

В. В. Корняк

ПОДСИСТЕМЫ ИЗОЛИРОВАННОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ В КОНЕЧНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение разложения целого на части и исследование отношений частей к целому и отношений между частями внутри целого называют *мереологией*. В *квантовой мереологии* целое — это замкнутая квантовая система в заданном чистом состоянии, претерпевающая заданную унитарную эволюцию. В точном смысле замкнутой системой может быть только Вселенная в целом, в противном случае понятие замкнутой системы является приближенным.

Изучение взаимосвязей между выделенными подсистемами Вселенной (“наблюдаемая система”, “наблюдатель”, “измерительный прибор”, “окружающая среда” и т.д.) лежит в основе физики как науки. К фундаментальным проблемам квантовой механики и космологии относятся возникновение геометрии (и даже времени: механизм Пейджа–Вуттерса [1]) из квантовой запутанности [2–4].

Разделение целого на части по своей сути произвольно: оно зависит от используемых критериев разделения. Имеется два различных аспекта делимости квантовых систем.

1. Квантовые системы отделены друг от друга, если энергия взаимодействия между ними мала. Это более зримый, материальный критерий, хорошо согласующийся с обычной концепцией локальности. Количественно энергию взаимодействия между подсистемами A и B можно представить в виде

$$\Delta E(A, B) = E(A \cup B) - E(A) - E(B). \quad (1)$$

Это выражение получается из представления гамильтониана объединенной системы в виде суммы гамильтонианов подсистем и гамильтониана взаимодействия:

$$H_{A \cup B} = H_A \otimes \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \otimes H_B + \Delta H.$$

Ключевые слова: квантовая мереология, изолированная квантовая система, квантовые подсистемы, конечная квантовая механика, квантовая запутанность, энергия взаимодействия.

2. Подсистемы A и B разделены, если квантовые корреляции между ними малы. Этот более тонкий критерий имеет нелокальные проявления. Количественно квантовую запутанность между подсистемами можно описать, например, *взаимной информацией*

$$\mathcal{I}(A, B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B), \quad (2)$$

где S обозначает энтропию.

Между выражениями (1) и (2) имеется определенное структурное сходство. Однако они описывают совершенно разные типы связей между подсистемами.

Например, в модели эмерджентного времени Пейджа–Вуттерса предполагается, что вся вневременная Вселенная разделена на две подсистемы: “часы”, C , и остальную часть Вселенной, R . Гамильтониан Вселенной в этой модели имеет вид

$$H = H_C \otimes \mathbf{1}_R + \mathbf{1}_C \otimes H_R,$$

что предполагает нулевую энергию взаимодействия между C и R . С другой стороны, наличие нетривиальных квантовых корреляций между C и R лежит в основе модели Пейджа–Вуттерса.

Было бы интересно внимательнее посмотреть на взаимосвязи между этими двумя различными – энергетическим и информационным – аспектами квантовой разделимости. Соответствующие исследования требуют объемных и сложных символьных и численных вычислений. Мы разрабатываем и реализуем алгоритмы, основанные на методах компьютерной алгебры и вычислительной теории групп, для выполнения следующих задач. Изолированная квантовая система, построенная в рамках конечной квантовой механики, разлагается в тензорное произведение подсистем. С помощью редукции чистого квантового состояния “Вселенной” мы получаем смешанные состояния для подсистем. В результате у нас появляется возможность изучать энергии взаимодействий и квантовые корреляции между подсистемами, а также эволюции этих величин во времени.

§2. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ НА ПОДСИСТЕМЫ

2.1. Тензорное произведение гильбертовых пространств. Глобальным гильбертовым пространством K -компонентной квантовой системы является тензорное произведение локальных гильбертовых пространств компонент:

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^K \mathcal{H}_k. \quad (3)$$

Если $\dim \mathcal{H} = \mathcal{N}$ и $\dim \mathcal{H}_k = d_k$, то $\mathcal{N} = \prod_{k=1}^K d_k$.

Для любого d -мерного гильбертова пространства i -й элемент ортонормального базиса будет обозначаться символом $|i\rangle$, т.е.

$$|0\rangle = (1, 0, \dots, 0)^\top, |1\rangle = (0, 1, 0, \dots, 0)^\top, \dots, |d-1\rangle = (0, \dots, 0, 1)^\top.$$

Натуральное число i будем называть *индексом* базисного элемента $|i\rangle$.

Тензорные мономы базисных элементов локальных пространств образуют ортонормальный базис в глобальном гильбертовом пространстве:

$$|i\rangle = |i_1\rangle \otimes \dots \otimes |i_k\rangle \otimes \dots \otimes |i_K\rangle, \quad (4)$$

где $|i\rangle \in \mathcal{H}$, $|i_k\rangle \in \mathcal{H}_k$. Индекс глобального базисного элемента вычисляется из локальных индексов по формуле

$$i = i_1 (d_2 d_3 \dots d_K) + \dots + i_k (d_{k+1} \dots d_K) + \dots + i_{K-1} (d_K) + i_K. \quad (5)$$

2.2. Разложение гильбертова пространства в тензорное произведение. Мы можем обратить процедуру, поскольку (4) – взаимно однозначное соответствие: локальные индексы i_1, \dots, i_K однозначно восстанавливаются из глобального индекса i как последовательность остатков от деления на локальные размерности с помощью следующего алгоритма:

$$\begin{aligned} &k \leftarrow K, \tilde{i} \leftarrow i \\ &\mathbf{while} \ k \geq 1 \ \mathbf{do} \\ &\quad i_k \leftarrow \tilde{i} \bmod d_k, \tilde{i} \leftarrow \lfloor \tilde{i} / d_k \rfloor \\ &\quad k \leftarrow k - 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Выбрав ортонормальный базис в пространстве \mathcal{H} и разложение его размерности на множители $\mathcal{N} = d_1 \dots d_K$, мы можем построить конкретную биекцию вида (3).

Для построения произвольной биекции необходимо учесть свободу выбора базисов в гильбертовых пространствах: любой ортонормальный базис можно перевести в любой другой унитарным преобразованием.

Легко показать, что произвольный набор унитарных замен базисов во всех пространствах, фигурирующих в соотношении (3), эквивалентен единственной замене базиса в глобальном пространстве.

Более конкретно, любой вектор в глобальном пространстве можно представить в виде суммы тензорных произведений элементов локальных пространств:

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell} \bigotimes_{k=1}^K |\psi_k^{\ell}\rangle, \quad |\psi_k^{\ell}\rangle \in \mathcal{H}_k, \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (7)$$

Применив унитарные преобразования ко всем векторам в (7) и воспользовавшись свойством тензорного произведения

$$(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D),$$

мы имеем

$$\begin{aligned} U|\psi\rangle &= \sum_{\ell} \bigotimes_{k=1}^K U_k |\psi_k^{\ell}\rangle = \bigotimes_{k=1}^K U_k \sum_{\ell} \bigotimes_{k=1}^K |\psi_k^{\ell}\rangle \\ &\Downarrow \\ U'|\psi\rangle &= \sum_{\ell} \bigotimes_{k=1}^K |\psi_k^{\ell}\rangle, \quad \text{где } U' = \left(\bigotimes_{k=1}^K U_k \right)^{-1} U. \end{aligned}$$

Таким образом, тензорная факторизация гильбертова пространства \mathcal{H} полностью характеризуется следующими двумя элементами:

- (i) *разложение размерности* на множители $\dim \mathcal{H} = d_1 \dots d_K$,
- (ii) *унитарное преобразование* U , фиксирующее базис в глобальном гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

2.3. Декомпозиция чистого квантового состояния. Любое смешанное состояние квантовой системы можно получить с помощью *разложения Шмидта* [5] чистого состояния в гильбертовом пространстве большей размерности. Такое пространство можно сконструировать, например, с помощью процедуры, называемой *расширением до чистого состояния*.

Состояние изолированной системы должно быть чистым – в противном случае нам пришлось бы либо изобретать механизм возникновения вероятностного распределения, описываемого нетривиальной матрицей плотности в изолированной системе, либо, отказавшись от предположения об изолированности рассматриваемой системы, расширить состояние до чистого в большей изолированной системе.

Для данной факторизации $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_K$ мы вводим множество индексов $X = \{1, \dots, K\}$. Элементы множества X удобно представлять себе как точки некоторого “(пре)геометрического пространства”. Подсистемы квантовой системы отождествляются с подмножествами $A \subseteq X$.

Матрица плотности чистого состояния $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ глобальной системы представляет собой проектор ранга один вида

$$\rho_X = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

В соответствии с законами квантовой механики статистическое поведение подсистемы A правильно описывается *редуцированной матрицей плотности* $\rho_A = \text{tr}_{X \setminus A} \rho_X$, которая вычисляется из глобальной матрицы плотности взятием частичного следа по дополнению к A в X .

Более подробно, вычисление редуцированной матрицы плотности сводится к следующему. Согласно (4) базис глобального гильбертова пространства можно представить как декартово произведение локальных базисов

$$B_X = \prod_{k \in X} B_k.$$

Аналогичным образом мы вводим множества

$$B_A = \prod_{k \in A} B_k \text{ и } B_{X \setminus A} = \prod_{k \in X \setminus A} B_k.$$

В компонентах глобальную матрицу плотности можно записать в виде

$$\rho_X = (\rho_X)_{i_X j_X} |i_X\rangle\langle j_X|,$$

где $i_X \simeq \{i_1, \dots, i_K\}$, $j_X \simeq \{j_1, \dots, j_K\} \in B_X$, а эквивалентность \simeq обеспечивается формулой (5) и алгоритмом (6). Процедуру вычисления редуцированной матрицы плотности легко реализовать, запрограммировав формулу

$$(\rho_A)_{i_A, j_A} = \sum_{\lambda \in B_{X \setminus A}} (\rho_X)_{\underbrace{i_A \sqcup \lambda}_{i_X}, \underbrace{j_A \sqcup \lambda}_{j_X}}, \text{ где } i_A, j_A \in B_A.$$

§3. КОНСТРУКТИВНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

В [6–8] мы предложили версию квантовой теории, в которой группы Ли унитарных эволюций заменяются линейными представлениями конечных групп, а поле комплексных чисел заменяется его плотными

конструктивными подполями, которые естественным образом строятся из натуральных чисел и корней из единицы.

Мотивацией для замены непрерывных групп конечными является тот факт, что конечные группы обладают более широкими возможностями для описания физической реальности, чем группы Ли¹. Каждая группа Ли имеет бесконечное множество аналогов среди конечных групп, но не наоборот. Например, фундаментально важные *симметрическая*, S_n , и *знакопеременная*, A_n , группы не имеют непрерывных аналогов. Поскольку физика – эмпирическая наука, при формулировке физических задач мы всегда можем заменить любую группу Ли эмпирически эквивалентной конечной группой. С другой стороны, конечные группы позволяют формулировать физические задачи, принципиально не имеющие непрерывных аппроксимаций.

Любое линейное представление конечной группы (в силу простого математического факта такое представление всегда унитарно) является подпредставлением некоторого перестановочного представления. Из этого следует, что формализм квантовой механики можно полностью² воспроизвести исходя из перестановок некоторого множества

$$\Omega = \{e_1, \dots, e_{\mathcal{N}}\} \simeq \{1, \dots, \mathcal{N}\} \quad (8)$$

первичных (“*онтологически*”) объектов, на котором действует некоторая подгруппа G симметрической группы $S_{\mathcal{N}}$.

Мы будем называть основанную на этой идее версию квантового формализма *конечной квантовой механикой*. Недавно Том Бэнкс проанализировал эту версию с точки зрения физики и космологии [9] и пришел к заключению, что она “*can accurately reproduce all of the results*

¹Понятие группы возникло изначально как множество биекций (перестановок) конечного множества. Теорема Кэли показывает, что абстрактная формулировка свойств группы не расширяет исходное понятие, если оставаться в конечной области. В бесконечном случае исходная идея группы вызывает трудности из-за наличия биекций между множеством и его собственными подмножествами. Это требует введения дополнительных структур и ограничений, внешних для исходного понятия группы. Например, для группы Ли множество ее элементов должно параметризоваться набором вещественных параметров, а групповые операции должны быть непрерывными (как доказано, аналитическими) функциями этих параметров. Ясно, что такого рода дополнительные ограничения, не относящиеся к исходной идее группы, сужают описательные возможности модифицированного понятия группы.

²С точностью до эмпирически несущественных элементов традиционного формализма, таких как бесконечности разного рода: континуумы \mathbb{R} и \mathbb{C} , бесконечномерные гильбертовы пространства и т.п.

of conventional quantum mechanics”. Бэнкс также указал на определенные параллели между нашим подходом и онтологической квантовой механикой Г. ’т Хоофта. В частности, в своей интерпретации квантовой механики [10] ’т Хоофт выделяет особые множества взаимно ортогональных состояний в гильбертовых пространствах, переходящие друг в друга под действием перестановок. Такие состояния ’т Хоофт наделяет статусом “элементов реальности” и называет “онтологическими” или, сокращенно, “онтическими”. Мы будем придерживаться аналогичной терминологии, называя элементы множества (8) и связанные с ними конструкции *онтическими*.

3.1. Перестановочное гильбертово пространство. Гильбертово пространство, необходимое для вычислений в квантовой теории, можно получить, интерпретируя множество Ω как базис \mathcal{N} -мерного пространства над некоторым полем чисел. Экономичное, но достаточное для наших целей числовое поле можно построить исходя только из двух примитивных понятий:

- (1) *натуральные числа* $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ – абстракция *счета*,
- (2) *корни из единицы* – абстракция *периодичности*.

Поле \mathcal{F} , достаточное для всех потребностей квантового формализма – в частности, для расщепления любого представления любой подгруппы группы G на неприводимые компоненты, – можно построить, добавив к натуральным числам примитивный корень из единицы ℓ -й степени ζ_ℓ , где ℓ – наименьшее общее кратное периодов (порядков) всех элементов группы G , называемое *экспонентой* группы.

Примитивный корень из единицы ζ_ℓ является *алгебраическим целым*, поскольку он является корнем полинома $\Phi_\ell(x)$ с целыми коэффициентами и единичным старшим коэффициентом. Полином $\Phi_\ell(x)$ называется ℓ -м *циклотомическим полиномом* (или *многочленом деления круга*).

Добавив ζ_ℓ к натуральным числам, мы расширяем полукольцо \mathbb{N} до кольца $\mathbb{N}[\zeta_\ell]$ (за исключением тривиального случая $\ell = 1$). Далее, построив *поле частных* кольца $\mathbb{N}[\zeta_\ell]$, мы получаем циклотомическое расширение поля рациональных чисел $\mathcal{F} = \text{Frac}(\mathbb{N}[\zeta_\ell]) = \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$. При $\ell > 2$ поле \mathcal{F} , будучи плотным подполем комплексного поля \mathbb{C} , в эмпирических приложениях неотличимо от \mathbb{C} .

Любой элемент поля \mathcal{F} можно представить в виде полинома

$$f = q_d x^d + q_{d-1} x^{d-1} + \dots + q_0,$$

где $d < \deg \Phi_\ell(x)$, $q_0, \dots, q_d \in \mathbb{Q}$. Комплексно-сопряженный к f элемент имеет вид

$$f^* = q_d x^{\ell-d} + q_{d-1} x^{\ell-d+1} + \dots + q_0 \bmod \Phi_\ell(x).$$

Таким образом, все необходимые для квантовой механики вычисления с элементами поля \mathcal{F} можно свести к легко реализуемым на компьютере операциям с полиномами одной переменной.

Алгебраическое целое число ζ_ℓ – т.е. ℓ -й примитивный корень из единицы – можно записать в виде комплексного числа: $\zeta_\ell = e^{2\pi i k/\ell}$, где натуральное число $k < \ell$ является взаимно простым с ℓ . С алгебраической точки зрения все примитивные корни из единицы данной степени эквивалентны. Однако в физике корни из единицы описывают эволюции в одномерных инвариантных для данного гамильтониана подпространствах, а величина k/ℓ интерпретируется как *энергетический уровень*, т.е. собственное значение гамильтониана.

Мы всегда будем подразумевать, что $k = 1$, а соответствующий примитивный корень из единицы $\zeta_\ell = e^{2\pi i/\ell}$ называть *основным*, заимствовав термин из физики, в которой состояние квантовой системы с минимальным уровнем энергии называется основным. Все остальные (примитивные и непримитивные) ℓ -е корни из единицы являются степенями этого основного корня.

Таким образом, мы приходим к \mathcal{N} -мерному гильбертову пространству $\mathcal{H}_\mathcal{N}$ над полем \mathcal{F} с базисом Ω . Мы будем называть это пространство *оптическим*. Действие группы G на Ω определяет *перестановочное представление* \mathcal{P} в оптическом пространстве матрицами вида

$$\mathcal{P}(g)_{i,j} = \delta_{ig,j}, \quad (9)$$

где ig обозначает действие (справа) элемента группы $g \in G$ на элемент множества $i \in \Omega$.

3.2. Разложение перестановочного представления. Перестановочное представление любой группы имеет *тривиальное* одномерное подпредставление в пространстве, состоящем из векторов с равными компонентами. В качестве базисного элемента тривиального подпространства мы будем использовать вектор

$$|\omega\rangle = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{\mathcal{N}}^\top.$$

Дополнение к тривиальному подпредставлению называется *стандартным представлением*. Оператор проектирования в $(\mathcal{N} - 1)$ -одномерное стандартное пространство \mathcal{H}_* имеет вид

$$P_* = \mathbb{1}_{\mathcal{N}} - \frac{|\omega\rangle\langle\omega|}{\mathcal{N}}.$$

Квантовомеханическое поведение (интерференция и т.д.) проявляется именно в стандартном пространстве \mathcal{H}_* . В [9] Бэнкс сделал глубокое наблюдение, что проекция классических перестановочных эволюций в оптическом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ приводит к истинно квантовым эволюциям в стандартном пространстве $\mathcal{H}_* < \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$. Бэнкс также показал, что наиболее естественным выбором является полная группа всех перестановок оптических элементов $G = S_{\mathcal{N}}$, где \mathcal{N} – число фундаментальных (планковских) элементов реальности. В [9] приведены оценки для числа \mathcal{N} , согласно которым по текущим космологическим данным $\mathcal{N} \sim \text{Exp}(\text{Exp}(20))$ для 1 см^3 вещества и $\mathcal{N} \sim \text{Exp}(\text{Exp}(123))$ для всей Вселенной.

Для пояснения соответствия между конечной квантовой механикой и традиционной теорией, основанной на непрерывных унитарных группах, Бэнкс указал на наличие связи между группой всех перестановок \mathcal{N} элементов и унитарной группой в размерности $\mathcal{N} - 1$. А именно, для достаточно большого³ числа \mathcal{N} наиболее общая конечная подгруппа G группы $SU(\mathcal{N} - 1)$ имеет структуру полупрямого произведения абелевой группы A и симметрической группы $S_{\mathcal{N}}$:

$$G = A \rtimes S_{\mathcal{N}} < SU(\mathcal{N} - 1).$$

3.3. Оптические состояния. Группа $S_{\mathcal{N}}$ – *рационально представляемая группа*, т.е. любое ее неприводимое представление (в частности, стандартное) можно реализовать над \mathbb{Q} (или, эквивалентно, над \mathbb{Z}). Это означает, что для описания квантовых состояний в \mathcal{H}_* достаточно только векторов с рациональными компонентами⁴.

³В [11] приводится точная нижняя граница: $\mathcal{N} \geq 72$.

⁴Потребность в комплексных числах – нетривиальных элементах циклотомических расширений – может возникнуть только в задачах, где фигурируют некоторые собственные подгруппы симметрической группы $S_{\mathcal{N}}$. Типичный пример – циклические группы, неприводимые представления которых (за исключением группы $S_2 \simeq S_2$) невозможно получить без комплексных чисел.

Легко показать, что любое квантовое состояние в \mathcal{H}_* можно получить как проекцию целочисленного вектора из неотрицательного ортанта $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}^+ \subset \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$. Пусть $|x\rangle = (x_1, \dots, x_{\mathcal{N}})^\top \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}^+$ – вектор с неотрицательными рациональными компонентами. Тогда его проекция на \mathcal{H}_* является $(\mathcal{N} - 1)$ -мерным вектором вида

$$|y\rangle = (y_1, \dots, y_{\mathcal{N}-1})^\top = P_* |x\rangle. \quad (10)$$

Удобным для наших целей базисом в стандартном пространстве \mathcal{H}_* является множество

$$\{|0\rangle - |\mathcal{N}-1\rangle, \dots, |\mathcal{N}-2\rangle - |\mathcal{N}-1\rangle\}, \quad (11)$$

где $\{|0\rangle, \dots, |\mathcal{N}-1\rangle\}$ – базис в оптическом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$. В базе (11) соотношение (10) в компонентах имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_{\mathcal{N}}, \\ &\vdots \\ y_{\mathcal{N}-1} &= x_{\mathcal{N}-1} - x_{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что *любой* набор величин $y_1, \dots, y_{\mathcal{N}-1}$ можно получить, используя только *неотрицательные* величины $x_1, \dots, x_{\mathcal{N}}$.

Поскольку квантовые состояния являются лучами в гильбертовом пространстве, мы можем заменить неотрицательные рациональные векторы $|x\rangle$ натуральными векторами

$$|n\rangle = (n_1, \dots, n_{\mathcal{N}})^\top \in \mathbb{N}^{\mathcal{N}} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{N}}^+. \quad (12)$$

Чтобы строить конструктивные модели, необходимо выбрать конечное подмножество в $\mathbb{N}^{\mathcal{N}}$. Простейшим выбором являются векторы с координатами из множества $\{0, 1\}$, т.е. битовые строки длины \mathcal{N} , которые мы будем называть *оптическими векторами* или *оптическими состояниями*. Эти состояния привлекательны как по вычислительным, так и по онтологическим причинам.

Интерпретируя оптическое состояние $|q\rangle$ как характеристическую функцию, мы можем отождествить его с подмножеством $q \subset \Omega$ или, эквивалентно, с разбиением оптического множества (8) на два нетривиальных подмножества:

$$\Omega = q \sqcup \sim q, \quad \sim q = \Omega \setminus q,$$

где \sim обозначает *теоретико-множественное дополнение* (или *побитовую инверсию*). Полное множество оптических состояний имеет вид

$$Q = 2^\Omega \setminus \{\emptyset, \Omega\}.$$

Число оптических состояний экспоненциально зависит от \mathcal{N} : $|Q| = 2^\mathcal{N} - 2$. Поэтому для больших \mathcal{N} они порождают достаточно большие множества квантовых состояний в стандартном пространстве и его подпространствах.

Операция дополнения, примененная к оптическому состоянию, вызывает изменение знака соответствующего квантового состояния в стандартном пространстве:

$$|\psi\rangle = P_\star |q\rangle \implies -|\psi\rangle = P_\star |\sim q\rangle.$$

Скалярное произведение нормализованных проекций оптических векторов $|q\rangle$ и $|r\rangle$ в пространство \mathcal{H}_\star имеет вид

$$S(q, r) \equiv \frac{\langle q | P_\star | r \rangle}{\sqrt{\langle q | P_\star | q \rangle \langle r | P_\star | r \rangle}} = \frac{\mathcal{N} \langle q \& r \rangle - \langle q \rangle \langle r \rangle}{\sqrt{\langle q \rangle \langle \sim q \rangle \langle r \rangle \langle \sim r \rangle}},$$

где $\&$ – побитовое И для битовых строк, а $\langle \cdot \rangle$ обозначает *вес Хэмминга* (*число заполнения*).

Из очевидных тождеств $\langle \sim a \rangle = \mathcal{N} - \langle a \rangle$ и $\langle a \& b \rangle + \langle a \& \sim b \rangle = \langle a \rangle$ легко выводятся следующие симметрии относительно операций дополнения, примененных к оптическим состояниям:

$$S(q, r) = -S(\sim q, r) = -S(q, \sim r) = S(\sim q, \sim r).$$

Представление квантовых состояний с помощью натуральных векторов (12) позволяет воспроизвести произвольный луч в стандартном пространстве с произвольной точностью, что дает возможность полностью воспроизвести формализм обычной квантовой механики. Однако такая схема выглядит достаточно громоздко с онтологической точки зрения. В этой схеме естественным было бы интерпретировать элементы множества (8) как “типы оптических объектов”, а координаты натурального вектора как “количества объектов данного типа”. Но такая интерпретация плохо согласуется, в частности, с тем фактом, что два разных, но пропорциональных вектора описывают одно и то же квантовое состояние.

Бинарные оптические векторы, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с описываемыми ими квантовыми состояниями и

фактически сводящие квантовый формализм к теоретико-множественным манипуляциям, онтологически более привлекательны. С помощью оптических векторов, число которых равно $2^{\mathcal{N}} - 2$, невозможно приблизить произвольный луч в стандартном $(\mathcal{N} - 1)$ -мерном пространстве, однако проекции оптических векторов в подпространства, размерность которых мала по сравнению с \mathcal{N} , хорошо воспроизводят лучи в этих подпространствах. Поэтому схема квантового формализма с оптическими векторами не противоречит имеющимся эмпирическим данным. В любом случае, оптические векторы – удобное средство для моделирования квантовых систем.

§4. ОПТИЧЕСКИЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЗИСЫ

4.1. Оптический базис. Исходный перестановочный базис в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$, т.е. множество Ω , мы будем называть *оптическим базисом*. В этом базисе матрица плотности оптического состояния $|q\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ в пространстве \mathcal{H}_{\star} имеет вид

$$\rho_q^o = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{(|q\rangle - \alpha |\omega\rangle)(\langle q| - \alpha \langle \omega|)}{\alpha(1 - \alpha)}, \quad (13)$$

где $\alpha = \langle q|/\mathcal{N}$ – *плотность заполнения*.

Имеется очевидная двойственность: выражение для матрицы плотности дополнения к оптическому состоянию $|q\rangle$ получается из (13) заменами $q \rightarrow \sim q$ и $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$:

$$\rho_q^o \xrightarrow[\alpha \rightarrow 1 - \alpha]{q \rightarrow \sim q} \rho_{\sim q}^o.$$

Заметим, что оптический базис не зависит ни от состояния, ни от эволюции квантовой системы, а полностью определяется числом \mathcal{N} . Поэтому его можно рассматривать как прообраз, из которого любой другой базис можно получить подходящим унитарным преобразованием.

4.2. Энергетический базис. В континуальной квантовой механике эволюция изолированной квантовой системы описывается однопараметрической унитарной группой $U_t = e^{-iHt}$, порождаемой гамильтонианом H , где $t \in \mathbb{R}$. Собственные значения гамильтониана называются *энергетическими уровнями*.

В конечной квантовой механике эволюция описывается циклической группой $U(g)^t$, порождаемой элементом $U(g) \in \mathcal{P}(G)$, где $\mathcal{P}(G)$ –

перестановочное представление группы G , определяемое формулой (9), а время t – целочисленный параметр. Мы называем *энергетическим базисом* ортонормальный базис в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$, в котором матрица $U(g)$ диагональна. Этот базис зависит от заданной эволюции.

Формула Планка $E = h\nu$ выражает связь энергии E с частотой ν – величиной, обратной периоду соответствующего циклического процесса.

Любую перестановку можно представить как произведение непересекающихся циклов. Поучительно посмотреть, как часто циклы разной длины встречаются в группе всех перестановок $S_{\mathcal{N}}$. Простое комбинаторное вычисление показывает, что общее число циклов длины ℓ во всей симметрической группе $S_{\mathcal{N}}$ равно $\mathcal{N}!/\ell$ и, следовательно, ожидаемое число ℓ -циклов в одной перестановке равно $1/\ell$. То есть в нашей модели Вселенной, основанной на перестановках, преобладают эволюции с высокими энергиями⁵.

Матрица цикла длины ℓ имеет вид

$$C_{\ell} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $(C_{\ell})_{ij} = \delta_{i-j+1 \pmod{\ell}}$. Эта матрица имеет следующую диагональную форму:

$$F_{\ell} C_{\ell} F_{\ell}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_{\ell} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{\ell}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta_{\ell}^{\ell-1} \end{pmatrix},$$

⁵Конечно, более адекватным было бы вычислить распределение энергетических уровней для данной индивидуальной перестановочной эволюции, однако это более трудная комбинаторная задача.

где $\zeta_\ell = e^{2\pi i/\ell}$ – ℓ -й основной корень из единицы, а

$$F_\ell = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_\ell^{-1} & \zeta_\ell^{-2} & \dots & \zeta_\ell^{-(\ell-1)} \\ 1 & \zeta_\ell^{-2} & \zeta_\ell^{-4} & \dots & \zeta_\ell^{-2(\ell-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \zeta_\ell^{-(\ell-1)} & \zeta_\ell^{-2(\ell-1)} & \dots & \zeta_\ell^{-(\ell-1)(\ell-1)} \end{pmatrix}$$

– матрица *преобразования Фурье*. Матрица F_ℓ является одновременно унитарной и симметрической, что позволяет легко написать обратную матрицу:

$$F_\ell^{-1} = F_\ell^\dagger = F_\ell^* \implies (F_\ell^{-1})_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \zeta_\ell^{(i-1)(j-1)}.$$

В общем случае матрица перестановочного представления элемента $g \in \mathcal{S}_N$ является прямой суммой циклических матриц $U(g) = \bigoplus_{m=1}^M C_{\ell_m}$, а соответствующая диагонализующая матрица – матрица перехода от оптического к энергетическому базису – имеет вид $F = \bigoplus_{m=1}^M F_{\ell_m}$.

Матрицу плотности оптического состояния $|q\rangle$ в энергетическом базисе можно вычислить из (13) по формуле

$$\rho_q^\varepsilon = F \rho_q^o F^*.$$

4.3. Замечание о базисах. Как показано в разделе 2.2, выбор базиса в гильбертовом пространстве замкнутой квантовой системы (Вселенной) имеет решающее значение для выделения подсистем в рассматриваемой системе.

Наиболее универсальным является оптический базис, не требующий никаких данных, характеризующих квантовую систему, кроме числа оптических элементов. Для построения разложения замкнутой системы в этом базисе достаточно задать только ее квантовое состояние.

Если данные, описывающие систему, помимо состояния включают унитарную эволюцию, то наиболее адекватным с точки зрения физики является энергетический базис, связанный с разложением оператора эволюции на неприводимые компоненты.

В [9] в качестве универсального энергетического базиса, сопряженного к оптическому, предлагается использовать базис, диагонализующий цикл максимальной возможной длины. Энергия основного состояния такого цикла является минимально возможной для Вселенной, состоящей из \mathcal{N} оптических элементов.

§5. О МЕРАХ КВАНТОВОЙ ЗАПУТАННОСТИ

Количественно квантовые корреляции описываются *мерами запутанности*, в основе которых лежит понятие энтропии. Чаще всего в физике используется *энтропия фон Неймана* (квантовая версия энтропии Шеннона)

$$S_1(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho). \quad (14)$$

Здесь и далее ρ – матрица плотности в n -мерном гильбертовом пространстве. Широко используются также энтропии из *семейства Реньи* [12]

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{tr}(\rho^\alpha), \quad \alpha \geq 0, \alpha \neq 1. \quad (15)$$

В принципе, энтропию фон Неймана также можно включить в семейство Реньи с помощью предельного перехода $\alpha \rightarrow 1$.

Общим свойством для энтропий фон Неймана и Реньи является аддитивность на комбинациях вероятностных распределений, задаваемых собственными значениями матриц плотности, если эти распределения независимы.

Энтропию фон Неймана предпочитают потому, что она дополнительно имеет более сильное свойство – цепное правило для условных энтропий. Однако не все физики признают особое значение энтропии фон Неймана, например, Брукнер и Цайлингер [13] приводят аргументы о неполной адекватности энтропии фон Неймана в задачах квантовой механики и предлагают в качестве альтернативной меры квантовой информации величину (“total information content”)

$$I(\rho) = \text{tr} \left(\rho - \frac{1}{n} \right)^2. \quad (16)$$

В наших вычислениях мы используем вторую энтропию Реньи (называемую также *энтропией столкновений*)

$$S_2(\rho) = -\log \text{tr}(\rho^2), \quad (17)$$

исходя из того, что это выражение является логарифмом скалярного квадрата Фробениуса матрицы плотности.

Скалярное произведение Фробениуса для двух матриц a и b определяется как $\langle a | b \rangle_{\text{F}} = \text{tr}(a^\dagger b)$, а соответствующая норма имеет вид $\|a\|_{\text{F}} = \sqrt{\langle a | a \rangle_{\text{F}}}$. Скалярное произведение Фробениуса (в физике, особенно в бесконечномерном контексте, его чаще называют скалярным произведением Гильберта–Шмидта) задаёт наиболее естественную метрическую структуру на матрицах.

Можно показать, что любые конструкции, используемые при изучении квантовых корреляций и основанные на энтропии фон Неймана, можно переформулировать в терминах матричных метрик.

Например, в моделях эмерджентной геометрии [3, 14, 15] расстояния между подсистемами A и B моделируются функциями взаимной информации

$$\mathcal{I}(A, B) = S_1(\rho_A) + S_1(\rho_B) - S_1(\rho_{A \cup B}). \quad (18)$$

Заменяя в (18) энтропию фон Неймана второй энтропией Реньи, мы получаем выражение

$$\mathcal{I}_2(A, B) = S_2(\rho_A) + S_2(\rho_B) - S_2(\rho_{A \cup B}), \quad (19)$$

экспонента которого имеет вид

$$\frac{\text{tr}(\rho_{A \cup B}^2)}{\text{tr}(\rho_A^2) \text{tr}(\rho_B^2)} \equiv \frac{\|\rho_{A \cup B}\|_{\text{F}}^2}{\|\rho_A \otimes \rho_B\|_{\text{F}}^2}. \quad (20)$$

Очевидно, оба выражения (19) и (20) хорошо описывают отклонение от сепарабельности, вызываемое запутанностью, – хотя (19) и не имеет той вероятностной интерпретации, которая присуща выражению (18).

Заметим, что мера квантовой информации Брукнера–Цайлингера (16) представляет собой скалярный квадрат Фробениуса отклонения матрицы плотности ρ от матрицы плотности максимально смешанного состояния:

$$I(\rho) = \left\| \rho - \frac{1}{n} \right\|_{\text{F}}^2.$$

Напомним, что максимально смешанным называют состояние, матрица плотности которого описывает равномерное распределение вероятностей, т.е. все ее собственные значения равны.

Техническим преимуществом второй энтропии Реньи является то, что ее, в отличие от энтропии фон Неймана, легко вычислять:

$$\text{tr}(\rho^2) = \sum_{i=1}^n \rho_{ii}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |\rho_{ij}|^2.$$

Заметим также, что

- $\text{tr}(\rho^2)$ – это величина, называемая *чистотой* квантового состояния ρ ; чистота лежит в интервале $[1/n, 1]$, достигая верхнего значения 1 только для чистых состояний (отсюда название);
- $\text{tr}(\rho^2)$ совпадает с борновской вероятностью: “система наблюдает саму себя”;
- $\text{tr}(\rho^2) \equiv \langle \rho \rangle_\rho$ – это *ожидаемое значение наблюдаемой* ρ в состоянии ρ .

§6. НЕКОТОРЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Алгоритмы для построения тензорных разложений и вычисления квантовых корреляций реализованы на языке Си.

Для иллюстрации вычислений рассмотрим однородную квантовую систему, т.е. систему, гильбертово пространство которой разлагается в тензорное произведение локальных гильбертовых пространств одинаковой размерности

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{x \in X} \mathcal{H}_x,$$

где $X = \{1, \dots, |X|\}$ – множество “геометрических точек”, $\dim \mathcal{H}_x = d$ для всех $x \in X$.

Предварительные вычисления указывают на то, что разложения с меньшими локальными размерностями демонстрируют более интересное поведение. Рассмотрим пример с $d = 2$ и $|X| = 23$. В этом случае размерность глобального пространства $\dim \mathcal{H}$ равна 8 388 608. В качестве меры расстояния между точками воспользуемся аналогом взаимной информации (19). Вычисления этой величины на всех ребрах $(x, y) \in X \times X$ полного графа на вершинах X дают разброс величин в два порядка. Типичный результат вычислений:

$$\mathcal{I}_2(x, y) \in [5.3 \times 10^{-8}, 7 \times 10^{-6}].$$

Большой разброс расстояний между точками можно рассматривать как признак нетривиальности предполагаемой эмерджентной геометрии в данном примере.

В примере с несколько большей локальной размерностью, $d = 7$ и $|X| = 7$ (следовательно, $\dim \mathcal{H} = 823\,543$), аналогичное вычисление дает

$$\mathcal{I}_2(x, y) \in [0.0037, 0.0041].$$

То есть геометрия близка к тривиальной: все точки почти эквидистантны, и их можно интерпретировать как вершины близкого к правильному симплекса в шестимерном евклидовом пространстве.

Более детальные вычисления показывают, что основной вклад в нетривиальность геометрии вносят локальные размерности d , а не число точек $|X|$.

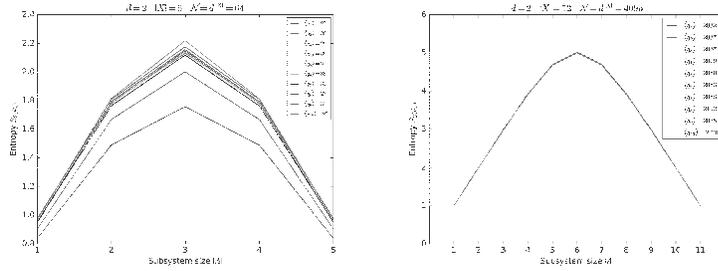


Рис. 1. Энтропии подсистем.

На рис. 1 приведены результаты вычисления энтропий подсистем всех возможных размеров для квантовых систем с локальной размерностью $d = 2$, но с двумя разными количествами геометрических точек: $|X| = 6$ и $|X| = 12$. В обоих случаях использовалось по 10 случайно сгенерированных оптических состояний, в легендах указаны их веса Хэмминга. Данные, представленные на рисунке, демонстрируют следующие особенности:

- Тенденция к универсальности (слабой зависимости от квантовых состояний) с ростом $|X|$: визуально все графики почти идентичны в “большем” случае $|X| = 12$.
- Симметрия $S_2(\rho_A) = S_2(\rho_{X \setminus A})$ – это проявление свойств *разложения Шмидта* [5] чистого состояния: обе матрицы ρ_A и $\rho_{X \setminus A}$ имеют идентичные наборы ненулевых собственных значений.
- Для подсистем, размеры которых $|A|$ заметно меньше чем $|X|/2$, редуцированные состояния близки к *максимально смешанным* состояниям: $S_2(\rho_A) \approx |A| \log d$.

Благодарности. Я благодарен Ю. А. Блинкову, Н. Н. Васильеву и В. Ф. Еднералу за обсуждение работы и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. N. Page, W. K. Wootters, *Evolution without evolution: Dynamics described by stationary observables.* — Phys. Rev. D **27** (1983), 2885–2892.
2. S. M. Carroll, A. Singh, *Quantum mereology: Factorizing Hilbert space into subsystems with quasiclassical dynamics.* — Phys. Rev. A **103**, No. 2 (2021), 022213.
3. Ch. J. Cao, S. M. Carroll, S. Michalakis, *Space from Hilbert space: Recovering geometry from bulk entanglement.* — Phys. Rev. D **95**, No. 2 (2017), 024031.
4. M. Woods, *The Page–Wootters mechanism 36 years on: a consistent formulation which accounts for interacting systems.* — Quantum Views **3** (2019), 16.
5. M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th anniversary edition, Cambridge Univ. Press, 2016.
6. V. V. Kornyak, *Quantum models based on finite groups.* — J. Phys.: Conf. Series **965** (2018), 012023.
7. V. V. Kornyak, *Modeling quantum behavior in the framework of permutation groups.* — EPJ Web of Conferences **173** (2018), 01007.
8. V. V. Kornyak, *Mathematical modeling of finite quantum systems.* — Lect. Notes Comput. Sci. **7125** (2012), 79–93.
9. T. Banks, *Finite deformations of quantum mechanics*, arXiv:2001.07662 [hep-th] (2020).
10. G. 't Hooft, *The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics*, Springer, 2016.
11. M. J. Collins, *On Jordan's theorem for complex linear groups.* — J. Group Theory **10**, No. 4 (2007), 411–423.
12. A. Rényi, *On measures of entropy and information.* In: Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. Vol. 1 (1961), pp. 547–561.
13. Č. Brukner, A. Zeilinger, *Conceptual inadequacy of the Shannon information in quantum measurements.* — Phys. Rev. A **63**, No. 2 (2001), 022113.
14. M. Van Raamsdonk, *Building up spacetime with quantum entanglement.* — Gen. Rel. Grav. **42** (2010), 2323–2329.
15. J. Maldacena, L. Susskind, *Cool horizons for entangled black holes.* — Fortschr. Phys. **61**, No. 9 (2013), 781–811.

Kornyak V. V. Subsystems of an isolated quantum system in finite quantum mechanics.

Any Hilbert space with composite dimension can be decomposed into a tensor product of Hilbert spaces of lower dimensions. Such a factorization makes it possible to decompose a quantum system into subsystems. Using a modification of quantum mechanics, in which the continuous unitary group in a Hilbert space is replaced with a permutation representation of a finite group, we suggest a model for the constructive study of decompositions of

an isolated quantum system into subsystems. To investigate the behavior of composite systems resulting from decompositions, we develop algorithms based on methods of computer algebra and computational group theory.

Лаборатория информационных
технологий, Объединенный
институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, 141980,
Дубна, Россия
E-mail: vkornyak@gmail.com

Поступило 30 октября 2021 г.