Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 508, 2021 г.

Г. И. Бижанова

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ РАССОГЛАСОВАНИИ НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ДАННЫХ

**Посвящается профессору
Григорию Александровичу Серёгину
по случаю его 70-летия**

§1. Введение. Постановка задачи

В работе изучается первая краевая задач для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами при рассогласовании начальных и краевых данных.

При рассмотрении задачи в классическом пространстве Гёльдера требуется выполнение условий согласования заданных функций на границе области в начальный момент времени, которые обеспечат непрерывность решения, всех его допустимых производных и ограниченность констант Гёльдера в замыкании области. Если физический процесс протекает непрерывно, то при любом времени t_0, которое мы положим за начальное, все необходимые условия согласования будут выполнены. Если же мы станем изучать задачу, описывающую процесс с самого его начала или с момента разрыва заданных функций, коэффициентов задачи, то условия согласования не будут выполняться, однако процесс будет протекать, и задача может иметь решение.

В. С. Белоносов ввёл в рассмотрение весовое пространство Гёльдера с весом в виде степени t [1,2]. Исследование краевых задач в этом пространстве с использованием техники оценок решений модельных задач позволяет освободиться от одного условия согласования, но не нулевого порядка. Краевые задачи в пространстве В. С. Белоносова изучали В. А. Солонников и А. Г. Хачатрян, Г. И. Бижанова и другие [3–7].

Ключевые слова: параболическое уравнение, первая краевая задача, рассогласование начальных и краевых данных, пространства Гёльдера, существование, единственность, оценки решения.

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант No. AP08855352).

Г. Либерманом изучены краевые задачи в весовых пространствах Гёльдера с параболическим весом $(\rho^2(x)+t)^{1/2}$, где $\rho(x)$ – расстояние от точки x области до её границы [8].

Задачи для параболических уравнений с рассогласование начальных и граничных данных исследовали Y. Martel и Ph. Souplet [9], Г. И. Бижанова [10–12], Г. И. Бижанова и М. Н. Шаймарданова [13]. В работе [9] была рассмотрена первая краевая задача, в [10–12] – первая, вторая краевые задачи и задача сопряжения, в [13] – задача с производной по времени в граничном условии. В работах [10, 12, 13] доказано, что решение каждой из задач представимо в виде суммы гладкой и сингулярных функций, которые были найдены в явном виде. Такие задачи порождают весовые пространства с весом $t^{\nu}e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}$, $\nu \geqslant 0$, здесь x – расстояние от точки x до границы области $x=0$.

В §2 настоящей работы приведены определения классического и весовых пространств Гёльдера, даны условия согласования начальных и граничных данных и определения интегралов вероятностей. Основной результат сформулирован в §3, в §4, §5 изучены сингулярные решения модельных задач и задачи (1.2)–(1.4), доказательство основной теоремы дано в §6, в Приложении А изучены свойства решений модельных задач.

Пусть $D := (0,\infty)$, $D_T := D\times(0,T)$, $\sigma_T := (0,T)$,

$$\mathcal{A}(x,t,\partial_x) := a(x,t)\partial_x^2 + a_1(x,t)\partial_x + a_0(x,t), \tag{1.1}$$

где $c_0 \leqslant a(x,t) \leqslant c_1$ в $\overline{D}_T$, c_0, c_1 – положительные постоянные, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$.

Требуется найти решение первой краевой задачи

$$\partial_t u - \mathcal{A}(x,t,\partial_x)u = f(x,t) \text{ в } D_T, \tag{1.2}$$

$$u\,|_{t=0} = u_0(x) \text{ в } D, \tag{1.3}$$

$$u\,|_{x=0} = \varphi(t),\ t\in\sigma_T \tag{1.4}$$

с рассогласованием начальных и краевых данных.

В дальнейшем будем обозначать через $C_1, C_2, \ldots,$ положительные постоянные, причём в каждом разделе их нумерация будет начинаться с единицы.

§2. Определения

2.1. Определения классического и весовых пространств Гёльдера. Задача (1.2)–(1.4) будет изучена в весовом пространстве Гёльдера.

Пусть $\alpha \in (0,1)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Через $C_{x\ \ t}^{k,k/2}(\overline{D}_T)$ обозначим пространство Гёльдера функций $u(x,t)$, имеющих норму [14]

$$\begin{aligned} |\,u\,|_{D_T}^{(k+\alpha)} &= \sum_{2m_0+m_j=0}^{k} |\,\partial_t^{m_0}\partial_x^m u\,|_{D_T} \\ &+ \sum_{2m_0+m=k}\Big([\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{x,D_T}^{(\alpha)} + [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,D_T}^{(\alpha/2)}\Big) \\ &+ \begin{cases} \sum\limits_{2m_0+|m|=k-1} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,D_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, & k \geqslant 1, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $|\,f\,|_{D_T} = \sup\limits_{(x,t)\in D_T} |\,f\,|$,

$$[f]_{x,D_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(z,t)\in D_T} \frac{|\,f(x,t)-f(z,t)\,|}{|\,x-z\,|^{\alpha}},$$
$$[f]_{t,D_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x,\tau)\in D_T} \frac{|\,f(x,t)-f(x,\tau)\,|}{|\,t-\tau\,|^{\alpha}}.$$

Пусть $C^{\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ есть банахово пространство функций $v(t)$, имеющих норму

$$|\,v\,|_{\sigma_T}^{(\frac{k+\alpha}{2})} = \sum_{m_0=0}^{[k/2]} \Big|\frac{d^{m_0}v}{d\,t^{m_0}}\Big|_{\sigma_T} + \Big[\frac{d^{[k/2]}v}{d\,t^{[k/2]}}\Big]_{\sigma_T}^{(\frac{k+\alpha}{2}-[k/2])}.$$

Пусть $p = 0,1,\ldots,\ q = 1,2,\ldots,\ 1+p \leqslant k$, c_0^2 – произвольное число.

Введём в рассмотрение весовые пространства Гёльдера $B_p^{k+\alpha}(D_T)$ и $B_{0,q}^{k+\alpha}(D_T)$ с весом $\sqrt{t}e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}$, нормы функций $u(x,t)$ в этих пространствах определяются по формулам

$$| e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u |_{D_T} + \sum_{2m_0+m=1+p}^{k} | t^{\frac{2m_0+m-p}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u |_{D_T}$$
$$+ \sum_{2m_0+m=k}\Big(\big[t^{\frac{k-p+\alpha}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u\big]^{(\alpha)}_{x,D_T} + \big[t^{\frac{k-p+\alpha}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u\big]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\Big) \quad (2.2)$$
$$\sum_{2m_0+m=k-1} \big[t^{\frac{k-p}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u\big]^{(1/2)}_{t,D_T}\Big)$$

и

$$| u |_{B^{k+\alpha}_{0,q}(D_T)} = \sum_{2m_0+m=0}^{k} | t^{\frac{2m_0+m+q}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u |_{D_T}$$
$$+ \sum_{2m_0+m=k}\Big(\big[t^{\frac{k+q+\alpha}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u\big]^{(\alpha)}_{x,D_T} + \big[t^{\frac{k+q+\alpha}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u\big]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\Big) \quad (2.3)$$
$$\sum_{2m_0+m=k-1} \big[t^{\frac{k+q}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m u\big]^{(1/2)}_{t,D_T},$$

здесь при $k = 0$ последняя сумма отсутствует,

$$[t^{\frac{k+\alpha}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}} u]^{(\alpha)}_{x,D_T} = \sup_{(x,t),(z,t)\in D_T} t^{\frac{k+\alpha}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}} \frac{|u(x,t)-u(z,t)|}{|x-z|^\alpha},$$
$$[t^{\frac{k+\alpha}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}} u]^{(\alpha)}_{t,D_T} = \sup_{(x,t),(x,t_1)\in D_T} t^{\frac{k+\alpha}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}} \frac{|u(x,t)-u(x,t_1)|}{|t-t_1|^\alpha}.$$

Пусть $\delta_0 > 0$, $t_0 > 0$, $D = (0,\infty)$, $D_{\delta_0} = (0,\delta_0)$, $D'_{\delta_0} = (\delta_0,\infty)$, $D_{t_0,T} := D\times(t_0,T)$, $D_{\delta_0,T} = D_{\delta_0}\times(0,T)$, $D'_{\delta_0,T} = D'_{\delta_0}\times(0,T)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $f_1(x,t)\in B^{k+\alpha}_p(D_T)$, $f_2(x,t)\in B^{k+\alpha}_{0,q}(D_T)$, $\alpha\in(0,1)$.
Тогда

1. *функции* f_j *принадлежат пространству Гёльдера* $C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}_{x\ \ t}(\overline{D}_{t_0,T})$, $j=1,2$, *и удовлетворяют оценкам*

$$|f_1|^{(k+\alpha)}_{D_{t_0,T}} \leqslant C_1|f_1|_{B^{k+\alpha}_p(D_T)}, \quad |f_2|^{(k+\alpha)}_{D_{t_0,T}} \leqslant C_2|f_1|_{B^{k+\alpha}_{0,q}}(D_T); \qquad (2.4)$$

2. *функции* f_j *принадлежат пространству Гёльдера* $C_x^{k+\alpha,}{}_t^{\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{D}_{\delta_0,T})$, $j=1,2$, *и удовлетворяют оценкам*

$$|f_1|^{(k+\alpha)}_{D'_{\delta_0,T}} \leqslant C_3|f_1|_{B_p^{k+\alpha}(D_T)}, \ |f_2|^{(k+\alpha)}_{D'_{\delta_0,T}} \leqslant C_4|f_1|_{B_{0,q}^{k+\alpha}(D_T)}. \qquad (2.5)$$

Доказательство. 1. Рассмотрим, для определённости, функцию $f_2(x,t)$ и её полунорму из формулы (2.3)

$$|\, t^{\frac{2m_0+m+q}{2}} e^{c_0^2\frac{x^2}{t}} \partial_t^{m_0}\partial_x^m f_2 \,|_{D_T} =: N_1,$$

отсюда получим

$$\begin{aligned}|\partial_t^{m_0}\partial_x^m f_2| &\leqslant N_1 \frac{1}{t^{\frac{2m_0+m+q}{2}}} e^{-c_0^2\frac{x^2+t-t}{t}} \\ &= N_1 e^{c_0^2}\Big(\frac{x^2+t}{t}\Big)^{\frac{2m_0+m+q}{2}} e^{-c_0^2\frac{x^2+t}{t}} \frac{1}{(x^2+t)^{\frac{2m_0+m+q}{2}}}.\end{aligned}$$

Применим неравенство $|\xi|^\beta e^{-\xi^2} \leqslant C_\beta e^{-\xi^2/2}$, $\beta>0$, тогда

$$|\partial_t^{m_0}\partial_x^m f_2| \leqslant \frac{C_5N_1}{(x^2+t)^{\frac{2m_0+m+q}{2}}} \leqslant \frac{C_5N_1}{t_0^{\frac{2m_0+m+q}{2}}} = C_6N_1. \qquad (2.6)$$

Точно так же оцениваются остальные полунормы рассматриваемых функций f_j, $j=1,\,2$, и устанавливаются гёльдеровы оценки (2.4) в области $D_{t_0,T} := D\times(t_0,\,T)$.

2. При $x\geqslant\delta_0$ мы усиливаем неравенство (2.6), положив $x\geqslant\delta_0$, $t=0$,

$$|\partial_t^{m_0}\partial_x^m f_2| \leqslant \frac{C_5N_1}{(x^2+t)^{\frac{2m_0+m+q}{2}}} \leqslant \frac{C_5N_1}{\delta_0^{\frac{2m_0+m+q}{2}}} = C_7N_2.$$

Аналогично предыдущему мы устанавливаем оценки (2.5) функций f_j, $j=1,\,2$, в области $D'_{\delta_0,T} := D'_{\delta_0}\times(0,\,T)$.

Найденные оценки доказывают теорему. □

Замечание 2.1. Из Теоремы 2.1 следует, что задачу (1.2)–(1.4) нахождения решения в весовых пространствах достаточно изучить в малом по времени.

2.2. Условия согласования начальных и граничных данных. Определим условия согласования начальных и граничных данных задачи (1.2)–(1.4). Они находятся из краевого условия с привлечением начальных данных и уравнения.

Условия согласования нулевого и первого порядков имеют вид

$$u_0(x)|_{x=0} = \varphi(0), \tag{2.7}$$

$$(\mathcal{A}(x,t,\partial_x)u_0(x)|_{x=0,t=0} + f(0,0) = \varphi'(t)|_{t=0}. \tag{2.8}$$

Пусть

$$A_0 := \varphi(0) - u_0(0), \tag{2.9}$$

$$A_1 := \varphi'(t)|_{t=0} - \mathcal{A}(x,t,\partial_x)u_0(x)|_{x=0,t=0} - f(0,0). \tag{2.10}$$

Очевидно, при выполнении условий согласования (2.7), (2.8) $A_0 = 0$, $A_1 = 0$.

Мы будем рассматривать случай рассогласования начальных и граничных данных, т.е.

$$A_0 \neq 0, \ \ A_1 \neq 0 \tag{2.11}$$

2.3. Интегралы вероятностей. В дальнейшем нам понадобятся интегралы вероятностей $i^n\mathrm{erfc}z$ [15], они определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} i^{-1}\mathrm{erfc}z &:= \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}, \quad i^0\mathrm{erfc}z := \mathrm{erfc}z = \int\limits_z^\infty i^{-1}\mathrm{erfc}\zeta\, d\zeta \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_z^\infty e^{-\zeta^2}\, d\zeta, \ \ i^1\mathrm{erfc}z := i\mathrm{erfc}z, \\ i^n\mathrm{erfc}z &:= \int\limits_z^\infty i^{n-1}\mathrm{erfc}\zeta\, d\zeta, \quad n = 0,1,2,\dots \end{aligned} \tag{2.12}$$

Для интегралов вероятностей выполняются соотношения [15]

$$D_z i^n\mathrm{erfc}z = -i^{n-1}\mathrm{erfc}z, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad (D_z = \frac{d}{dz}); \tag{2.13}$$

$$i^n\mathrm{erfc}0 = \frac{1}{2^n\Gamma(n/2+1)}, \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{2.14}$$

$$i^n\mathrm{erfc}z = \frac{1}{2n}i^{n-2}\mathrm{erfc}z - \frac{z}{n}i^{n-1}\mathrm{erfc}z, \quad n = 1,2,\dots \ . \tag{2.15}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Как видно из формул (2.12) и (2.14), интегралы вероятностей являются ограниченными функциями при $z \geqslant 0$

$$i^n \mathrm{erfc} z \leqslant i^n \mathrm{erfc} 0, \quad n = -1, 0, 1, \dots . \tag{2.16}$$

§3. Основной результат

Определим области $D_{\delta_0,T} = (0, \delta_0) \times (0,T)$, $D'_{\delta_0,T} = (\delta_0, \infty) \times (0,T)$, $\delta_0 > 0$.

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты* $a(x,t)$, $a_1(x,t)$, $a_0(x,t)$ *оператора* $\mathcal{A}(x,t,\partial_x)$ *принадлежат пространству* $C_{x\ \ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $\alpha \in (0,1)$.

Для любых функций $u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$, $f(x,t) \in C^{\alpha}(\overline{D}_T)$, $\varphi(t) \in C^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$, *не удовлетворяющих условиям согласования нулевого и первого порядков, т.е.* $A_0 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, *существуют* $\delta_0 > 0$, $T_0 > 0$ *такие, что задача* (1.2)–(1.4) *имеет единственное решение* $u(x,t) = v(x,t) + V_0(x,t) + V_1(x,t)$, *где* $v(x,t) \in C_{x\ \ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_{t_0})$, $V_0(x,t) \in B_0^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})$, $V_1(x,t) \in B_2^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})$, $V_k(x,t) \in C_{x\ \ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}'_{\delta_0,T_0})$, $k = 0,1$, *и выполняются оценки*

$$|v|_{D_{t_0}}^{(2+\alpha)} \leqslant C_1\big(|u_0|_D^{(2+\alpha)} + |f|_{D_T}^{(\alpha)} + |\varphi - A_0 - A_1 t|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)}\big),$$
$$|V_0|_{B_0^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})} \leqslant C_1|A_0|,\ |V_1|_{B_2^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})} \leqslant C_2|A_1|,$$
$$|V_k|_{D'_{\delta_0,T_0}}^{(2+\alpha)} \leqslant C_3|A_k|,\ k = 0,1.$$

Эта теорема доказывается в малом по времени на основании Теоремы 2.1, пункт 1.

Следствие 3.1.1. *Если выполнено условие согласования нулевого порядка т.е.* $A_0 = 0$, *то решение задачи* (1.2)–(1.4) *имеет вид* $u(x,t) = v(x,t) + V_1(x,t)$;
если выполнено условие согласования первого порядка, т.е. $A_1 = 0$, *то* $u(x,t) = v(x,t) + V_0(x,t)$.

Замечание 3.1. 1. Если рассматривать задачу (1.2)–(1.4) в области $(0,l)$ с рассогласованием начальных и граничных данных на границе $x = 0$ и с согласованием заданных функций на границе $x = l$, то сингулярные решения $V_0(x,t)$, $V_1(x,t)$ не повлияют на решение задачи, т.к. они при $x \geqslant \delta_0$ в силу Теоремы 2.1, пункт 2 становятся гладкими функциями, равными нулю при $t = 0$.

2. Если рассматривать задачу (1.2)–(1.4) в области $(0,l)$ с рассогласованием начальных и граничных данных на границе $x=l$, то появятся два сингулярных решения из тех же пространств, что и решения $V_0(x,t),\ V_1(x,t)$, только с весовой функцией $\sqrt{t}\,e^{c_0^2\frac{(l-x)^2}{t}}$ и аргументом $l-x$ вместо $\sqrt{t}\,e^{c_0^2\frac{x^2}{t}}$ и x.

§4. Сингулярные решения модельных задач

Рассмотрим две модельные задачи в $D_T := (0,\infty)\times(0,T)$

$$\partial_t v_k - \partial_x^2 v_k = f_k(x,t) \text{ в } D_T, \tag{4.1}$$
$$v_k|_{t=0} = 0 \text{ в } D,\ v_k|_{x_n=0} = 0,\ t\in\sigma_T =: (0,T),\ k=0,1, \tag{4.2}$$

где $a>0$ – постоянная.

Теорема 4.1. *Пусть $f_0(x,t)\in B^{\alpha}_{0,2}(D_T)$, $f_1(x,t)\in B^{\alpha}_{0}(D_T)$, $\alpha\in(0,1)$.*
Тогда $v_0(x,t)\in B^{2+\alpha}_0(D_T)$, $v_1(x,t)\in B^{2+\alpha}_2(D_T)$ и справедливы оценки

$$|v_0|_{B^{2+\alpha}_0(D_T)} \leqslant C_1|f_0|_{B^{\alpha}_{0,2}(D_T)}, \tag{4.3}$$
$$|v_1|_{B^{2+\alpha}_2(D_T)} \leqslant C_2|f_1|_{B^{\alpha}_{0}(D_T)}. \tag{4.4}$$

Эта теорема лежит в основе доказательства Теоремы 5.1. Правые части $f_0(x,t),\ f_1(x,t)$ уравнений (4.1) принадлежат весовым пространствам Гёльдера, в которых показатель c_0^2 экспоненциальной весовой функции определён в Приложении А: $c_0^2=\frac{1}{16a}$, при доказательстве теоремы мы получаем показатель $c_0^2=\frac{1}{32a}$ экспоненциальной весовой функции пространств, которым принадлежат решения $v_0(x,t),\ v_1(x,t)$ задач (4.1), (4.2).

Приведём неравенства и табличные интегралы, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности (4.1)

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

и его оценка

$$\partial_t^{m_0}\partial_x^m\Gamma(x,t)\leqslant C_3\frac{1}{t^{\frac{1+2m_0+m}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8at}}; \tag{4.5}$$

$$|\xi|^\beta e^{-\xi^2}\leqslant C_\beta e^{-\xi^2/2},\ \beta\geqslant 0; \tag{4.6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a(t-\tau)}}e^{-\frac{(y-z)^2}{4a\tau}}\,dy=\frac{2\sqrt{a\pi\tau(t-\tau)}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-z)^2}{4at}}; \tag{4.7}$$

$$\int\limits_0^t\frac{b}{2\sqrt{a\pi(t-\tau)^3}}e^{-\frac{b^2}{4a(t-\tau)}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{b}{2\sqrt{at}}}^{\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi=:\operatorname{erfc}\frac{b}{2\sqrt{at}}, \tag{4.8}$$

где $\operatorname{erfc}\frac{b}{2\sqrt{at}}\leqslant 1$ при $b\geqslant 0$;

$$\int\limits_0^t\frac{a_1}{\sqrt{\pi\tau(t-\tau)^3}}e^{-\frac{a_1^2}{t-\tau}}e^{-\frac{b_1^2}{\tau}}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(a_1+b_1)^2}{t}}. \tag{4.9}$$

Доказательство Теоремы 4.1. 1. Рассмотрим задачу (4.1), (4.2), $k=0$. Её решение имеет вид

$$v_0(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty f_0(y,t)\big(\Gamma(x-y,t-\tau)-\Gamma(x+y,t-\tau)\big)\,dy. \tag{4.10}$$

Норма функции $f_0(x,t)$ определяется формулой

$$\begin{aligned}|f_0|_{B^{2+\alpha}_{0,2}(D_T)}&=|t\,e^{\frac{x^2}{16at}}f_0|_{D_T}+[t^{1+\alpha/2}\,e^{\frac{x^2}{16at}}f_0]^{(\alpha)}_{x,D_T}\\&+[t^{1+\alpha/2}\,e^{\frac{x^2}{16at}}f_0]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}=M_1+M_2+M_3.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Нам понадобятся оценки функции $f_0(x,t)$

$$|f_0(x,t)|\leqslant M_1\frac{1}{t}e^{-\frac{x^2}{16at}}, \tag{4.12}$$

$$|f_0(x,t)-f_0(z,t)|\leqslant M_2\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{16at}}|x-z|^\alpha, \tag{4.13}$$

$$|f_0(x,t)-f_0(x,t_1)|\leqslant M_3\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{16at}}|t-t_1|^{\alpha/2}. \tag{4.14}$$

Оценим функции $v_0(x,t),\ \partial_x v_0(x,t)$

$$\partial_x^m v_0(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty f_0(y,\tau)\big(\partial_x^m \Gamma(x-y,t-\tau) - \partial_x^m \Gamma(x+y,t-\tau)\big)\,dy,$$

$m = 0, 1$.

Воспользуемся формулой (4.5) и оценкой (4.12), учтём, что

$$e^{-\frac{(x+y)^2}{4at}} \leqslant e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} \quad \text{при } x \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \tag{4.15}$$

и перейдём к интегрированию по y по области $(-\infty, \infty)$, применяя табличный интеграл (4.7), тогда

$$\partial_x^m v_0(x,t)| \leqslant C_4 M_1 \int_0^t \frac{1}{\tau(t-\tau)^{\frac{1+m}{2}}} d\tau \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{16a\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{16a(t-\tau}} dy$$

$$\leqslant C_5 M_1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{16at}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}(t-\tau)^{m/2}} d\tau \leqslant C_6 M_1 \frac{1}{t^{m/2}} e^{-\frac{x^2}{32at}},$$

отсюда получим

$$|e^{\frac{x^2}{32at}} v_0|_{D_T} + |\sqrt{t} e^{\frac{x^2}{32at}} \partial_x v_0|_{D_T} \leqslant C_6 M_1. \tag{4.16}$$

В дальнейшем при оценках некоторых потенциалов появится коэффициент $\frac{1}{32a}$ в показателе экспоненты весовой функции, поэтому мы усиливаем неравенства, уменьшая коэффициент, чтобы получить единый коэффициент во всех оценках.

Представим вторую производную $\partial_x^2 v_0(x,t)$ в виде

$$\begin{aligned} \partial_x^2 v_0(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \big(f_0(y,t) - f_0(x,t)\big)\big(\Gamma_{xx}(x-y,t-\tau) \\ - \Gamma_{xx}(x+y,\, t-\tau)\big)\,dy + \int\limits_0^t f_0(x,t)\,d\tau \int\limits_0^\infty \big(-\Gamma_{xy}(\cdot) - \Gamma_{xy}(\cdot)\big)\,dy \end{aligned} \tag{4.17}$$

и оценим её, привлекая неравенства (4.12), (4.13), (4.6), и формулу (4.8), тогда

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^2 v_0(x,t)| \leqslant C_7 M_2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \frac{|x-y|^\alpha}{\tau^{1+\alpha/2}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{16a\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{16a(t-\tau)}}\, dy \\
+ C_8 M_1 \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{16at}} \int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{16a(t-\tau)}}\, d\tau \\
\leqslant C_9 M_2 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{32at}} \int_0^t \frac{1}{\tau^{\frac{1+\alpha}{2}}(t-\tau)^{1-\alpha/2}} d\tau + C_{10} M_1 \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{32at}} \\
\leqslant C_{11}(M_1+M_2)\frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{32at}}.
\end{aligned}
$$

Такой же оценке удовлетворяет производная $\partial_t v_0(x,t) = a\partial_x^2 v_0(x,t) + f_0(x,t)$. Отсюда следует

$$
|te^{\frac{x^2}{32at}} \partial_x^2 v_0|_{D_T} + |te^{\frac{x^2}{32at}} \partial_t v_0|_{D_T} \leqslant C_{12}(M_1+M_2). \tag{4.18}
$$

Оценим константы Гёльдера. Производную $\partial_x^2 v_0(x,t)$ представим в виде

$$
\begin{gathered}
\partial_x^2 v_0(x,t) = \Big(\int\limits_0^{t/2} + \int\limits_{t/2}^t \Big) d\tau \int\limits_0^\infty f_0(y,\tau) \\
\big(\Gamma_{xx}(x-y,t-\tau) - \Gamma_{xx}(x+y,t-\tau)\big)\, dy =: p_1(x,t) + p_2(x,t).
\end{gathered} \tag{4.19}
$$

Составим разность, положив $z/2 \leqslant x < z$,

$$
\begin{gathered}
\Delta_1 := p_1(x,t) - p_1(z,t) = -\int\limits_x^z d\xi \int\limits_0^{t/2} d\tau \int\limits_0^\infty f_0(y,\tau) \\
\times \big(\Gamma_{\xi\xi\xi}(\xi-y,t-\tau) - \Gamma_{\xi\xi\xi}(\xi+y,t-\tau)\big)\, dy.
\end{gathered}
$$

Применим оценки (4.5), (4.12), (4.6), формулу (4.7), тогда

$$|\Delta_1| \leqslant C_{13}M_1\int\limits_x^z d\xi\int\limits_0^{t/2}\frac{d\tau}{\tau(t-\tau)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{16a\tau}}\big(e^{-\frac{(x-y)^2}{16a(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{16a(t-\tau)}}\big)\,dy$$

$$= C_{14}M_1\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_x^z d\xi\int\limits_0^{t/2}\frac{1}{\sqrt{\tau}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{16at}}\,d\tau$$

$$\leqslant C_{15}M_1\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{32at}}\int\limits_x^z\frac{1}{\xi^{1-\alpha}}\frac{\xi^{1-\alpha}}{t^{1/2-\alpha/2}}e^{-\frac{\xi^2}{16at}}\,d\xi,$$

отсюда будем иметь

$$|\Delta_1| = |p_1(x,t)-p_1(z,t)| \leqslant C_{16}M_1\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{32at}}|x-z|^{\alpha}. \tag{4.20}$$

Рассмотрим потенциал $p_2(x,t)$, определяемый формулой (4.19). Пусть $r=z-x>0$, $G(x,y;t):=\Gamma(x-y,t)-\Gamma(x+y,t)$.

Сформируем разность $\Delta_2=p_2(x,t)-p_2(z,t)$

$$\Delta_2=\int\limits_{t/2}^{t}d\tau\int\limits_{|x-y|\leqslant 2r}\big(f_0(y,\tau)-f_0(x,\tau)\big)G_{xx}(x,y;t)\,dy$$

$$-\int\limits_{t/2}^{t}d\tau\int\limits_{|x-y|\leqslant 2r}\big(f_0(y,\tau)-f_0(z,\tau)\big)G_{zz}(z,y;t)\,dy$$

$$+\int\limits_{t/2}^{t}d\tau\int\limits_{|x-y|\geqslant 2r}\big(f_0(y,\tau)-f_0(x,\tau)\big)\big(G_{xx}(x,y;t)-G_{zz}(z,y;t)\big)\,dy$$

$$-\int\limits_{t/2}^{t}d\tau\int\limits_{|x-y|\geqslant 2r}\big(f_0(x,\tau)-f_0(z,\tau)\big)G_{zz}(z,y;t)\,dy=:\sum_{i=1}^{4}J_i. \tag{4.21}$$

и оценим каждый интеграл, пользуясь соотношениями (4.5), (4.13), (4.6), (4.15). Итак, имеем

$$|J_1| \leqslant C_{16}M_2\int\limits_{t/2}^{t}\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha/2}(t-\tau)^{3/2}}\int\limits_{|x-y|\leqslant 2r}|x-y|^{\alpha}e^{-\frac{y^2}{16a\tau}}e^{-\frac{(x-y)^2}{16a(t-\tau)}}\,dy.$$

Применим табличный интеграл (4.9) и перейдём к переменной интегрирования $\rho = |x-y|$, тогда

$$\begin{aligned}|J_1| &\leqslant C_{17} M_2 \frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}} e^{-\frac{x^2}{16a\tau}} \int\limits_0^{2r} \rho^{\alpha-1}\, d\rho \\ &\leqslant C_{18} M_2 \frac{1}{t^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{32at}} |x-z|^\alpha.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Интеграл J_2 в формуле (4.21) оценивается точно так же, как интеграл J_1, только при переходе к переменной $\rho = |z-y|$ область интегрирования $|x-y| \leqslant 2r$ заменится на область $\rho = |z-y| = |(z-x)+(x-y)| \leqslant 3r$.

Рассмотрим интеграл J_3 в формуле (4.21). Преобразуем в интеграле плотность $f_0(y,\tau) - f_0(x,\tau) = f_0(y,\tau) - f_0(x+\lambda r,\tau) + f_0(x+\lambda r,\tau) - f_0(x,\tau)$, где λ– произвольное число из сегмента $[0,1]$, которое будет определено ниже, и оценим её

$$\begin{aligned}|f_0(y,\tau) - f_0(x,\tau)| &\leqslant M_2 \frac{|x-y+\lambda r|^\alpha}{\tau^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{(x+\lambda r)^2}{16a\tau}} + M_2 \frac{\lambda^\alpha r^\alpha}{\tau^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{16a\tau}} \\ &\leqslant M_2 \frac{|x-y+\lambda r|^\alpha}{\tau^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{(x+\lambda r)^2}{16a\tau}} + M_2 \frac{r^\alpha}{\tau^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{16a\tau}}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Представим интеграл J_3 в виде

$$\begin{aligned}J_3 = &\int\limits_{t/2}^{t} d\tau \int\limits_{|x-y|\geqslant 2r} \big(f_0(y,\tau) - f_0(x+\lambda r,\tau)\big)\big(G_{xx}(x,y;t-\tau) \\ &- G_{zz}(z,y;t-\tau)\big)\, dy + \int\limits_{t/2}^{t} \big(f_0(x+\lambda r,\tau) - f_0(x,\tau)\big)\, d\tau \\ &\times \int\limits_{|x-y|\geqslant 2r} \big(G_{xx}(x,y;t-\tau) - G_{zz}(z,y;t-\tau)\big)\, dy =: J_{3,1} + J_{3,2}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

В интеграле $J_{3,1}$ преобразуем разность ядер $G_{xx} - G_{zz}$, учитывая, что $x < z$,

$$G_{xx}(x-y,t-\tau) - G_{zz}(z-y,t-\tau) = \big(\Gamma_{xx}(x-y,t-\tau) - \Gamma_{zz}(z-y,t-\tau)\big) - \big(\Gamma_{xx}(x+y,t-\tau) - \Gamma_{zz}(z+y,t-\tau)\big)$$
$$= -(z-x)\int\limits_0^1 \big(\Gamma_{xxx}(x-y+\lambda r,\cdot) - \Gamma_{xxx}(x+y+\lambda r,\cdot)\big)\,d\lambda,\ r = z-x,$$

и оценим её

$$\begin{aligned}
&\big|G_{xx}(x-y,\cdot) - G_{zz}(z-y,\cdot)\big| \\
&\leqslant C_{19}(z-x)\frac{1}{(t-\tau)^2}\int\limits_0^1 \big(e^{-\frac{(x-y+\lambda r)^2}{16a(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+y+\lambda r)^2}{8a(t-\tau)}}\big) \\
&\leqslant C_{20}(z-x)\frac{1}{(t-\tau)^2}\int\limits_0^1 e^{-\frac{(x-y+\lambda r)^2}{16a(t-\tau)}}\,d\lambda,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

здесь мы применили неравенство (4.5) и учли, что $x > 0,\ y > 0,\ z > x$.

В интеграле $J_{3,1}$ используем оценки разности плотностей (4.23) и разности ядер $G_{xx}(x-y,t-\tau) - G_{zz}(z-y,t-\tau)$ (4.25), тогда

$$|J_{3,1}| = \Big|\int\limits_{t/2}^t d\tau \int\limits_{|x-y|\geqslant 2r} \big(f_0(y,\tau) - f_0(x+\lambda r,\tau)\big)\big(G_{xx}(x,y;t-\tau) - G_{zz}(z,y;t-\tau)\big)\,dy\Big| \leqslant C_{21}M_2 r\int\limits_0^1 d\lambda\int\limits_{t/2}^t \frac{1}{\tau^{1+\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{16a\tau}}\,d\tau$$
$$\int\limits_{|x-y|\geqslant 2r} \frac{|x-y+\lambda r|^\alpha}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-y+\lambda r)^2}{16a(t-\tau)}}\,dy.$$

Перейдём к переменной интегрирования $\rho = |x-y+\lambda r|$ по области $\rho = |x-y+\lambda r| \geqslant 2r$, применим соотношения (4.6) и (4.8), тогда

$$
\begin{aligned}
|J_{3,1}| &\leqslant C_{22}\, M_2\, r \frac{1}{t^{1+\alpha/2}}\, e^{-\frac{x^2}{16at}} \int\limits_{2r}^{\infty} \rho^{\alpha-2}\, d\rho \int\limits_0^t \frac{\rho}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \frac{\rho}{\sqrt{t-\tau}} \\
& e^{-\frac{\rho^2}{16a(t-\tau)}}\, d\rho \leqslant C_{23}\, M_2\, r\, \frac{1}{t^{1+\alpha/2}}\, e^{-\frac{x^2}{16at}} \int\limits_{2r}^{\infty} \rho^{\alpha-2} \mathrm{erfc} \frac{\rho}{4\sqrt{at}}\, d\rho \\
& \leqslant C_{24}\, M_2\, \frac{1}{t^{1+\alpha/2}}\, e^{-\frac{x^2}{16at}}\, r^{\alpha}, \quad r = z - x,
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

т.к. $0 \leqslant \mathrm{erfc}\ \xi \leqslant 1$ при $\xi \geqslant 0$.

Потенциал $J_{3,2}$ проинтегрируем по y, учитывая, что на границе $|x-y| = 2\,r$ области $|x-y| \geqslant 2\,r$ $y = x + 2r$ и $y = x - 2r$, тогда после интегрирования по y показатели экспонент примут значения

$$
\begin{aligned}
& e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}}\Big|_{y=x\pm 2r} = e^{-\frac{r^2}{at}},\ e^{-\frac{(x+y)^2}{4at}}\Big|_{y=x+2r} = e^{-\frac{(x+r)^2}{at}}, \\
& e^{-\frac{(x+y)^2}{4at}}\Big|_{y=x-2r} = e^{-\frac{(2x-z)^2}{at}},\ e^{-\frac{(z-y)^2}{4at}}\Big|_{y=x+2r} = e^{-\frac{r^2}{4at}}, \\
& e^{-\frac{(z-y)^2}{4at}}\Big|_{y=x-2r} = e^{-\frac{9r^2}{4at}},\ e^{-\frac{(z+y)^2}{4at}}\Big|_{y=x+2r} = e^{-\frac{(3z-)^2}{4at}}, \\
& e^{-\frac{(z+y)^2}{4at}}\Big|_{y=x-2r} = e^{-\frac{(3x-z)^2}{4at}},
\end{aligned}
$$

Мы предположили, что $z/2 \leqslant x < z$, поэтому все показатели экспонент отличны от нуля, обозначим их, для удобства, через b_i^2, $i = 1, \ldots, 8$.

Оценим интеграл $J_{3,2}$, пользуясь неравенством (4.23) разности плотностей, и учитывая, что $\lambda \in [0,1]$,

$$
\begin{aligned}
J_{3,2} &\leqslant C_{25}\, M_2\, \frac{r^{\alpha}}{t^{1+\alpha/2}}\, e^{-\frac{x^2}{16at}} \sum_{i=1}^{8} \int\limits_{t/2}^{t} \frac{b_i}{\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{-\frac{b_i^2}{4a(t-\tau)}}\, d\tau \\
& \leqslant C_{26}\, M_2\, \frac{1}{t^{1+\alpha/2}}\, e^{-\frac{x^2}{32at}} (z-x)^{\alpha},
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

здесь интеграл оценивается функцией $\mathrm{erfc}\frac{b_i}{2\sqrt{at}} \leqslant 1$ при $b > 0$ согласно формуле (4.8).

Интеграл J_4 в формуле (4.21) оценивается точно так же, как $J_{3,2}$, и для него справедлива оценка (4.27).

Собирая установленные оценки (4.20), (4.22), (4.26), (4.27), мы получим

$$[t^{1+\alpha/2}\, e^{\frac{x^2}{32at}}\, \partial^2_{xx} v_0]^{(\alpha)}_{x,D_T} + [t^{1+\alpha/2}\, e^{\frac{x^2}{32at}}\, \partial_t v_0]^{(\alpha)}_{x,D_T} \leqslant C_{27}\, M_2. \tag{4.28}$$

Оценим константу Гёльдера по t производной

$$\partial^2_x v_0(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \big(f_0(y,\tau) - f_0(x,t)\big) G_{xx}(x,y;t-\tau)\, dy$$
$$+ f_0(x,t) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty G_{xx}(x,y;t-\tau)\, dy,$$

здесь $G_{xx}(x,y;t-\tau) = \Gamma_{xx}(x-y,t-\tau) - \Gamma_{xx}(x+y,t-\tau)$.

Составим её разность, положив $t_1/2 \leqslant t < t_1$,

$$\begin{aligned}
\Delta_7 &:= \partial^2_x v_0(x,t) - \partial^2_x v_0(x,t_1) \\
&= -\int\limits_{t_1}^t d\tau \int\limits_0^\infty \big(f_0(y,\tau) - f_0(x,t)\big) G_{xx}(x,y;t_1-\tau)\, dy \\
&+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \big(f_0(y,\tau)\, dy - f_0(x,t_1)\big)\big(G_{xx}(x,y;t-\tau)\, dy \\
&- G_{xx}(x,y;t_1-\tau)\big)\, dy + \Big(f_0(x,t) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty G_{xx}(x,y;t-\tau)\, dy \\
&- f_0(x,t_1) \int\limits_0^{t_1} d\tau \int\limits_0^\infty G_{xx}(x,y;t_1-\tau)\, dy\Big) = \sum_{i=5}^7 J_i.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

При оценке потенциалов будем использовать формулы (4.5), (4.13), (4.14), (4.6)

Рассмотрим интеграл J_5

$$|J_5| \leqslant C_{28}(M_2+M_3) \int\limits_t^{t_1} \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha/2}(t_1-\tau)^{3/2}} \int\limits_0^\infty \big(|x-y|^\alpha + (t_1-\tau)^{\alpha/2}\big)$$
$$\times\, e^{-\frac{y^2}{16a\tau}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{16a(t_1\,\tau)}}\, dy.$$

Проинтегрируем по y, используя формулу (4.7), тогда

$$\begin{aligned} |J_5| &\leqslant C_{29}(M_2+M_3)\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{16at_1}}\int\limits_t^{t_1}\frac{d\tau}{(t_1-\tau)^{1-\alpha/2}} \\ &\leqslant C_{30}(M_2+M_3)\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{32at}}(t_1-t)^{\alpha}/2. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Разность ядер в потенциале J_6 запишем в виде

$$G_{xx}(\cdot;t-\tau)-G_{xx}(\cdot;t_1-\tau)=\int\limits_0^1 G_{xx\lambda}(\cdot;t-\tau+\lambda(t_1-t))\,d\lambda$$

$$=(t_1-t)\int\limits_0^1 G_{xxt}(x,y;t-\tau+\lambda(t_1-t))\,d\lambda$$

и оценим интеграл J_6

$$\begin{aligned} &|J_6|\leqslant C_{31}(M_2+M_3)(t_1-t)\int\limits_0^1 d\lambda\int\limits_0^t \\ &\times\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha/2}(t-\tau+\lambda(t_1-t))^{5/2-\alpha/2}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{y^2}{16a\tau}}e^{-\frac{(x-y)^2}{16a(t-\tau+\lambda(t_1-t))}}\,dy \\ &\leqslant C_{32}(M_2+M_3)(t_1-t)\int\limits_0^1\frac{d\lambda}{\sqrt{t+\lambda(t_1-t)}} \\ &\times\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^{1/2+\alpha/2}(t-\tau+\lambda(t_1-t))^{2-\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{16a(t+\lambda(t_1-t))}}\,dy \\ &\leqslant C_{33}(M_2+M_3)(t_1-t)\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{32at}}\int\limits_0^1 d\lambda\Bigg(\int\limits_0^{t/2}+\int\limits_{t/2}^t\Bigg) \\ &\times\frac{d\tau}{\tau^{1/2+\alpha/2}(t-\tau+\lambda(t_1-t))^{2-\alpha/2}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Разобъём интеграл по τ по областям $(0,\, t/2)$ и $(t/2,\, t)$. Рассмотрим первый интеграл

$$\begin{aligned} J_{6,1} &:= \int\limits_0^1 d\lambda \int\limits_0^{t/2} \frac{d\tau}{\tau^{1/2+\alpha/2}(t-\tau+\lambda(t_1-t))^{2-\alpha/2}} \\ &\leqslant \frac{1}{(t_1-t)^{1-\alpha/2}} \int\limits_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda^{1-\alpha/2}} \int\limits_0^{t/2} \frac{d\tau}{\tau^{1/2+\alpha/2}(t-\tau)} \\ &\leqslant C_{34} \frac{1}{(t_1-t)^{1-\alpha/2}} \frac{1}{t^{1/2+\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} J_{6,2} &:= \int\limits_{t/2}^t d\tau \int\limits_0^1 \frac{d\lambda}{\tau^{1/2+\alpha/2}(t-\tau+\lambda(t_1-t))^{2-\alpha/2}} \\ &\leqslant C_{35} \frac{1}{t^{1/2+\alpha/2}(t_1-t)} \int\limits_0^t \Big(\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha/2}} - \frac{1}{(t_1-\tau)^{1-\alpha/2}}\Big)\, d\tau \\ &\leqslant C_{36} \frac{1}{t^{1/2+\alpha/2}(t_1-t)} \big((t_1-t)^{\alpha/2}) - (t_1^{\alpha/2} - t^{\alpha/2})\big), \end{aligned}$$

здесь $(t_1-t)^{\alpha/2} > (t_1^{\alpha/2} - t^{\alpha/2}),\ \ 0<\alpha<1,\ \ t_1>t$, и, следовательно,

$$J_{6,2} \leqslant C_{37} \frac{1}{t^{1/2+\alpha/2}(t_1-t)^{1-\alpha/2}}.$$

Применим найденные оценки интегралов $J_{6,1}, J_{6,2}$ в неравенстве (4.31)

$$|J_6| \leqslant C_{38}(M_2+M_3) \frac{1}{t^{1+\alpha/2}}\, e^{-\frac{x^2}{32at}} (t_1-t)^{\alpha/2}. \tag{4.32}$$

И наконец, рассмотрим разность потенциалов J_7. Вычислим интеграл, используя формулу (4.8),

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty G_{xx}(x,y;t-\tau)\, dy = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \big(-\Gamma_{xy}(x-y,t-\tau)$$

$$-\,\Gamma_{xy}(x+y,t-\tau)\big)\,dy = 2\int\limits_0^t \Gamma_x(x,t-\tau)\,d\tau$$

$$= -2\int\limits_0^t \frac{x}{a\sqrt{a\pi(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}}\,d\tau = -\frac{4}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} e^{\xi^2}\,d\xi = -\frac{2}{a}\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}},$$

тогда

$$J_7 = -\frac{2}{a}\Big(f_0(x,t)\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - f_0(x,t_1)\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at_1}}\Big)$$

$$= -\frac{2}{a}\big(f_0(x,t)-f_0(x,t_1)\big)\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - f_0(x,t_1)\big(\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at_1}}\big).$$

Оценив разность

$$|\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at_1}}| = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_t^{t_1}\frac{x}{\tau^{3/2}}e^{\frac{x^2}{4a\tau}}\,d\tau$$

$$\leqslant C_{39}\int\limits_t^{t_1}\frac{1}{\tau^{1-\alpha/2+\alpha/2}}d\tau \leqslant C_{40}\frac{1}{t^{\alpha/2}}(t_1-t)^{\alpha/2},$$

мы получим

$$|J_7| \leqslant C_{41}(M_1+M_3)\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}\,e^{-\frac{x^2}{32at}}(t_1-t)^{\alpha/2}.(t_1-t)^{\alpha/2}. \tag{4.33}$$

В силу оценок (4.30), (4.32), (4.33) интегралов $J_5,\ J_6,\ J_7$ будем иметь

$$|\partial_x^2 v_0(x,t) - \partial_x^2 v_0(x,t_1)|$$
$$\leqslant C_{42}(M_1+M_2+M_3)\frac{1}{t^{1+\alpha/2}}\,e^{-\frac{x^2}{32at}}(t_1-t)^{\alpha/2}, \tag{4.34}$$

где $M_1+M_2+M_3 = |f_0|_{B^{\alpha}_{0,2}(D_T)}$. Такой же оценке удовлетворяет производная $\partial_t v_0(x,t) = a\partial_x^2 v_0(x,t) + f_0(x,t)$. Отсюда получим

$$\Big[t^{1+\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}\partial_x^2 v_0\Big]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} + \Big[t^{1+\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}\partial_t v_0\Big]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \leqslant C_{43}|f_0|_{B^{\alpha}_{0,2}(D_T)}. \tag{4.35}$$

Мы представили решение задачи (4.1), (4.2) в виде (4.10). Составим разность производных $\partial_x v_0(x,t)$, положив $t_1/2 \leqslant t < t_1$,

$$\partial_x v_0(x,t) - \partial_x v_0(x,t_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^\infty \big(f_0(y,\tau) - f_0(x,\tau)\big) G_x(x,y;t_1-\tau)\,dy \\
&+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \big(f_0(y,\tau) - f_0(x,\tau)\big)\big(G_x(\cdot;t-\tau) - G_x(\cdot;t_1-\tau)\big)\,dy \\
&+ \int\limits_0^t f_0(x,\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty \big(G_x(\cdot;t-\tau) - G_x(\cdot;t_1-\tau)\big)\,dy \\
&- \int\limits_t^{t_1} f_0(x,\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty G_x(\cdot;t_1-\tau)\,dy\Big) = \sum_{i=8}^{11} J_i.
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

Интегралы $J_8,\ J_9$ оцениваются так же, как интегралы $J_5,\ J_6$ с той лишь разницей, что в формуле (4.36) содержится G_x, а в (4.29) – G_{xx}. Учитывая это, получим

$$
\begin{aligned}
|J_8| + |J_9| &\leqslant C_{44}(M_2+M_3)\frac{1}{t^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{32at}} (t_1-t)^{\frac{1+\alpha}{2}} \\
&\leqslant C_{45}(M_2+M_3)\frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{32at}} (t_1-t)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
|J_{10}| &\leqslant C_{45} M_1 \Big| \int\limits_0^t f_0(x,\tau) d\tau \int\limits_t^{t_1} d\tau_1 \int\limits_0^\infty G_{x\tau_1}(x,y;\tau_1-\tau)\,dy \Big| \\
&\leqslant C_{46} M_1 \int\limits_t^{t_1} d\tau_1 \int_0^t \frac{d\tau}{\tau(\tau_1-\tau)^2} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{y^2}{16a\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{16a(\tau_1-\tau)}}\,dy.
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

Увеличим область интегрирования в интеграле по y до $(-\infty,\infty)$ и применим формулу (4.7), затем разобьём интеграл по τ на два:

$\int\limits_0^t = \int\limits_0^{t/2} + \int\limits_{t/2}^t$, т.к. мы получили в интеграле функции с неинтегрируемыми особенностями, тогда

$$
\begin{aligned}
|J_{10}| \leqslant C_{48} M_1 e^{-\frac{x^2}{16at_1}} \Bigg(\int\limits_t^{t_1} \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau_1}(\tau_1 - t/2)^{3/2}} \int\limits_0^{t/2} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \\
+ \frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_t^{t_1} \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau_1}} \int\limits_{t/2}^{t} \frac{d\tau}{(\tau_1 - \tau)^{3/2}} \Bigg) \leqslant C_{49} M_1 e^{-\frac{x^2}{32at}} \frac{1}{t} (t_1 - t)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

Рассмотрим потенциал J_{11}. Принимая во внимание соотношение $G_x(x, y; \cdot) = -\Gamma_y(x - y, \cdot) - \Gamma_y(x + y, \cdot)$, проинтегрируем по y, тогда

$$
J_{11} \leqslant C_{50} M_1 \int\limits_t^{t_1} \frac{1}{\tau\,(t_1 - \tau)^{1/2}}\, d\tau \leqslant C_{51}\, M_1\, \frac{1}{t}\, e^{-\frac{x^2}{32at}}\, (t_1 - t)^{1/2}. \tag{4.40}
$$

Итак, для разности $\partial_x v_0(x, t) - \partial_x v_0(x, t_1)$, определяемой формулой (4.36), на основании оценок (4.37), (4.38), (4.40) будем иметь

$$
|\partial_x v_0(x, t) - \partial_x v_0(x, t_1)| \leqslant C_{52}(M_2 + M_3) \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{32at}} (t_1 - t)^{1/2},
$$

отсюда будет следовать

$$
[t e^{\frac{x^2}{32at}} \partial_x v_0]^{(1/2)}_{t, D_T} \leqslant C_{52}(M_2 + M_3). \tag{4.41}
$$

Собрав оценки (4.16), (4.18), (4.28), (4.41), мы получим требуемую оценку

$$
|v_1|_{B^{2+\alpha}_{0,2}(D_T)} \leqslant C_1 |f_0|_{B^{\alpha}_{0,2}(D_T)}.
$$

2. Рассмотрим задачу (4.1), (4.2) при $k = 1$. Распишем норму функции $f_1(x, t)$

$$
\begin{aligned}
|f_1|_{B^{\alpha}_0(D_T)} = |e^{\frac{x^2}{16at}} f_1|_{D_T} + [t^{\alpha/2}\, e^{\frac{x^2}{16at}} f_1]^{(\alpha)}_{x, D_T} \\
+ [t^{\alpha/2}\, e^{\frac{x^2}{16at}} f_1]^{(\alpha/2)}_{t, D_T} = M_4 + M_5 + M_6,
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

отсюда найдём оценки

$$
\begin{aligned}
|f_1(x,t)| &\leqslant M_4 e^{-\frac{x^2}{16at}},\\
|f_1(x,t)-f_1(z,t)| &\leqslant M_5 \frac{1}{t^{\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{16at}} |x-z|^{\alpha}, \\
|f_1(x,t)-f_1(x,t_1)| &\leqslant M_6 \frac{1}{t^{\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{16at}} |t-t_1|^{\alpha/2}.
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

Решение задачи (4.1), (4.2) при $k=1$ имеет вид

$$
v_1(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty f_1(y,t)\big(\Gamma(x-y,t-\tau)-\Gamma(x+y,t-\tau)\big)dy. \tag{4.44}
$$

Оценим функции $\partial_x^m v_1,\ m=0,1$,

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^m v_1(x,t)| &= \Big| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty f_1(y,t)\, \partial_x^m\, G(x,y;t-\tau)\, dy \Big| \\
&\leqslant C_{53}\, M_4\, e^{-\frac{x^2}{16at}}.
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

Производную $\partial_x^2 v_1(x,t)$ представим в виде (4.17) с f_1 вместо f_0 и оценим её так же, приняв во внимание, что в интегралах вместо весовых функций τ^{-1} и $\tau^{-1-\alpha/2}$ будут τ^0 и $\tau^{-\alpha/2}$ согласно определениям норм функций f_0 и f_1, в результате получим

$$
|\partial_x^m v_1(x,t)| \leqslant C_{54}(M_4+M_5) e^{-\frac{x^2}{32at}}. \tag{4.46}
$$

Аналогично выкладкам в пункте 1 установим оценки

$$
|\partial_x^2 v_1(x,t) - \partial_z^2 v_1(z,t)| \leqslant C_{55}(M_4+M_5)\frac{1}{t^{\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{32at}} |x-z|^{\alpha}, \tag{4.47}
$$

$$
|\partial_x^2 v_1(x,t) - \partial_x^2 v_1(x,t_1)| \leqslant C_{56}(M_4+M_5)\frac{1}{t^{\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{32at}} |t-t_1|^{\alpha/2}. \tag{4.48}
$$

Такие же оценки мы получим для производной $\partial_t v_1 = a\partial_x^2 v_1(x,t) + f_1(x,t)$.

На основании неравенств (4.47), (4.48) получим

$$
[t^{\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} v_{1xx}]^{(\alpha)}_{x,D_T} + [t^{\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} v_{1t}]^{(\alpha)}_{x,D_T} \leqslant C_{57}(M_4+M_5), \tag{4.49}
$$

$$
[t^{\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} v_{1xx}]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} + [t^{\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} v_{1t}]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \leqslant C_{58}(M_4+M_5). \tag{4.50}
$$

При оценке разности $\partial_x v_1(x,t) - \partial_x v_1(x,t_1)$ мы воспользуемся формулой (4.36), записав в интегралах вместо весовых функций τ^{-1} и $\tau^{-1-\alpha/2}$ функции τ^0 и $\tau^{-\alpha/2}$, тогда найдём

$$|\partial_x v_1(x,t) - \partial_x v_1(x,t_1)| \leqslant C_{59}(M_5 + M_6)e^{-\frac{x^2}{32at}}(t_1 - t)^{1/2},$$

отсюда будет следовать

$$[e^{\frac{x^2}{32at}}\partial_x v_1]^{(1/2)}_{t,D_T} \leqslant C_{60}(M_5 + M_6). \tag{4.51}$$

Собрав оценки (4.46), (4.49), (4.50), (4.51), будем иметь

$$|v_1|_{B_2^{2+\alpha}(D_T)} \leqslant C_2|f_1|_{B_0^\alpha(D_T)}$$

с коэффициентом в показателе экспоненты весовой функции $c_0^2 = \frac{1}{32a}$.
□

§5. Сингулярные решения задачи (1.2)–(1.4)

Пусть $D_{\delta_0,T} = (0,\delta_0)\times(0,T)$, $D'_{\delta_0,T} = (\delta_0,\infty)\times(0,T)$.

Рассмотрим две задачи с неизвестными функциями $V_0(x,t)$, $V_1(x,t)$

$$\partial_t V_k - \mathcal{A}(x,t,\partial_x)V_k = 0 \ \text{ в } D_T, \tag{5.1}$$

$$V_k\,|_{t=0} = 0 \ \text{ в } D, \tag{5.2}$$

$$V_k\,|_{x=0} = A_k\,t^k,\ t\in\sigma_T,\ k=0,1, \tag{5.3}$$

где оператор $\mathcal{A}(x,t,\partial_x)$ определён по формуле (1.1), а постоянные A_k, не равные нулю, заданы формулами (2.9), (2.10).

В задаче (5.1)–(5.3) при $k=0$ не выполнено условие согласования нулевого порядка: $0\neq A_0$ и выполнено условие согласования первого порядка.

В задаче (5.1)–(5.3) при $k=1$ выполнено условие согласования нулевого порядка и не выполнено условие согласования первого порядка: $0\neq A_1$.

Теорема 5.1. *Пусть коэффициенты* $a(x,t)$, $a_1(x,t)$, $a_0(x,t)$ *оператора* $\mathcal{A}(x,t,\partial_x)$ *принадлежат пространству* $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $\alpha\in(0,1)$, $A_0\neq 0$, $A_1\neq 0$.

Тогда найдутся $\delta_0>0$, $T_0>0$ *такие, что каждая из задач* (5.1)–(5.3) *имеет единственное решение* $V_0(x,t)\in B_0^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})$, $V_1(x,t)\in$

$B_2^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})$, $V_k(x,t) \in C_{\ x}^{2+\alpha,}{}_{\ t}^{1+\alpha/2}(D'_{\delta_0,T_0})$, $k=0,1$, *и выполняются оценки*

$$|V_0|_{B_0^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})} \leqslant C_1|A_0|, \tag{5.4}$$

$$|V_1|_{B_2^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})} \leqslant C_2|A_1|, \tag{5.5}$$

$$|V_k|^{(2+\alpha)}_{D'_{\delta_0,T_0}} \leqslant C_3|A_k|, \quad k=0,1. \tag{5.6}$$

Доказательство. В задачах (5.1)–(5.3) произведём замену

$$V_k = w_k(x,t) + W_k(x,t),\ k=0,1, \tag{5.7}$$

где функции $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ являются решениями задач (A.1)–(A.3) для однородного уравнения теплопроводности (A.1) с коэффициентом $a=a(0,0)$ и удовлетворяют условиям (5.2), (5.3). Согласно Теореме A.1 $w_0(x,t) \in B_0^{2+\alpha}(D_T)$, $w_1(x,t) \in B_2^{2+\alpha}(D_T)$ с коэффициентом $c_0^2 = \frac{1}{16a}$ в показателе экспоненты весовой функции, и для них выполняются оценки (A.6), (A.7). При $x \geqslant \delta_0$ согласно Следствию A.1.1 $w_k(x,t) \in C_{\ x}^{2+\alpha,}{}_{\ t}^{1+\alpha/2}(D'_{\delta_0,T_0})$, $k=0,1$.

Тогда для функций $W_k(x,t)$ мы получим задачи

$$\partial_t W_k - a(0,0)\partial_x^2 W_k = F_{1,k}(x,t;W_k) + F_{2,k}(x,t;w_k) \ \text{ в } D_T, \tag{5.8}$$

$$V_k\,|_{t=0} = 0 \ \text{ в } D, \tag{5.9}$$

$$V_k\,|_{x=0} = 0,\ \ t\in\sigma_T,\ \ k=0,1, \tag{5.10}$$

где

$$F_{1,k}(x,t;W_k) = \big(a(x,t)-a(0,0)\big)\partial_x^2 W_k + a_1(x,t)\partial_x W_k + a_0(x,t)W_k, \tag{5.11}$$

$$F_{2,k}(x,t;w_k) = \big(a(x,t)-a(0,0)\big)\partial_x^2 w_k + \partial_x w_k + a_0(x,t)w_k. \tag{5.12}$$

Функции $F_{2,0}(x,t;w_k)$ и $F_{2,1}(x,t;w_k)$ принадлежит пространствам $B_{0,2}^{\alpha}(D_T)$ и $B_0^{\alpha}(D_T)$ соответственно и подчиняется оценкам

$$|F_{2,0}|_{B_{0,2}^{\alpha}(D_T)} \leqslant C_4|A_0|,\ |F_{2,1}|_{B_0^{\alpha}(D_T)} \leqslant C_5|A_1| \tag{5.13}$$

согласно Теореме A.1.

Применим Теорему 4.1 для задачи (5.8) – (5.10). Для этого оценим функции $F_{1,0}$ и $F_{1,1}$.

1. Рассмотрим функцию $F_{1,0}$. По определению

$$\begin{aligned} |F_{1,0}|_{B_{0,2}^{\alpha}(D_T)} &= |te^{\frac{x^2}{32at}}F_{1,0}|_{D_T} \\ &+ [t^{1+\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}F_{1,0}]^{(\alpha)}_{x,D_T} + [t^{1+\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}F_{1,0}]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где коэффициент $c_0^2 = \frac{1}{32a}$ в показателе экспоненты весовой функции был определён в Теореме 4.1. Оценим норму первого слагаемого $N_1 := |(a(x,t) - a(0,0))W_{0xx}|_{B^{\alpha}_{0,2}(D_T)}$ функции (5.11).

Применим неравенство

$$|a(x,t) - a(0,0)| \leqslant C_6(x^{\alpha} + t^{\alpha/2}), \tag{5.15}$$

тогда слагаемые, составляющие норму N_1, оценятся выражением

$$I_1 = C_7(x^{\alpha} + t^{\alpha/2})\Big(t^{1+\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} \frac{|W_{0xx}(x,t) - W_{0zz}(z,t)|}{|x-z|^{\alpha}} + t^{1+\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} \frac{|W_{0xx}(x,t) - W_{0xx}(x,t_1)|}{|t-t_1|^{\alpha/2}} + |te^{\frac{x^2}{32at}} W_{0xx}|\Big).$$

Перейдём к супремуму по области D_t в слагаемых с производной W_{0xx}, умноженной на весовые функции, и мы получим

$$N_1 \leqslant C_8(x^{\alpha} + t^{\alpha/2})\Big(|te^{\frac{x^2}{32at}} W_{0xx}|_{D_t} + [t^{1+\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} W_{0xx}]^{(\alpha)}_{x,D_t} + [t^{1+\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} W_{0xx}]^{(\alpha/2)}_{t,D_t}\Big). \tag{5.16}$$

Оценим норму второго слагаемого в (5.11) $N_2 = |a_1(x,t)W_{0x}|_{B^{\alpha}_{0,2}(D_T)}$, для этого рассмотрим выражение

$$I_2 = C_9 t^{\frac{1+\alpha}{2}} |\sqrt{t} e^{\frac{x^2}{32at}} W_{0x}| + t^{1+\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} \frac{|W_{0x}(x,t) - W_{0z}(z,t)|}{|x-z|^{\alpha}} + t^{1+\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} \frac{|W_{0x}(x,t) - W_{0x}(x,t_1)|}{|t-t_1|^{\alpha/2}}.$$

Учитывая, что производная W_{0x} дифференцируема по x, будем иметь

$$\left(\frac{|W_{0x}(x,t) - W_{0z}(z,t)|}{|x-z|}\right)^{\alpha} \big|W_{0x}(x,t) - W_{0z}(z,t)\big|^{1-\alpha} \leqslant 2|W_{0xx}|^{\alpha}|W_{0x}^{1-\alpha}| \leqslant 2\Big(\gamma\varepsilon|W_{0xx}| + (1-\gamma)\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}|W_{0x}|\Big),$$

здесь мы применили неравенство Юнга $a\,b \leqslant \gamma\varepsilon a + (1 - \gamma\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} b$, где a, b, γ, ε – произвольные положительные числа. Положим $\gamma = 1/2$, $\varepsilon = 1$, тогда

$$\frac{|W_{0x}(x,t) - W_{0z}(z,t)|}{|x-z|^{\alpha}} \leqslant |W_{0xx}| + |W_{0x}| \tag{5.17}$$

и

$$N_2 \leqslant C_{10}\Big(t^{\frac{1+\alpha}{2}}|t^{1/2}e^{\frac{x^2}{32at}}W_{0x}|_{D_t} + t^{\alpha/2}|te^{\frac{x^2}{32at}}W_{0xx}|_{D_t} + t^{1/2}[te^{\frac{x^2}{32at}}W_{0x}]^{(1/2)}_{t,D_t}\Big). \quad (5.18)$$

Оценим норму $N_3 = |a_1 W_0|_{B^{\alpha}_{0,2}(D_T)}$. Для этого воспользуемся неравенством (5.17)

$$\frac{|W_{0x}(x,t) - W_{0z}(z,t)|}{|x-z|^{\alpha}} + \frac{|W_{0x}(x,t) - W_{0x}(x,t_1)|}{|t-t_1|^{\alpha/2}} \leqslant |W_{0x}| + |W_{0t}| + 4|W_0|,$$

и мы получим

$$N_3 \leqslant C_{11}\Big(t^{1+\alpha/2}|e^{\frac{x^2}{32at}}W_0|_{D_t} + t^{\frac{1+\alpha}{2}}|t^{1/2}e^{\frac{x^2}{32at}}W_{0x}|_{D_t} + t^{\alpha/2}|te^{\frac{x^2}{32at}}W_{0t}|_{D_t}\Big). \quad (5.19)$$

Собирая оценки (5.16), (5.18) и (5.19), мы получим оценку нормы (5.14) функции $F_{1,0}$

$$|F_{1,0}|_{B^{\alpha}_{0,2}(D_T)} \leqslant \mu_0(x,t)\big|W_0\big|_{B_0^{2+\alpha}(D_T)}, \quad (5.20)$$

$$\mu_0(x,t) = C_{12}\Big(x^{\alpha} + t^{\alpha/2} + t^{1/2} + t^{\frac{1+\alpha}{2}} + t^{1+\alpha/2}\Big). \quad (5.21)$$

2. Рассмотрим функцию $F_{1,1}(x,t;W_1)$, её норма в пространстве $B_0^{\alpha}(D_T)$ имеет вид

$$|F_{1,1}|_{B_0^{\alpha}(D_T)} = |e^{\frac{x^2}{32at}}F_{1,1}|_{D_T} + [t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}F_{1,1}]^{(\alpha)}_{x,D_T} + [t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}F_{1,0}]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}. \quad (5.22)$$

Оценим $N_4 = |(a(x,t) - a(0,0))W_{1xx}|_{B_0^{\alpha}(D_T)}$ так же, как норму (5.14). Применим неравенства (5.15) и следующее:

$$t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}|W_{1xx}| \leqslant t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}|W_{1xx}(x,t) - W_{1xx}(x,0)| \leqslant t^{\alpha/2}[t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}W_{1xx}]^{(\alpha/2)}_{t,D_t},$$

где $W_{1xx}(x,0) = 0$ в силу начального условия (5.9), тогда

$$N_4 \leqslant C_{13}\big(x^{\alpha} + t^{\alpha/2}\big)\Big(\big|e^{\frac{x^2}{32at}}W_{1xx}\big|_{D_t} + \big[t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}W_{1xx}\big]^{(\alpha)}_{x,D_t}\Big) + C_{14}t^{\alpha/2}\big[t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{32at}}W_{1xx}\big]^{(\alpha/2)}_{t,D_t}. \quad (5.23)$$

Далее, при оценке нормы $N_5 = |(a_1 W_{1x}|_{B_0^\alpha(D_T)}$ воспользуемся неравенствами (5.17) и следующими:

$$e^{\frac{x^2}{32at}}\big|W_{1x}(x,t)\big| = e^{\frac{x^2}{32at}} t^{1/2} \frac{\big|W_{1x}(x,t) - W_{1x}(x,0)\big|}{t^{1/2}} \leqslant t^{1/2}\big[e^{\frac{x^2}{32at}} W_{1x}\big]^{1/2}_{t,D_t},$$

$$t^{\alpha/2} e^{\frac{x^2}{32at}} \frac{\big|W_{1x}(x,t) - W_{1x}(x,t_1)\big|}{|t-t_1|^{\alpha/2}} \leqslant t^{1/2}\big[e^{\frac{x^2}{32at}} W_{1x}\big]^{(1/2)}_{t,D_t}$$

тогда получим

$$N_5 \leqslant C_{15}\Big(t^{\alpha/2}\big|e^{\frac{x^2}{32at}} W_{1x}\big|_{t,D_t} + t^{1/2}\big[e^{\frac{x^2}{32at}} W_{1x}\big]^{(1/2)}_{t,D_t}\Big). \tag{5.24}$$

И наконец, рассмотрим норму $N_6 = |(a_0 W_1|_{B_0^\alpha(D_T)}$. Применим формулу (5.17) и неравенство

$$e^{\frac{x^2}{32at}}\big|W_1(x,t) - W_1(x,0)\big| \leqslant \int\limits_0^t \big|e^{\frac{x^2}{32a\tau}}\big|W_{1\tau}(x,\tau)\,d\tau\big| \leqslant t e^{\frac{x^2}{32at}}\big|W_{1t}\big|,$$

т.к. $W(x,0)=0$, тогда

$$N_6 \leqslant C_{16}\Big((t^{\alpha/2}+t)\big|e^{\frac{x^2}{32at}} W_{1t}\big|_{D_t} + t^{\alpha/2}\big|e^{\frac{x^2}{32at}} W_{1x}\big|_{D_t} + t^{\alpha/2}\big|e^{\frac{x^2}{32at}} W_1\big|_{D_t}\Big). \tag{5.25}$$

На основании оценок (5.23), (5.24), (5.25) будем иметь

$$\big|F_{1,1}\big|_{B_0^\alpha(D_T)} \leqslant \mu_0(x,t)\big|W_1\big|_{B_2^{2+\alpha}(D_T)}, \tag{5.26}$$

$$\mu_1(x,t) = C_{17}\big(x^\alpha + t^{\alpha/2} + t^{1/2} + t\big). \tag{5.27}$$

3. Обратимся к задачам (5.8) – (5.10), они является задачами (4.1), (4.2), для которых установлена Теорема 4.1 и оценки (4.3), (4.4) их решений. Применим Теорему 4.1 к задачам (5.8) – (5.10)

$$\big|W_0\big|_{B_0^{2+\alpha}(D_T)} \leqslant C_{18}\big|F_{1,0}\big|_{B_{0,2}^\alpha(D_T)} + \big|F_{2,0}\big|_{B_{0,2}^\alpha(D_T)}, \tag{5.28}$$

$$\big|W_1\big|_{B_2^{2+\alpha}(D_T)} \leqslant C_{19}\big|F_{1,1}\big|_{B_0^\alpha(D_T)} + \big|F_{2,1}\big|_{B_0^\alpha(D_T)}. \tag{5.29}$$

Для функций $F_{1,k},\ k=0,1$, были получены оценки (5.20), (5.26)

$$\big|F_{1,0}\big|_{B_{0,2}^\alpha(D_T)} \leqslant \mu_0(x,t)\big|W_0\big|_{B_0^{2+\alpha}(D_T)},$$

$$\big|F_{1,1}\big|_{B_0^\alpha(D_T)} \leqslant \mu_0(x,t)\big|W_1\big|_{B_2^{2+\alpha}(D_T)},$$

где $\mu_0(x,t) = C_{12}\big(x^\alpha + t^{\alpha/2} + t^{1/2} + t^{\frac{1+\alpha}{2}} + t^{1+\alpha/2}\big)$, $\mu_1(x,t) = C_{17}\big(x^\alpha + t^{\alpha/2} + t^{1/2} + t\big)$.

Подберём T_0 и δ_0 такими, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu_k(x,t) \leqslant q,\ q \in (0,1),\ k = 0,1. \tag{5.30}$$

Найденные оценки позволяют применить метод, изложенный в [14], глава IV.

Покроем область $(0,\infty)$ счётным множеством интервалов $B_{\kappa,\delta}(\xi_\kappa)$, $B_{\kappa,2\delta}(\xi_k)$ длинами δ и 2δ и с центрами в точках ξ_κ. Пронумеруем интервалы таким образом, что при $\kappa \in \mathfrak{N}_1$ интервалы $B_{\kappa,\delta}(\xi_k)$ содержат границу области $x = 0$ и при $\kappa \in \mathfrak{N}_2$ интервалы целиком содержатся в области $(0,\infty)$. Перейдя к локальным координатам, в случае $\kappa \in \mathfrak{N}_1$ мы получим задачи вида (5.8) – (5.10) и при $\kappa \in \mathfrak{N}_2$ – задачу Коши для уравнения (5.8).

В результате мы устанавливаем существование и единственность решений задач (5.8) – (5.10) таких, что $W_0(x,t) \in B_0^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})$, $W_1(x,t) \in B_2^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})$, $W_k(x,t) \in C_{\ x\ \ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D'_{\delta_0,T_0})$, $k = 0,1$, и находим оценки

$$|W_0|_{B_0^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})} \leqslant C_{20}|F_{2,0}|_{B_{0,2}^\alpha(D_T)} \leqslant C_{21}|A_0|, \tag{5.31}$$

$$|W_1|_{B_2^{2+\alpha}(D_{\delta_0,T_0})} \leqslant C_{22}|F_{2,1}|_{B_0^\alpha(D_T)} \leqslant C_{23}|A_1|, \tag{5.32}$$

$$|W_k|^{(2+\alpha)}_{D'_{\delta_0,T_0}} \leqslant C_{24}|F_{2,1}|_{B_0^\alpha(D_T)} \leqslant C_{25}|A_k|,\ \ k = 0,1. \tag{5.33}$$

Вспоминая замену (5.31): $V_k = w_k(x,t) + W_k(x,t)$, $k = 0,1$, в задачах (5.1)–(5.3), где функции $w_k(x,t)$ определены в Теореме A.1, мы получим Теорему 5.1. □

§6. Доказательство Теоремы 3.1.

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4) с неизвестной функцией $u(x,t)$.

В Теореме 5.1 были построены сингулярные решения $V_k(x,t)$, $k = 0,1$, задачи (1.1)–(1.4) с условиями на границе области $V_k\ |_{x=0}= A_k\, t^k$, $t \in \sigma_T$, $k = 0,1$, где

$$A_0 := \varphi(0) - u_0(0),$$
$$A_1 := \varphi'(t)|_{t=0} - \mathcal{A}(x,t,\partial_x)u_0(x)|_{x=0,t=0} - f(0,0)\big).$$

В задаче (1.1)–(1.4) произведём замену неизвестной функции

$$u(x,t) = v(x,t) + V_1(x,t) + V_2(x,t),$$

тогда для функции $v(x,t)$ мы получим задачу

$$\partial_t v - \mathcal{A}(x,t,\partial_x)v = f(x,t) \text{ в } D_T, \tag{6.1}$$

$$v\,|_{t=0} = u_0(x) \text{ в } D, \tag{6.2}$$

$$v\,|_{x=0} = \varphi(t) - A_0 - A_1 t,\ t\in\sigma_T. \tag{6.3}$$

Условия согласования в этой задаче имеют вид

$$\begin{aligned}
&u_0(0) = \varphi(0) - A_0 \equiv \varphi(0) - (\varphi(0) - u_0(0));\\
&\big(\mathcal{A}(x,t,\partial_x)u_0(x)\big)|_{x=0,t=0} + f(0,0) = \varphi'(t)|_{t=0}\\
&-\big(\varphi'(t)|_{t=0} - \mathcal{A}(x,t,\partial_x)u_0(x)|_{x=0,t=0} - f(0,0)\big),
\end{aligned}$$

и они выполнены. Но тогда при условиях Теоремы 3.1 задача (6.1)–(6.3) имеет единственное решение [14] $v(x,t)\in C_x^{2+\alpha,}{}_t^{1+\alpha/2}(\overline{D}_{t_0})$, и для него справедлива оценка
$\big|v\big|^{(2+\alpha)}_{D_{t_0}} \leqslant C_1\Big(\big|u_0\big|^{(2+\alpha)}_{D} + \big|f\big|^{(\alpha)}_{D_T} + \big|\varphi - A_0 - A_1 t\big|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}\Big).$ □

Приложение A.

Рассмотрим две модельные задачи в $D_T := (0,\infty)\times(0,T)$

$$\partial_t w_k - \partial_x^2 w_k = 0 \text{ в } D_T, \tag{A.1}$$

$$w_k|_{t=0} = 0 \text{ в } D, \tag{A.2}$$

$$w_k|_{x_n=0} = A_k t^k,\ \ t\in\sigma_T =: (0,T),\ \ k=0,1, \tag{A.3}$$

где $a>0,\ A_1,\ A_2$ – постоянные.

В [10] были построены решения задач (A.1)–(A.3) в виде

$$w_0(x,t) = A_0 \mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} \tag{A.4}$$

$$w_1(x,t) = A_1\frac{1}{\mathrm{i}^2\mathrm{erfc}0}t\,\mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}},\ \ \mathrm{i}^2\mathrm{erfc}0 = 1/2, \tag{A.5}$$

где интегралы вероятностей $\mathrm{erfc}z,\ \mathrm{i}^2\mathrm{erfc}z$ определены по формулам (2.12).

Теорема A.1. *Пусть* $\alpha\in(0,1),\ A_0\neq 0,\ A_1\neq 0.$

Тогда $w_0(x,t) \in B_0^{2+\alpha}(D_T)$, $w_1(x,t) \in B_2^{2+\alpha}(D_T)$ *и справедливы оценки*

$$|w_0|_{B_0^{2+\alpha}(D_T)} \leqslant C_1|A_0|, \tag{A.6}$$
$$|w_1|_{B_2^{2+\alpha}(D_T)} \leqslant C_2|A_1|. \tag{A.7}$$

Следствие А.1.1. *При* $x \geqslant \delta_0,\ \delta_0 > 0,\ w_k(x,t) \in C_{\ x\ \ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}'_{\delta_0,T})$, *где* $D'_{\delta_0,T} = (\delta_0, \infty) \times (0,T)$.

Теорема А.1 и Следствие А.1.1 используются при доказательстве Теоремы 5.1.

Доказательство Теоремы А.1. Рассмотрим функцию $w_0(x,t)$. Она ограничена, но разрывна в точке $x = 0,\ t = 0$ и удовлетворяет оценке

$$|w_0| \leqslant C_3 e^{-\frac{x^2}{16at}}|A_0|, \tag{A.8}$$

т.к. erfc $\frac{x}{2\sqrt{at}} \leqslant C_3 e^{-\frac{x^2}{8at}}$, и мы уменьшили показатель экспоненты в оценке с тем, чтобы он был одинаковым во всех последующих оценках.

С помощью формул (2.12), (2.13) найдём производные

$$\partial_x w_0(x,t) = -A_0 \frac{1}{\sqrt{a\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}, \tag{A.9}$$
$$\partial_x^2 w_0(x,t) = \frac{1}{a}\partial_t w_0(x,t) = A_0 \frac{x}{2a\sqrt{a\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \tag{A.10}$$

Оценим их модули, при оценке старших производных применим неравенство (4.6), тогда получим

$$\begin{aligned} &|\partial_x w_0| \leqslant C_4 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{16at}}|A_0|, \\ &|\partial_x^2 w_0| = \frac{1}{a}|\partial_t w_0| \leqslant C_5 \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{16at}}|A_0|. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Оценим константы Гёльдера производных (А.10).

Рассмотрим разность производной $\partial_x^2 w_0(x,t)$ по t, положив, для определённости, $t_1/2 \leqslant t < t_1$. При её оценке применим неравенство (4.6), тогда

$$|\Delta_1| = |\partial_x^2 w_0(x,t) - \partial_x^2 w_0(x,t_1)|$$
$$= \big|A_0 \int\limits_t^{t_1} \partial_\tau \big(\frac{x}{2a\sqrt{a\pi\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a\tau}}\big) d\tau\big| \leqslant C_6 |A_0| \int\limits_t^{t_1} \frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{x^2}{8at_1}},$$

отсюда получим

$$|\Delta_1| \leqslant C_7 |A_0| \frac{1}{t^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{16at}} (t_1 - t)^{\alpha/2}. \tag{A.12}$$

Разность $\Delta_2 = \partial_x w_0(x,t) - \partial_x w_0(x,t_1)$ при $t_1/2 \leqslant t < t_1$, где производная $\partial_x w_0(x,t)$ определена формулой (A.9), оценится

$$|\Delta_2| = \big|A_0 \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int\limits_t^{t_1} \partial_\tau \big(\frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a\tau}}\big) d\tau\big| \leqslant C_8 |A_0| \frac{1}{t^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{16at}} \int\limits_t^{t_1} \frac{1}{\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}} d\tau,$$

отсюда получим две оценки для разности Δ_2

$$\begin{aligned} |\partial_x w_0(x,t) - \partial_x w_0(x,t_1)| &\leqslant C_9 |A_0| \frac{1}{t^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{16at}} |t - t_1|^{\frac{1+\alpha}{2}} \\ &\leqslant C_9 |A_0| \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{16at}} |t - t_1|^{1/2}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Оценим разность $\Delta_3 = \partial_x^2 w_0(x,t) - \partial_x^2 w_0(z,t)$ при $x < z$

$$|\Delta_3| = \Big|A_0 \int\limits_x^z \partial_\xi \big(\frac{\xi}{2a\sqrt{a\pi t^3}} e^{-\frac{\xi^2}{4at}}\big)\, d\xi\Big|$$
$$\leqslant C_7 \frac{1}{t^{1+\alpha/2}} |A_0| \int\limits_x^z \frac{1}{\xi^{1-\alpha}} \frac{\xi^{1-\alpha}}{t^{\frac{1-\alpha}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{4at}}\, d\xi.$$

Воспользовавшись неравенством (4.6), будем иметь

$$|\Delta_3| \leqslant C_{10} |A_0| \frac{1}{t^{1+\alpha/2}} e^{-\frac{x^2}{16at}} (z - x)^\alpha. \tag{A.14}$$

Для разностей

$$|\partial_t w_0(x,t) - \partial_t w_0(x,t_1)|,\ |\partial_t w_0(x,t) - \partial_t w_0(z,t)|$$

производной $\partial_t w_0(x,t) = a\partial_x^2 w_0(x,t)$ мы получим такие же оценки, как (A.12), (A.14).

Соберём оценки (A.8), (A.11), (A.12), (A.14)

$$|e^{\frac{x^2}{16at}}w_0| + |\sqrt{t}\, e^{\frac{x^2}{16at}}\, \partial_x w_0| + \sum_{2m_0+m=2} t\, e^{\frac{x^2}{16at}}\, |\partial_t^{m_0}\partial_x^m w_0|$$

$$+ \sum_{2m_0+m=2} t^{1+\alpha/2} e^{\frac{x^2}{16at}} \frac{|\partial_t^{m_0}\partial_x^m w_0(x,t) - \partial_{t_1}\partial_x^m w_0(x,t_1)|}{|t-t_1|^{\alpha/2}}$$

$$+ \sum_{2m_0+m=2} t^{1+\alpha/2} e^{\frac{x^2}{16at}} \frac{|\partial_t^{m_0}\partial_x^m w_0(x,t) - \partial_t\partial_z^m w_0(z,t)|}{|x-z|^{\alpha}} \leqslant C_{11}|A_0|.$$

Перейдём в этом неравенстве к супремуму в области D_T, тогда получим требуемую оценку нормы

$$|w_0|_{B_0^{2+\alpha}(D_T)} \leqslant C_{12}|A_0|.$$

2. Рассмотрим функцию $w_1(x,t) = A_1\frac{1}{2}t\, \mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}$. Пользуясь формулой (2.13) дифференцирования интегралов вероятностей и соотношениями (2.14), (2.15), найдем производные

$$\partial_x w_1 = -A_1\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{t}\, \mathrm{ierfc}\frac{x}{2\sqrt{at}},\ \ \partial_x^2 w_1 = \frac{1}{a}\partial_t w_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

В силу неравенств (2.13): $i^n\mathrm{erfc}\, z \leqslant i^n\mathrm{erfc}0$, $\ i^n\mathrm{erfc}\, 0 = \frac{1}{2^n\Gamma(n/2+1)}$ и $i\mathrm{erfc}z \leqslant 2e^{-z^2/2}i\mathrm{erfc}z/2$ мы получим

$$\sum_{2m_0+m=2} |e^{\frac{x^2}{16at}}\partial_t^{m_0}\partial_x^m w_1| \leqslant C_{13}|A_1| \tag{A.15}$$

Константы Гёльдера производных $\partial_x^2 w_1 = \frac{1}{a}\partial_t w_1$ оцениваются точно так же, как производных $\partial_x^2 w_0 = \frac{1}{a}\partial_t w_0$.

Рассмотрим, например, разность $\Delta_4 = \partial_x^2 w_1(x,t) - \partial_x^2 w_1(x,t_1)$, положив $t_1/2 \leqslant t < t_1$,

$$\big|\Delta_4\big| = \left|A_1\frac{1}{\sqrt{a}}\int_t^{t_1} \partial_\tau erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\, d\tau\right| \leqslant C_{14}\big|A_1\big|\int_t^{t_1} \frac{x}{\tau^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a\tau}}\, d\tau$$

$$\leqslant C_{12}\big|A_1\big|\frac{1}{t^{\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{8at_1}}\int_t^{t_1}\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha/2}} \leqslant C_{15}\big|A_1\big|\frac{1}{t^{\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{16at}}(t_1-t)^{\alpha/2}$$

и

$$[t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{16at}}\partial_x^2 w_1]^{\alpha/2}_{t,D_T} \leqslant C_{16}|A_1|.$$

Для разности $\partial_x w_1(x,t) - \partial_x w_1(x,t_1)$ мы установим оценки, как (A.7)

$$|\partial_x w_1(x,t) - \partial_x w_1(x,t_1)| \leqslant C_{17}|A_1|\frac{1}{t^{\alpha/2}}e^{-\frac{x^2}{16at}}|t-t_1|^{\frac{1+\alpha}{2}}$$
$$\leqslant C_{18}|A_1|e^{-\frac{x^2}{16at}}|t-t_1|^{1/2}. \quad \text{(A.16)}$$

Итак, мы установили, что функция $w_1(x,t)$ подчиняется оценке (A.7) и принадлежит пространству $B_2^{2+\alpha}(D_T)$. □

Доказательство Следствия A.1.1. Функции $w_0(x,t)$ и $w_1(x,t)$ удовлетворяют оценкам

$$\big[t^{1+\alpha/2}e^{\frac{x^2}{16at}}w_0\big]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T} \leqslant C_9\big|A_1\big|, \quad \big[t^{\alpha/2}e^{\frac{x^2}{16at}}w_1\big]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T} \leqslant C_{17}\big|A_1\big|,$$

которые обеспечат при $x \geqslant \delta_0$ принадлежность функций w_0 и w_1 пространству $C_{\,x}^{2+\alpha,}{}_{t}^{1+\alpha/2}\big(D'_{\delta_0,T}\big)$. □

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г. Аманну за ценные замечания и советы.

Список литературы

1. В. С. Белоносов, *Оценки решений параболических систем в весовых классах Гельдера и некоторые их приложения.* — Мат. сборник **110**, No. 2 (1979), 163–188.
2. В. С. Белоносов, Т. И. Зеленяк, *Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений,* Новосибирск, 1975.
3. В. А. Солонников, *Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи.* Препринт ЛОМИ No. P-2-77 (1977).
4. В. А. Солонников, А. Г. Хачатрян, *Оценки решений параболических начально-краевых задач в гёльдеровских нормах.* — Тр. МИАН СССР **147** (1980), 147–155.
5. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии в весовом гёльдеровском пространстве функций.* — Алгебра и анализ **5**, No. 1 (1993), 99–134.
6. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О задачах со свободными границами для параболических уравнений.* — Алгебра и анализ **12**, No. 6 (2000), 3–45.
7. Г. И. Бижанова, *Решение в весовом гельдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и Флорина для параболических уравнений второго порядка в ограниченной области.* — Алгебра и анализ, **7**, No. 2 (1995), 46–76.

8. G. Liberman, *Second Order Parabolic Differential Equations,* World Scientific, 1996.
9. Y. Martel, Ph. Souplet, *Small time boundary behavior of solutions of parabolic equations with noncompatible data.* — J. Math. Pures Appl. No. 79 (2000), 603–632.
10. Г. И. Бижанова, *Решение в пространствах Гельдера краевых задач для параболических уравнений при рассогласовании начальных и граничных данных.* — Современная математика. Фундаментальные направления **36** (2010), 12–23.
11. G. I. Bizhanova, *On the classical solvability of boundary value problems for parabolic equations with incompatible initial and boundary data.* — Progress in nonlinear differential equations and their applications **80** (2011), 57–80.
12. Г. И. Бижанова, *Classical solution of a nonregular conjunction problem for the heat equations.* — Математический журнал**10**, No. 3 (2010), 37–48.
13. Г. И. Бижанова, М.Н. Шаймарданова, *Решение нерегулярной задачи для уравнения теплопроводности с производной по времени в граничном условии.* — Алматы, Математический журнал **16**, No. 1 (2016), 35–57.
14. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М., Наука, 1967.
15. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М., Наука, 1979.

Bizhanova G. I. Investigation of the solvability of the first boundary – value problem for the parabolic equation under the nonfulfillment of the compatibility conditions of the initial and boundary data.

There is studied the first boundary – value problem for the parabolic equation of second order under the nonfulfillment of the compatibility conditions of the initial and boundary data. Existence, uniqueness, estimates of the solution are established. It is proved that the solution of the problem is the sum of the Hölder and singular functions that belong to the weighted Hölder spaces.

Институт математики
и математического
моделирования МОН РК,
ул. Пушкина, д. 125,
г. Алматы, Казахстан
E-mail: galina_math@mail.ru

Поступило 1 ноября 2021 г.