_{Q_{r_2}} |a| w^2 \, dx.$$

Из теоремы 2.2 с $\vec{p} = (\infty, p, \dots, p)$, $\vec{q} = (1, p', \dots, p')$ вытекает оценка

$$\int\limits_{Q_{r_2}} |a| w^2 \, dx \leqslant \|a\|_{L_p(B'_{3/4})} \|w\|^2_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{r_2})},$$

а из следствия 2.3 – оценка

$$\int\limits_{Q_{r_2}} w^2 \, dx \leqslant c_1 \|w\|^2_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{r_2})}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{Q_{3/4}} |\nabla(\zeta w)|^2 \, dx \leqslant \left(\frac{2c_1}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{\|a\|_{L_p(B'_{3/4})}}{r_2 - r_1} \right) \|w\|^2_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{r_2})}.$$

Отсюда с учетом неравенства Фридрихса вытекает

$$\begin{aligned} \|w\|^2_{W^1_2(Q_{r_1})} \leqslant \|\zeta w\|^2_{W^1_2(Q_{3/4})} &\leqslant c_2 \int\limits_{Q_{3/4}} |\nabla(\zeta w)|^2 \, dx \\ &\leqslant c_3 \left(\frac{1}{r_2 - r_1} + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})} \right)^2 \|w\|^2_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{r_2})}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

По теореме 2.6

$$\|w\|_{L_{(2\chi,2\chi p',\dots,2\chi p')}(Q_R)} \leqslant c_4 \|w\|_{W^1_2(Q_R)}, \tag{3.4}$$

где, напомним, $\chi = \frac{n+p'-1}{(n-2)p'}$. Константу c_4 можно выбрать не зависящей от $R \in [1/2, 3/4]$, так как при замене $x \mapsto Rx$ нормы $\|w\|_{L_{(2\chi,2\chi p',\dots,2\chi p')}}$ и

$\|\nabla w\|_{L_2}$ умножаются на $R^{1-n/2}$, а норма $\|w\|_{L_2}$ умножается на $R^{-n/2}$. Теперь из (3.3) и (3.4) вытекает

$$\|w\|_{L_{(2\chi,2\chi p',\dots,2\chi p')}(Q_{r_1})} \leqslant c_5 \left(\frac{1}{r_2-r_1} + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right) \|w\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{r_2})}.$$

Обозначим $\gamma = \beta + 2$. Возводя последнее неравенство в степень $2/\gamma$ и учитывая, что $w = |u|^{\gamma/2}$, получим

$$\|u\|_{L_{(\gamma\chi,\gamma\chi p',\dots,\gamma\chi p')}(Q_{r_1})} \leqslant c_5^{2/\gamma} \left(\frac{1}{r_2-r_1} + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right)^{2/\gamma} \|u\|_{L_{(\gamma,\gamma p',\dots,\gamma p')}(Q_{r_2})}.$$

Подставим в это неравенство

$$\gamma = 2\chi^{m-1}, \quad r_1 = R_{m+1}, \quad r_2 = R_m, \quad \text{где} \quad R_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Получим

$$\|u\|_{L_{\vec{s}_m}(Q_{R_{m+1}})} \leqslant \left(c_5 \left(2^{m+2} + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right)\right)^{\chi^{1-m}} \|u\|_{L_{\vec{s}_{m-1}}(Q_{R_m})},$$

где $\vec{s}_m = (2\chi^m, 2\chi^m p', \dots, 2\chi^m p')$. Перемножение таких неравенств при $m = 1, 2, \dots, M$ даст

$$\|u\|_{L_{\vec{s}_M}(Q_{1/2})} \leqslant \|u\|_{L_{\vec{s}_M}(Q_{R_{M+1}})} \leqslant \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{3/4})} \prod_{m=1}^{M} \left(c_5 \left(2^{m+2} + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right)\right)^{\chi^{1-m}}.$$

Далее,

$$2^{m+2} + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})} \leqslant 2^{m+2} \left(1 + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right),$$

поэтому

$$\prod_{m=1}^{M} \left(c_5 \left(2^{m+2} + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right)\right)^{\chi^{1-m}} \leqslant \prod_{m=1}^{\infty} c_5^{\chi^{1-m}} \left(1 + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right)^{\chi^{1-m}} 2^{(m+2)\chi^{1-m}} = C\left(1 + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right)^{\mu},$$

так как $\chi > 1$ и ряды

$$\mu := \sum_{m=1}^{\infty} \chi^{1-m} = \frac{\chi}{\chi - 1} \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} m\chi^{1-m}$$

сходятся. Тем самым,

$$\|u\|_{L_{\vec{s}_M}(Q_{1/2})} \leqslant C \left(1 + \|a\|_{L_p(B'_{3/4})}\right)^{\mu} \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{3/4})}$$

для любого M. Теперь утверждение вытекает из леммы 2.4. $\square$

§4. Случай слабого решения

В целом мы следуем подходу [3]. В частности, мы воспользуемся следующим результатом.

Теорема 4.1 ([3], Theorem 3.1)**.** *Пусть* $n \geqslant 3$, $b \in L_2(\Omega)$, $\operatorname{div} b = 0$, $f \in W_2^{-1}(\Omega)$, *и пусть* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *– решение* (0.1)*. Предположим, что задана последовательность* $b_k \in L_n(\Omega)$, $\operatorname{div} b_k = 0$, *сходящаяся к* b *в* $L_2(\Omega)$*. Пусть* $u_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *– единственное слабое решение краевой задачи*

$$\begin{cases} -\Delta u_k + b_k \cdot \nabla u_k = f, \\ u_k\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}.$$

Тогда $u_k \to u$ *слабо в* $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство теоремы 0.1. Пусть $\eta \in C_0^\infty(Q_1)$, $\eta|_{Q_{5/6}} \equiv 1$. Функция $v = \eta u$ является решением задачи

$$\begin{cases} -\Delta v(z,x') + a(x')\partial_z v(z,x') = g(z,x') \\ \quad v\big|_{\partial Q_1} = 0, \end{cases}.$$

где

$$g = -u\Delta\eta - 2\nabla\eta \cdot \nabla u + au\partial_z\eta.$$

Первые два слагаемые в этом выражении принадлежат $L_2(Q_1)$. Из (2.1) и анизотропного неравенства Гельдера вытекает оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_1} a\partial_z\eta uh dx \right| &\leqslant \|\partial_z\eta\|_{L_\infty} \|a\|_{L_p} \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}} \|h\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}} \\ &\leqslant C\|u\|_{W_2^1(Q_1)} \|h\|_{W_2^1(Q_1)} \qquad \forall\ h \in W_2^1(Q_1), \end{aligned}$$

следовательно, $au\partial_z\eta \in W_2^{-1}(Q_1)$ и $g \in W_2^{-1}(Q_1)$.

Возьмём теперь такую последовательность $a_k \in C^\infty\big(\bar{B}_1'\big)$, что $a_k \to a$ в $L_p(B_1')$. Обозначим через $v_k \in \mathring{W}_2^1(Q_1)$ решения краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta v_k(z,x') + a_k(x')\partial_z v_k(z,x') = g(z,x'), \\ \quad v_k\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}.$$

По теореме 4.1 $v_k \to v$ слабо в $W_2^1(Q_1)$. По теореме 2.6 существует подпоследовательность, сходящаяся в $L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_1)$ сильно; из нее, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти везде. Поэтому без ограничения общности будем считать, что

$$\|v_k - v\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_1)} \to 0 \quad \text{и} \quad v_k(x) \to v(x) \quad \text{п.в.}$$

По построению $g \equiv 0$ в $Q_{5/6}$. Из эллиптической теории вытекает (см., например, [4]), что $v_k \in C^\infty(\overline{Q_{3/4}})$. По теореме 3.1

$$\|v_k\|_{L_\infty(Q_{1/2})} \leqslant C\left(1 + \|a_k\|_{L_p(B_{3/4}')}\right)^\mu \|v_k\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{3/4})}.$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$, получаем

$$\|v\|_{L_\infty(Q_{1/2})} \leqslant C\left(1 + \|a\|_{L_p(B_{3/4}')}\right)^\mu \|v\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{3/4})}.$$

По построению $v \equiv u$ в $Q_{5/6}$, поэтому

$$\|u\|_{L_\infty(Q_{1/2})} \leqslant C\left(1 + \|a\|_{L_p(B_1')}\right)^\mu \|u\|_{L_{(2,2p',\dots,2p')}(Q_{3/4})}.$$

Снова применяя теорему 2.6, получаем утверждение. □

Список литературы

1. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, М., Наука, 1996.
2. N. Filonov, *On the regularity of solutions to the equation* $-\Delta u + b\cdot\nabla u = 0$. — Zap. Nauch. Sem. POMI **410** (2013), 168–186.
3. N. Filonov, T. Shilkin, *On some properties of weak solutions to elliptic equations with divergence-free drifts.* — Contemporary Math. **710** (2018), 105–120.
4. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М., Наука, 1973.
5. J. Moser, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.* — Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 457–468.
6. А. И. Назаров, Н. Н. Уральцева, *Неравенство Гарнака и связанные с ним свойства решений эллиптических и параболических уравнений с бездивергентными младшими коэффициентами.* — Алгебра и анализ **23**, No. 1 (2011) 136–168.
7. G. Seregin, L. Silvestre, V. Šverák, A. Zlatoš, *On divergence-free drifts.* — J. Differential Equations **252**, No. 1 (2012), 505–540.

8. Qi S. Zhang, *A strong regularity result for parabolic equations.* — Comm. Math. Phys. **244**, No. 2 (2004), 245–260.
9. В. В. Жиков, *Замечания о единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами.* — Функц. анализ и его прил. **38**, No. 3 (2004), 15–28.

Filonov N. D.б, Hodunov P. A. On the local boundedness of solutions to the equation $-\Delta u + a\partial_z u = 0$.

Equation $-\Delta u + a\partial_z u = 0$ is considered in a domain in n-dimensional space. The coefficient in a minor term does not depend on the direction of differentiation in this term. For $a \in L_p$ with $p > \frac{n-1}{2}$ it is proven that a solution u is locally bounded. If $p = \frac{n-1}{2}$ then a solution can be unbounded.

Поступило 23 сентября 2021 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7-9, 199034 С.-Петербург
E-mail: filonov@pdmi.ras.ru

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: pkhodun@gmail.com