Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 508, 2021 г.

В. Г. Осмоловский

ОДНОМЕРАЯ ЗАДАЧА О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ НЕПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

§1. Введение

1. Постанова задачи [1]. Задача о равновесии двухфазовой среды в одномерном модельном случае сводится к минимизации функционала энергии

$$
\begin{gathered}
I_\tau[u,\chi,t] = I_0[u,\chi,t] + \int\limits_0^l \tau(x)\chi(x)\,dx, \\
I_0[u,\chi,t] = \int\limits_0^l \{\chi(x)(F^+(u'(x)) + t) + (1-\chi(x))F^-(u'(x))\}\,dx,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

в котором плотности энергии каждой из фаз $F^\pm(z)$ определяются равенствами

$$
F^\pm(z) = a_\pm(z-c_\pm)^2, \quad a_\pm, c_\pm, z \in \mathbb{R}, \quad a_\pm > 0, \quad a_+c_+ \neq a_-c_-, \tag{1.2}
$$

допустимые поля смещений $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$, а заведующие распределением фаз на интервале $(0,l)$ характеристические функции $\chi(x)$ считаются измеримыми (совокупность всех таких функций обозначим через $\mathbb{Z}'$). Заданная функция $t+\tau(x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in (0,l)$ интерпретируется как как температура. Будем считать, что

$$
0 \neq \tau(\,\cdot\,) \in L_1(0,l), \quad \int\limits_0^l \tau(x)\,dx = 0 \tag{1.3}
$$

Ключевые слова: невыпуклые вариационные задачи, фазовые переходы, свободные поверхности.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант No. 20-01-00630 А.

и, кроме того

$$\begin{aligned}
&\text{функция } |E_\sigma| \text{ непрерывна и строго монотонно возрастает}\\
&\qquad\qquad \text{по } \sigma\in[-\tau_-,\tau_+],\\
&E_\sigma=\{x\in(0,l):\,\tau(x)\leqslant\sigma\},\quad -\tau_-=\operatorname{esinf}\tau(x),\\
&\tau_+=\operatorname{essup}\tau(x),\quad \tau_\pm\in(0,\infty]
\end{aligned}\tag{1.4}$$

(здесь и далее модуль множества означает его меру Лебега).

Под состоянием равновесия будем понимать решение следующей вариационной задачи

$$I_\tau[\hat u_{\tau,t},\hat\chi_{\tau,t},t]=\inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'}I_\tau[u,\chi,t],\quad \hat u_{\tau,t}\in\mathbb{X},\quad \hat\chi_{\tau,t}\in\mathbb{Z}'.\tag{1.5}$$

Состояние равновесия назовём однофазовым, если $\hat\chi_{\tau,t}(x)\equiv 0$ или $\hat\chi_{\tau,t}(x)\equiv 1$ и двухфазовым в противном случае. Легко видеть, что для однофазового состояния равновесия $\hat u_{\tau,t}$, $\hat\chi_{\tau,t}$ функция $\hat u_{\tau,t}(x)\equiv 0$.

Целью данной работы является доказательство однозначной разрешимости задачи (1.5) и обоснование ряда свойств её решений.

Новым моментом в проводимом исследовании является предположение о наличии в функционале энергии слагаемого с непостоянной функции $\tau(x)$. Это добавку можно рассматривать как возмущение хорошо изученной одномерной задачи о фазовых переходах с постоянной температурой [2].

2. Вспомогательные утверждения. Предварительное приведение вспомогательных фактов позволит облегчить формулировку основных утверждений этой работы.

(1). *Задача* (1.5) *с* $\tau(x)\equiv 0$ [2]. Для функций $u\in\mathbb{X}$, $\chi\in\mathbb{Z}'$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&I_0[u,\chi,t]=\tilde I_0[u,\chi,t],\\
&\tilde I_0[u,\chi,t]=\int_0^l\big(a_+\chi(x)+a_-(1-\chi(x))\big)\big(u'(x)-\alpha(Q)(\chi(x)-Q)\big)^2\,dx\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + lG(Q,t),\\
&G(Q,t)=(t-t^*)Q+a_-c_-^2+g(Q),\\
&\qquad Q=\frac1l\int_0^l\chi(x)\,dx,
\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\alpha(Q) = \frac{[ac]}{a_- Q + a_+(1-Q)}, \quad g(Q) = -\frac{[ac]^2 Q(1-Q)}{a_- Q + a_+(1-Q)},$$
$$t^* = -[ac^2] = -(a_+ c_+^2 - a_- c_-^2), \quad [ac] = a_+ c_+ - a_- c_-.$$

Заметим, что первое равенство (1.6) не гарантировано для нехарактеристических функций χ. Функция $G(.,t)$ бесконечно дифференцируема по $Q \in [0,1]$ и в силу (1.2) строго выпукла, поскольку

$$g''(Q) = \frac{2[ac]^2 a_+ a_-}{(a_- Q + a_+(1-Q))^3}. \tag{1.7}$$

Благодаря представлению (1.6) вариационная задача

$$I_0[\hat{u}_t, \hat{\chi}_t, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t], \quad \hat{u}_t \in \mathbb{X}, \quad \hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}' \tag{1.8}$$

решается явно. Сначала нужно минимизировать на интервале $[0,1]$ функцию $G(\,\cdot\,, t)$

$$G(\hat{Q}(t), t) = \min_{Q \in [0,1]} G(Q, t), \quad \hat{Q}(t) \in [0,1]. \tag{1.9}$$

Затем по $\hat{Q}(t)$ вычислить $\hat{u}_t$, исходя из равенства

$$\hat{u}_t'(x) = \alpha(\hat{Q}(t))(\hat{\chi}_t(x) - \hat{Q}(t)) \tag{1.10}$$

с любой функцией $\hat{\chi}_t(x)$, для которой

$$\frac{1}{l}\int_0^l \hat{\chi}_t(x)\,dx = \hat{Q}(t). \tag{1.11}$$

Величина (1.11) интерпретируется как равновесная объёмная доля фазы с индексом $+$.

Для каждого $t \in \mathbb{R}$ решение задачи (1.9) также находится явно, что позволяет сформулировать свойства функции $\hat{Q}(t)$

$$\begin{gathered} \text{функция } \hat{Q}(t) \text{ однозначна, } \hat{Q}(\,\cdot\,) \in C(\mathbb{R}),\ \hat{Q}(\,\cdot\,) \in C^\infty[t_-, t_+], \\ t_\pm = t^* \pm \frac{[ac]^2}{a_\pm}, \quad t_- < t^* < t_+, \\ \hat{Q}(t) = 1, \quad t \leqslant t_-, \quad \hat{Q}(t) = 0, \quad t \geqslant t_+, \\ \hat{Q}(t) \in (0,1), \quad t \in (t_-, t_+). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Числа $t_\pm$ называются температурами фазовых переходов, неравенство для них является следствием (1.2). Из (1.12) вытекает, что при

$t \leqslant t_-$ и $t \geqslant t_+$ состояния равновесия однофазовые (с $\hat{\chi}_t(x) \equiv 1$ в первом случае и $\hat{\chi}_t(x) \equiv 0$ — во втором), а при $t \in (t_-, t_+)$ каждое состояние равновесия двухфазовое. Заметим, что для каждого $t \in (t_-, t_+)$ существует бесконечно много различных состояний равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$, но объёмная доля (1.11) является однозначной функцией температуры.

Определим равновесную энергию $i(t)$ для функционала $I_0[u, \chi, t]$ равенством

$$i(t) = \frac{1}{l} \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t]. \tag{1.13}$$

Очевидно, что

$$i(t) = \min_{Q \in [0,1]} G(Q, t) = G(\hat{Q}(t), t). \tag{1.14}$$

Положим

$$i_{\min} = \min\{G(0,t), G(1,t)\} = \begin{cases} (t - t^*) + a_- c_-^2, & t \leqslant t^* \\ a_- c_-^2, & t \geqslant t^*. \end{cases} \tag{1.15}$$

Тогда

$$i(t) = i_{\min}(t), \quad t \notin (t_-, t_+), \quad i(t) < i_{\min}(t), \quad t \in (t_-, t_+). \tag{1.16}$$

(2). *Принцип наполняющейся ванны* [3], 1.14. Введём множества

$$\mathbb{Z}'' = \{\chi(\,\cdot\,) \in L_\infty(0, l) : \ 0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1 \quad \text{почти всюду на} \quad (0, l)\},$$
$$\mathbb{Z}''_Q = \{\chi(.) \in \mathbb{Z}'' : \ \frac{1}{l} \int_0^l \chi(x)\, dx = Q \in [0, 1]\}. \tag{1.17}$$

При фиксированном Q для функционала

$$\tau[\chi] = \frac{1}{l} \int_0^l \tau(x) \chi(x)\, dx, \quad \chi \in \mathbb{Z}''_Q \tag{1.18}$$

рассмотрим вариационную задачу

$$\tau[\tilde{\chi}] = \inf_{\chi \in \mathbb{Z}''_Q} \tau[\chi], \quad \tilde{\chi} \in \mathbb{Z}''_Q. \tag{1.19}$$

Утверждается, что при выполнении условий (1.3), (1.4) задача (1.19) однозначно разрешима, её решение $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$ и совпадает с характеристической функцией множества E_σ с единственным $\sigma = \sigma(Q)$, определяемым равенством $|E_{\sigma(Q)}| = lQ$. Благодаря (1.4) функция $\sigma(Q)$

непрерывна и строго монотонно возрастает. Очевидно, что

$$\tau[\tilde\chi] = \frac{1}{l}\int\limits_{E_{\sigma(Q)}} \tau(x)\,dx, \qquad \tau[\tilde\chi] < 0,$$
$$Q \in (0,1), \qquad \tau[\tilde\chi] = 0, \quad Q = 0, \quad Q = 1. \tag{1.20}$$

3. Формулировка результатов. Мы будем использовать введённые в предыдущих разделах параграфа обозначения и предполагать выполненными условия (1.2), (1.3), (1.4).

Теорема. (1). *Для каждого $t \in \mathbb{R}$ задача* (1.5) *однозначно разрешима.*

(2). *Объёмная доля равновесной фазы*

$$\hat Q_\tau(t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \hat\chi_{\tau,t}(x)\,dx \tag{1.21}$$

непрерывно по t и монотонно убывает.

(3). *Равновесная энергия*

$$i_\tau(t) = \frac{1}{l}\inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_\tau[u,\chi,t] \tag{1.22}$$

как функция аргумента t непрерывно дифференцируема, вогнута и для неё справедливы соотношения

$$i_\tau(t) \leqslant i(t), \quad |i_\tau(t) - i(t)| \leqslant l^{-1}\|\tau\|_{L_1(0,l)}, \quad i'_\tau(t) = \hat Q_\tau(t). \tag{1.23}$$

(4). *Для функции $\hat Q_\tau(t)$ выполняются равенства*

$$\lim_{t\to\infty}\hat Q_\tau(t) = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty}\hat Q_\tau(t) = 1. \tag{1.24}$$

(5). *В случае конечности величин $\tau_\pm$ существуют такие температуры $t^\pm_\tau$ (температуры фазовых переходов)*

$$t_- - \tau_+ \leqslant t^-_\tau \leqslant t_-, \quad t_+ \leqslant t^+_\tau \leqslant t_+ + \tau_-, \tag{1.25}$$

что при $t \leqslant t^-_\tau$ единственным состоянием равновесия является пара $\hat u_{\tau,t}(x) \equiv 0$, $\hat\chi_{\tau,t}(x) \equiv 1$, при $t \geqslant t^+_\tau$ — пара $\hat u_{\tau,t}(x) \equiv 0$, $\hat\chi_{\tau,t}(x) \equiv 0$, а при $t \in (t^-_\tau, t^+_\tau)$ реализуется лишь двухфазовое состояние равновесия.

4. Замечания. 1. Наличие удовлетворяющего условиям (1.3), (1.4) неоднородного поля температур является стабилизирующим фактором, обеспечивающим единственность решения задачи (1.5), чего нет для задачи (1.8).

2. Для изотропных двухфазовых сред в многомерном случае есть [4] аналог представления (1.6), что позволяет перенести утверждения теоремы для этих сред на многомерный сферически симметричный случай.

3. Аналогичная задача с другими граничными условиями была рассмотрена в [5].

§2. Доказательство теоремы

(1). *Однозначная разрешимость задачи* (1.5). Пользуясь представлением (1.6) для функционала I_0, запишем функционал (1.1) в виде

$$
\begin{gathered}
I_\tau[u,\chi,t] = \tilde{I}_\tau[u,\chi,t], \\
\tilde{I}_\tau[u,\chi,t] = \int\limits_0^l \big(a_+\chi(x)+a_-(1-\chi(x))\big)\big(u'(x)-\alpha(Q)(\chi(x)-Q)\big)^2\,dx \\
+lG(Q,t)+\int\limits_0^l \tau(x)\chi(x)\,dx.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Напомним, что первое равенство (2.1) гарантировано только для функций $\chi \in \mathbb{Z}'$.

Рассмотрим $\tilde{I}_\tau[u,\chi,t]$ как самостоятельный функционал на более широкой области определения $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}''$ и сформулируем для него вариационную задачу

$$
\tilde{I}_\tau[\hat{u}_{\tau,t},\hat{\chi}_{\tau,t},t] = \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}''} \tilde{I}_\tau[u,\chi,t], \quad \hat{u}_{\tau,t}\in\mathbb{X}, \quad \hat{\chi}_{\tau,t}\in\mathbb{Z}''. \tag{2.2}
$$

Очевидно, что (2.2) сводится к задаче

$$
\begin{gathered}
J_\tau[\hat\chi_{\tau,t}, t] = \inf_{\chi\in\mathbb{Z}''} J_\tau[\chi, t], \quad \hat\chi_{\tau,t} \in \mathbb{Z}'', \\
J_\tau[\chi, t] = G(Q, t) + \frac{1}{l}\int\limits_0^l \tau(x)\chi(x)\,dx, \\
\chi \in \mathbb{Z}'', \quad Q = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \chi(x)\,dx.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

При её разрешимости функция $\hat u_{\tau,t}$ однозначно восстанавливается с помощью равенства

$$
\hat u'_{\tau,t}(x) = \alpha(\hat Q_\tau(t))(\hat\chi_{\tau,t}(x) - \hat Q_\tau(t)), \quad \hat Q_\tau(t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \hat\chi_{\tau,t}(x)\,dx. \tag{2.4}
$$

Поскольку $\mathbb{Z}' \subset \mathbb{Z}''$ для доказательства однозначной разрешимости (1.5) достаточно установить, что задача (2.3) однозначно разрешима, а её решение $\hat\chi_{\tau,t}$ принадлежит множеству $\mathbb{Z}'$.

Так как множество $\mathbb{Z}''$ компактно относительно $*$-слабой сходимости, а функционал $J_\tau[.,t]$ на нём $*$-слабо непрерывен, разрешимость задачи (2.3) очевидна. Благодаря выпуклости множества $\mathbb{Z}''$ необходимое условие минимума записывается в виде вариационного неравенства

$$
\frac{d}{ds} J_\tau[(1-s)\hat\chi_{\tau,t} + s\chi, t]|_{s=0} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \chi \in \mathbb{Z}''.
$$

Вычисление его левой части приводит к соотношению

$$
\int\limits_0^l \big(g'(\hat Q_\tau(t)) + (t - t^*) + \tau(x)\big)\big(\chi(x) - \hat\chi_{\tau,t}(x)\big)\,dx \geqslant 0, \quad \chi \in \mathbb{Z}''. \tag{2.5}
$$

Для доказательства однозначной разрешимости (2.3) предварительно установим однозначность функции $\hat Q_\tau(t)$. Пусть $\hat\chi^{(1)}_{\tau,t}$, $\hat\chi^{(2)}_{\tau,t}$ — два решения задачи (2.3) с некоторым t. Запишем неравенство (2.5) для $\hat\chi^{(1)}_{\tau,t}$ с $\chi = \hat\chi^{(2)}_{\tau,t}$ и для $\hat\chi^{(2)}_{\tau,t}$ с $\chi = \hat\chi^{(1)}_{\tau,t}$. Сложение полученных результатов даёт

$$\big(g'(\hat{Q}_\tau^{(1)}(t)) - g'(\hat{Q}_\tau^{(2)}(t))\big)\big(\hat{Q}_\tau^{(1)}(t) - \hat{Q}_\tau^{(2)}(t)\big) \leqslant 0,$$

$$\hat{Q}_\tau^{(1)}(t) = \frac{1}{l}\int_0^l \hat{\chi}_{\tau,t}^{(1)}(x)\,dx, \quad \hat{Q}_\tau^{(2)}(t) = \frac{1}{l}\int_0^l \hat{\chi}_{\tau,t}^{(2)}(x)\,dx.$$

Учитывая строгую выпуклость функции $g(Q)$ и последнее неравенство, приходим к совпадению величин $\hat{Q}_\tau^{(1)}(t)$ и $\hat{Q}_\tau^{(2)}(t)$.

Вернёмся к задаче (2.3). Поскольку

$$J_\tau[\hat{\chi}_{\tau,t}, t] = \inf_{\chi \in \mathbb{Z}''_{\hat{Q}_\tau(t)}} J_\tau[\chi, t] = G(\hat{Q}_\tau(t)) + \inf_{\chi \in \mathbb{Z}''_{\hat{Q}_\tau(t)}} \frac{1}{l}\int_0^l \tau(x)\chi(x)\,dx, \quad (2.6)$$

множества решений задач (2.3) и

$$\tau[\hat{\chi}_{\tau,t}] = \inf_{\chi \in \mathbb{Z}''_{\hat{Q}_\tau(t)}} \tau[\chi], \quad \hat{\chi}_{\tau,t} \in \mathbb{Z}''_{\hat{Q}_\tau(t)} \quad (2.7)$$

совпадают. Поэтому задача (2.3) однозначно разрешима и её решение $\hat{\chi}_{\tau,t} \in \mathbb{Z}'$.

(2). *Монотонность и непрерывность функции* $\hat{Q}_\tau(.)$. Пусть $\hat{\chi}_{\tau,t_1}$, $\hat{\chi}_{\tau,t_2}$ — решения задачи (2.3) с $t = t_1$ и $t = t_2$. Запишем неравенство (2.5) для $t = t_1$ с $\chi = \hat{\chi}_{\tau,t_2}$ и $t = t_2$ с $\chi = \hat{\chi}_{\tau,t_1}$. Сложение полученных соотношений даёт

$$\big(g'(\hat{Q}_\tau(t_2)) - g'(\hat{Q}_\tau(t_1))\big)\big(\hat{Q}_\tau(t_2) - \hat{Q}_\tau(t_1)\big) \leqslant (t_1 - t_2)\big(\hat{Q}_\tau(t_2) - \hat{Q}_\tau(t_1)\big).$$

Тогда в силу (1.7)

$$\big(\hat{Q}_\tau(t_2) - \hat{Q}_\tau(t_1)\big)^2 \leqslant \frac{(\max\{a_+, a_-\})^3}{2[ac]^2 a_+ a_-}(t_1 - t_2)\big(\hat{Q}_\tau(t_2) - \hat{Q}_\tau(t_1)\big). \quad (2.8)$$

Из (2.8) вытекает монотонное убывание функции $\hat{Q}_\tau(.)$ и справедливость оценки

$$|\hat{Q}_\tau(t_2) - \hat{Q}_\tau(t_1)| \leqslant \frac{(\max\{a_+, a_-\})^3}{2[ac]^2 a_+ a_-}|t_2 - t_1|, \quad (2.9)$$

влекущей за собой непрерывность этой функции.

(3). *Свойства равновесной энергии* $i_\tau(t)$. Поскольку для каждого t задачи (1.5) и (2.2) однозначно разрешимы и их решения совпадают, имеем

$$
\begin{aligned}
i_\tau(t) &= \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} l^{-1} I_\tau[u,\chi,t] = \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}''} l^{-1}\tilde{I}_\tau[u,\chi,t] \\
&= \inf_{Q\in[0,1]} \inf_{\chi\in\mathbb{Z}''_Q} \big((t-t^*)Q + a_-c_-^2 + g(Q) + \tau[\chi]\big) \\
&= \inf_{Q\in[0,1]} \big((t-t^*)Q + a_-c_-^2 + g(Q) + T(Q)\big), \quad T(Q) = \inf_{\chi\in\mathbb{Z}''_Q} \tau[\chi].
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Так как $T(Q) \leqslant 0$ для всех $Q\in[0,1]$, получаем первое неравенство (1.23)

$$
i_\tau(t) \leqslant \inf_{Q\in[0,1]} \big((t-t^*)Q + a_-c_-^2 + g(Q)\big) = i(t).
$$

Так как $|T(Q)| \leqslant l^{-1}\|\tau\|_{L_1(0,l)}$, из неравенств

$$
\begin{aligned}
&(t-t^*)Q + a_-c_-^2 + g(Q) - l^{-1}\|\tau\|_{L_1(0,l)} \\
&\quad\leqslant (t-t^*)Q + a_-c_-^2 + g(Q) + T(Q) \\
&\quad\leqslant (t-t^*)Q + a_-c_-^2 + g(Q) + l^{-1}\|\tau\|_{L_1(0,l)}
\end{aligned}
$$

вытекает вторая оценка (1.23). В частности, функция $i_\tau(.)$ локально ограничена. В силу (2.10) равновесная энергия $i_\tau(.)$ является инфимумом по параметру $Q\in[0,1]$ семейства линейных функций. Поэтому она вогнута.

Из вогнутости и локальной ограниченности функции $i_\tau(\,\cdot\,)$ следует существование такого множества $\mathcal{L}\subset\mathbb{R}$, что $\mathbb{R}\setminus\mathcal{L}$ не более чем счётно, и $i_\tau(\,\cdot\,)$ имеет конечную классическую производную $i'_\tau(t)$ для каждого $t\in\mathcal{L}$. При $t\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{L}$ у функции $i_\tau(\,\cdot\,)$ существуют односторонние производные $i'_\tau(t-0) > i'_\tau(t+0)$. Кроме того

$$
\begin{gathered}
\lim_{\substack{t_n\in\mathcal{L},\\ t_n>t,\\ t_n\to t}} i'_\tau(t_n) = i'_\tau(t+0), \quad \lim_{\substack{t_n\in\mathcal{L},\\ t_n<t,\\ t_n\to t}} i'_\tau(t_n) = i'_\tau(t-0) \quad \text{при} \quad t\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{L}, \\
\lim_{\substack{t_n\in\mathcal{L},\\ t_n\to t}} i'_\tau(t_n) = i'_\tau(t) \quad \text{при} \quad t\in\mathcal{L},
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Очевидно, что равенство $\mathcal{L}=\mathbb{R}$ эквивалентно непрерывной дифференцируемости функции $i_\tau(\,\cdot\,)$. Доказательство этих свойств содержится, например, в [6].

Заметим, что для всех $t, t_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} li_\tau(t) &\leqslant I_\tau[\hat{u}_{\tau,t_0}, \hat{\chi}_{\tau,t_0}, t] \\ &= I_\tau[\hat{u}_{\tau,t_0}, \hat{\chi}_{\tau,t_0}, t_0] + (t-t_0)\int\limits_0^l \hat{\chi}_{\tau,t_0}\,dx \\ &= li_\tau(t_0) + l(t-t_0)\hat{Q}_\tau(t_0). \end{aligned}$$

Таким образом, $i_\tau(t) - i_\tau(t_0) \leqslant (t-t_0)\hat{Q}(t_0)$. Следовательно,

$$\frac{i_\tau(t) - i_\tau(t_0)}{t-t_0} \leqslant \hat{Q}_\tau(t_0), \quad t > t_0, \qquad \frac{i_\tau(t) - i_\tau(t_0)}{t-t_0} \geqslant \hat{Q}_\tau(t_0), \quad t < t_0.$$

Тогда $i'_\tau(t_0+0) \leqslant \hat{Q}_\tau(t_0)$, $i'_\tau(t_0-0) \geqslant \hat{Q}_\tau(t_0)$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}$. Поэтому $i'_\tau(t_0) = \hat{Q}_\tau(t_0)$ для каждого $t_0 \in \mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{L} \neq \mathbb{R}$ и $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{L}$. В силу непрерывности функции $\hat{Q}_\tau(\,\cdot\,)$ и (2.11)

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\tau(t_0) &= \lim_{\substack{t_n \in \mathcal{L},\\ t_n > t_0,\\ t_n \to t_0}} i'_\tau(t_n) = i'_\tau(t_0+0), \\ \hat{Q}_\tau(t_0) &= \lim_{\substack{t_n \in \mathcal{L},\\ t_n < t_0,\\ t_n \to t_0}} i'_\tau(t_n) = i'_\tau(t_0-0). \end{aligned}$$

Поэтому существует производная $i'_\tau(t_0) = \hat{Q}_\tau(t_0)$, что противоречит предположению $\mathcal{L} \neq \mathbb{R}$. Таким образом, функция $i_\tau(\,\cdot\,)$ непрерывно дифференцируема и $i'_\tau(t) = \hat{Q}_\tau(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

(4). *Предельные соотношения для функции* $\hat{Q}_\tau(\,\cdot\,)$. Поскольку

$$\begin{aligned} &i_\tau(t) = (t-t^*)\hat{Q}_\tau(t) + a_- c_-^2 + g(\hat{Q}_\tau(t)) + T(\hat{Q}_\tau(t)), \\ &|T(\hat{Q}_\tau(t))| \leqslant l^{-1}\|\tau\|_{L_1(0,l)}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

выполняется равенство

$$(t-t^*)\hat{Q}_\tau(t) + a_- c_-^2 - i(t) = (i_\tau(t) - i(t)) - g(\hat{Q}_\tau(t)) - T(\hat{Q}_\tau(t)).$$

Учитывая (1.23), получаем

$$|(t-t^*)\hat{Q}_\tau(t) + a_- c_-^2 - i(t)| \leqslant 2l^{-1}\|\tau\|_{L_1(0,l)} + \frac{[ac]^2}{4\min\{a_+, a_-\}}.$$

Так как $i(t) = i_{\min}(t)$ при $t \notin (t_-, t_+)$, с помощью (1.15) имеем

$$1 - \hat{Q}_\tau(t) \leqslant \frac{C}{t^* - t}, \ \ t \leqslant t_-, \quad \hat{Q}_\tau(t) \leqslant \frac{C}{t - t^*}, \ \ t \geqslant t_+, \quad 0 < C \neq C(t),$$

что приводит к справедливости (1.24).

(5). *Температуры фазовых переходов* $t_\tau^\pm$. Пусть величина τ_- конечна. Учитывая (2.12) и очевидную оценку $T(\hat{Q}_\tau(t)) \geqslant -\tau_- \hat{Q}_\tau(t)$, получаем

$$\begin{aligned} i_\tau(t) &\geqslant (t - \tau_- - t^*)\hat{Q}_\tau(t) + a_- c_-^2 + g(\hat{Q}_\tau(t)) \\ &\geqslant \inf_{Q \in [0,1]} \big((t - \tau_- - t^*)Q + a_- c_-^2 + g(Q)\big) = i(t - \tau_-). \end{aligned}$$

Объединяя последнее неравенство с (1.23), имеем

$$i(t - \tau_-) \leqslant i_\tau(t) \leqslant i(t). \tag{2.13}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} i(t - \tau_-) = i_{\min}(t - \tau_-) = a_- c_-^2, &\quad t \geqslant t_+ + \tau_-, \\ i(t) = i_{\min}(t) = a_- c_-^2, &\quad t \geqslant t_+, \end{aligned}$$

приходим к выводу, что функция $i_\tau(t)$ постоянна при $t \geqslant t_+ + \tau_-$. В силу этого утверждения и (1.23)

$$\hat{Q}_\tau(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_+ + \tau_-. \tag{2.14}$$

Замены $1 - \chi = \bar{\chi}$, $-\tau = \bar{\tau}$, $-t = \bar{t}$, $F^-(z) = \bar{F}^+(z)$, $F^+(z) = \bar{F}^-(z)$ приводят к соотношению

$$\begin{aligned} &\chi(F^+(u') + t) + (1 - \chi)F^-(u') + \tau\chi \\ &\quad = \bar{\chi}(\bar{F}^+(u') + \bar{t}) + (1 - \bar{\chi})\bar{F}^-(u') + \bar{\tau}\bar{\chi} - \bar{t} - \bar{\tau}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &I_\tau[u, \chi, t] = \bar{I}_{\bar{\tau}}[u, \bar{\chi}, \bar{t}] - \bar{t}l, \\ &\bar{I}_{\bar{\tau}}[u, \bar{\chi}, \bar{t}] = \int_0^l \{\bar{\chi}(\bar{F}^+(u') + \bar{t}) + (1 - \bar{\chi})\bar{F}^-(u') + \bar{\tau}\bar{\chi}\}\, dx, \\ &\quad \bar{F}^\pm(z) = \bar{a}_\pm(z - \bar{c}_\pm)^2, \quad \bar{a}_\pm = a_\mp, \quad \bar{c}_\pm = c_\mp. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Согласно определениям (1.4), (1.6)

$$-\bar{\tau}_- = \operatorname{esinf}_{x\in(0,l)} \bar{\tau}(x) = -\operatorname{essup}_{x\in(0,l)} \tau(x) = -\tau_+,$$
$$\bar{t}^* = -[\bar{a}\bar{c}^2] = [ac^2] = -t^*, \quad \bar{t}_+ = \bar{t}^* + \frac{[\bar{a}\bar{c}]^2}{\bar{a}_+} = -t^* + \frac{[ac]^2}{a_-} = -t_-. \tag{2.16}$$

Пусть пара $\hat{u}_{\tau,t}$, $\hat{\chi}_{\tau,t}$ минимизирует функционал $I_\tau[u,\chi,t]$. Благодаря (2.15) пара $u_{\bar{\tau},\bar{t}} = \hat{u}_{t,\tau}$, $\bar{\chi}_{\bar{\tau},\bar{t}} = 1 - \hat{\chi}_{\tau,t}$ минимизирует функционал $\bar{I}_{\bar{\tau}}[u,\bar{\chi},\bar{t}]$. Применяя утверждение (2.14) к функционалу $\bar{I}_{\bar{\tau}}[u,\bar{\chi},\bar{t}]$, в случае конечности $\bar{\tau}_-$ получаем

$$\bar{Q}_{\bar{\tau}}(\bar{t}) = 0, \qquad \bar{t} \geqslant \bar{t}_+ + \bar{\tau}_-, \quad \bar{Q}_{\bar{\tau}}(\bar{t}) = \frac{1}{l}\int_0^l \bar{\chi}_{\bar{\tau},\bar{t}}(x)\,dx = 1 - \hat{Q}(t).$$

Учитывая (2.16) приходим к выводу, что

$$\hat{Q}_\tau(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \leqslant t_- - \tau_+. \tag{2.17}$$

В силу (1.16), (1.23) справедливо неравенство

$$i_\tau(t) < i_{\min}(t) \quad \text{при} \quad t \in (t_-, t_+). \tag{2.18}$$

Поскольку для однофазовых состояний равновесия $\hat{u}_{\tau,t}$, $\hat{\chi}_{\tau,t}$ выполняются равенства $g(\hat{Q}_\tau(t)) = T(\hat{Q}_\tau(t)) = 0$, из (2.12) при реализации для некоторого t однофазового состояния равновесия получаем

$$i_\tau(t) = (t-t^*)\hat{Q}_\tau(t) + a_-c_-^2 = \min_{Q=0,Q=1}\{(t-t^*)Q + a_-c_-^2\} = i_{\min}(t). \tag{2.19}$$

Сравнение (2.18) с (2.19) даёт

$$0 < \hat{Q}_\tau(t) < 1 \quad \text{при} \quad t \in (t_-, t_+). \tag{2.20}$$

Из непрерывности монотонно убывающей функции $\hat{Q}_\tau(.)$ и соотношений (2.14), (2.17), (2.20) следует существование таких чисел $t_\tau^\pm$, что

$$t_\tau^- \in [t_- - \tau_+, t_-], \quad t_\tau^+ \in [t_+, t_+ + \tau_-],$$
$$\hat{Q}_\tau(t) = 1, \quad t \leqslant t_\tau^-; \quad \hat{Q}_\tau(t) \in (0,1), \quad t \in (t_\tau^-, t_\tau^+); \quad \hat{Q}_\tau(t) = 0, \quad t \geqslant t_\tau^+. \tag{2.21}$$

□

Список литературы

1. М. А. Гринфельд, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений*, Москва, Наука, 1990.
2. V. G. Osmolovskii, *Boundary value problems with free surfaces in the theory of phase transitions.* — Diff. Equations, **53**, No. 13, 1734–1763 (2017).
3. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*, Новосибирск, Научная книга, 1998.
4. В. Г. Осмоловский, *Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред.* — Алгебра и анализ, **29**, No. 5, 111–178 (2017).
5. V. G. Osmolovskii, *One-dimensional phase transitions problem of continuum mechanics with micro-inhomogeneities.* — J. Math. Sci., **167**, No. 3, 394–405 (2010).
6. В. Г. Осмоловский, *Объёмная доля одной из фаз в состоянии равновесия двухфазовой упругой среды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **459**, 66–82 (2017).

Osmolovskii V. G. One-dimensional problem of phase transitions in the mechanics of a continous medium at a variable temperature.

The paper formulates a one-dimensional variational problem of the theory of phase transitions in the mechanics of continuous media in the presence of temperature fields depending on the spatial variable. Its unique solvability is proved and a number of propeties of its are discussed.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: victor.osmolovskii@gmail.com

Поступило 7 октября 2021 г.