

А. Баддур, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

§1. ВВЕДЕНИЕ

В конце прошлого века было начато исследование наследования разностными схемами алгебраических свойств точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе динамических систем. Наиболее изученным является вопрос о наследовании алгебраических интегралов. Еще в 1990-х годах было открыто семейство симплектических схем Рунге–Кутты, которые сохраняют все линейные и квадратичные интегралы движения, например все классические интегралы в задаче о вращении волчка [1–4]. Одновременно с этим была найдена первая разностная схема, сохраняющая все алгебраические интегралы задачи многих тел, Гринспеном [5–8] и независимо от него Симо и Гонзалес [9, 10]. Другие консервативные схемы, в том числе большого порядка, для этой задачи можно строить путем введения дополнительных переменных, относительно которых все интегралы задачи многих тел можно записать как квадратичные [11], совместив тем самым метод квадратизации энергии [12–14] и метод вспомогательной переменной [15]. К сожалению, этим путем получают неявные схемы, использование которых для численных расчетов оказывается весьма затратным [14].

Заметно менее исследованным является вопрос о наследовании обратимости приближенными решениями. В классической механике считают, что между начальными и конечными положениями тел имеется взаимно однозначное соответствие. В действительности точное решение нелинейной динамической системы общего вида обладает этим свойством лишь локально. Более того, как заметил Пенлеве [16–18], возможность интегрирования динамической системы в абелевых функциях и обратимость решения тесно связаны друг с другом.

Ключевые слова: динамическая система, эллиптическая функция, преобразование Кремоны, интегралы движения, свойство Пенлеве, метод конечных разностей. Работа поддержана Российским научным фондом (грант No. 20-11-20257).

Всякая разностная схема задает соответствие между значениями решения при двух значениях времени, отделенных шагом Δt . Поэтому ее естественно называть обратимой, если она задает бирациональное соответствие между этими значениями (определение дано ниже в §2). При рассмотрении бирациональных соответствий удобно рассматривать фазовое пространство как проективное. При этом мы заметили, что всякая динамическая система с квадратичной правой частью аппроксимируется обратимой разностной схемой (§3).

Теорию бирациональных преобразований плоскости заложил Л. Кремона [19], поэтому бирациональные преобразования на проективных пространствах называют преобразованиями Кремоны. Следует заметить, что даже двумерные преобразования Кремоны – очень сложный объект. В теории динамического хаоса несложное квадратичное преобразование, например целое преобразование Хенона [20, 21], используется для объяснения возникновения хаоса. Чтобы связать эту дискретную модель с гамильтоновыми системами, Табор [21, §4.2] заметил, что такого рода модели возникают при дискретизации дифференциальных уравнений по t . Однако описанная им разностная схема сохраняет симплектическую структуру и поэтому наследует квадратичные интегралы, но не является обратимой. Эти свойства невозможно сочетать одновременно [22], поэтому мы намерены отказаться от симплектичности в пользу обратимости. Это свойство чрезвычайно важно не только для механики, но и для создания эффективных численных методов исследования динамических систем, поскольку лишено главного недостатка консервативных схем – их неясности.

Среди динамических систем с квадратичной правой частью есть модели, описывающие колебания маятника и вращения волчка и интегрирующиеся в эллиптических функциях. Главным качественным свойством этой модели является периодичность решения. В настоящей работе мы хотим на этих простых примерах понять, каким именно образом периодичность может наследоваться приближенным решением, найденным по обратимой схеме.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

с полиномиальной правой частью:

$$f_i \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m].$$

Для краткости будем использовать векторные обозначения, подразумеваемая под x набор (x_1, \dots, x_m) . В рамках метода конечных разностей [4] систему дифференциальных уравнений заменяют на систему алгебраических уравнений

$$g_i(x, \hat{x}, \Delta t) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

При этом x интерпретируют как значение решения в момент времени t , а \hat{x} – как значение решения в момент времени $t + \Delta t$.

С точки зрения математического моделирования механических явлений наиболее важным является наследование разностной схемой двух свойств: t -симметрии и обратимости. Будем говорить, что разностная схема (2) обладает t -симметрией, если она инвариантна относительно преобразования

$$\Delta t \rightarrow -\Delta t, \quad x \rightarrow \hat{x}, \quad \hat{x} \rightarrow x.$$

Под обратимостью мы должны понимать возможность при любом фиксированном значении шага Δt по начальным данным x из системы (2) однозначно определить конечные данные \hat{x} , а по конечным данным \hat{x} однозначно определить начальные. Поскольку уравнения (2) – алгебраические, это означает, что \hat{x} должно быть рациональной функцией от x , а x – рациональной функцией от \hat{x} . Будем рассматривать x, \hat{x} как две точки проективного пространства \mathbb{P}_m и говорить, что разностная схема (2) обратима, если при любом фиксированном значении Δt эта схема задает преобразование Кремоны. Сочетание t -симметрии и обратимости означает, что разностная схема задает однопараметрическое семейство преобразований Кремоны \mathcal{C} , такое, что $\hat{x} = \mathcal{C}(\Delta t)x$ и $\mathcal{C}(\Delta t)^{-1} = \mathcal{C}(-\Delta t)$.

В механике свойство обратимости приходится вводить более сложным путем, при этом теорема Коши позволяет обосновать обратимость локально, в окрестности неособой точки. Однако глобально динамическая система может и не обладать этим свойством. В самом деле, рассмотрим вслед за Пенлеве [16] начальную задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x|_{t=t_0} = x_0 \quad (3)$$

на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ вещественной оси t . При некоторых значениях t_0 процедура аналитического продолжения решения, полученного

в теореме Коши, вдоль отрезка не встречает особых точек, отличных от полюсов, и в этом случае конечное значение $x(t_0 + \Delta t)$ определяется однозначно начальным значением x_0 . Однако если на пути попадает точка ветвления, то конечное значение зависит от способа ее обхода. Поэтому $x(t_0 + \Delta t)$ является, вообще говоря, многозначной функцией начального значения x_0 . Таким образом, если динамическая система обладает свойством обратимости глобально, то она обладает и свойством Пенлеве [23, §3.5]: особые точки решения не являются точками ветвления.

Классические вполне интегрируемые модели, в том числе маятники и волчки, интегрируются в эллиптических функциях и, как видно из решения, обладают свойством Пенлеве [24]. Как правило, общее решение вполне интегрируемой нелинейной модели, обладающее свойством Пенлеве, задает бирациональное преобразование не на всем фазовом пространстве, а на выделенных алгебраическими интегралами интегральных многообразиях.

Пример 1. Динамическая система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 6x^2 - a \quad (4)$$

имеет алгебраический интеграл

$$y^2 - 4x^3 + 2ax = C_1, \quad (5)$$

имеющий смысл полной механической энергии. Поэтому эта система интегрируется в эллиптических функциях Вейерштрасса

$$x = \wp(t + C_2, 2a, C_1), \quad y = \wp'(t + C_2, 2a, C_1),$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, и по этой причине далее именуется \wp -осциллятором. В силу теоремы сложения для эллиптических функций общее решение можно выразить рационально через

$$\wp(t, 2a, C_1), \wp'(t, 2a, C_1) \quad \text{и} \quad \wp(C_2, 2a, C_1), \wp'(C_2, 2a, C_1).$$

Поэтому общее решение выражается рационально через начальные данные $x_0 = \wp(C_2, 2a, C_1)$, $y_0 = \wp'(C_2, 2a, C_1)$, а коэффициенты этого выражения зависят от t и C_1 трансцендентным образом. Из t -симметрии следует, что эти формулы задают бирациональное преобразование на эллиптической кривой (5). Тем самым, на интегральной кривой (5) задача Коши задает бирациональное соответствие между начальными и конечными данными. Однако это соответствие не продолжается до

преобразования Кремоны всей плоскости xy , хотя поначалу это казалось весьма удивительным [25, гл. 7].

§3. УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В настоящее время хорошо развиты методы – тесты Пенлеве, – которые позволяют выяснить на практике, обладает ли заданная динамическая система свойством Пенлеве. Вообще говоря, эти тесты представляют собой набор необходимых условий отсутствия подвижных точек ветвления, проверка которых реализуется алгоритмически [23, §3.9].

В одномерном случае ($m = 1$) свойством Пенлеве обладает только уравнение Риккати

$$\frac{dx}{dt} = a + bx + cx^2 \quad (6)$$

при любых, в том числе нулевых значениях констант a, b, c . При этом начальная задача задает дробно-линейное преобразование на проективной прямой. Нетрудно составить разностную схему, наследующую это свойство:

$$\hat{x} - x = \left(a + b \frac{x + \hat{x}}{2} + cx\hat{x} \right) \Delta t. \quad (7)$$

Поскольку всякое бирациональное преобразование на проективной прямой является дробно-линейным, нетрудно доказать и обратное: в одномерном случае обратимую разностную схему можно составить только для уравнения Риккати [26].

Однако при $m > 1$ непрерывный и дискретный случаи теряют сходство. Для любой динамической системы с квадратичной правой частью можно составить t -симметричную обратимую разностную схему:

$$\hat{x}_i - x_i = F_i(x, \hat{x}) \Delta t, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

где F_i получается из f_i путем замены мономов: x_j – на $(\hat{x}_j + x_j)/2$, $x_j x_k$ – на $(\hat{x}_j + x_j)(\hat{x}_k + x_k)/4$, а x_j^2 – на $x_j \hat{x}_j$. Однако лишь немногие динамические системы с квадратичной правой частью обладают свойством Пенлеве. Этот вопрос был исследован весьма давно: динамическая система, описывающая вращение твердого тела вокруг неподвижной точки, всегда имеет квадратичную правую часть и обладает свойством Пенлеве только в особых трех случаях, найденных С. В. Ковалевской [24].

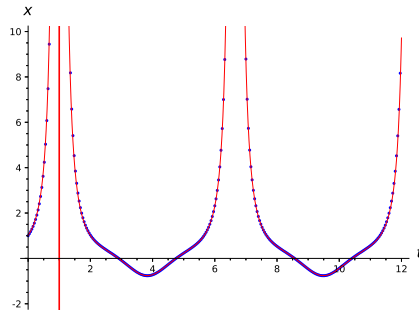


Рис. 1. Решение системы (4) при $a = 1/2$ и начальных условиях $(x, y) = (1, 2)$. Непрерывная линия – точное решение, точки – приближенное.

Замечание. Следует отметить, что любая динамическая система может быть сведена к системе с квадратичной правой частью по теореме Аппельрота [27]. Более того, существуют эффективные алгоритмы мономимальной квадратизации для систем ОДУ [28].

Мы исследовали, как наследуется свойство Пенлеве приближенным решением, на двух примерах – уравнения Риккати (6) и \wp -осциллятора (4). В обоих случаях оказалось, что расчеты по обратимой разностной схеме удастся продолжить через полюс без заметного накопления ошибки. Для уравнения Риккати это свойство было обосновано в [26]. Нам представляется, что это свойство приближенного решения удачно переносит понятие свойства Пенлеве на уравнения в конечных разностях, что несколько не отменяет других трактовок [29–31].

Пример 2. На рис. 1 изображено решение системы (4) при $a = 1/2$ и начальных условиях $(x, y) = (1, 2)$. Вычисление приближенного решения по обратимой схеме не встречает никаких трудностей на всем рассматриваемом интервале $0 < t < 12$, содержащем два полюса точного решения.

§4. ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Приближенное решение представляет собой последовательность x_0, x_1, \dots , каждый следующий элемент которой получается из предыдущего путем применения преобразования Кремены C :

$$x_{n+1} = Cx_n.$$

Эта последовательность будет иметь период n , если $x_n = x_0$, то есть если x_0 является неподвижной точкой преобразования C^n .

Пусть заданы целое положительное число n и начальное значение $x_0 \in \mathbb{Q}^m$. Тогда подобрать шаг Δt , при котором последовательность имеет период n , можно следующим путем. Рассматривая Δt как символическую переменную, вычислим $C^n x_0$. Получим m рациональных функций из $\mathbb{Q}(\Delta t)$. Приравняв их x_0 , получим m алгебраических уравнений, общие корни которых и являются искомыми значениями шага. Вообще говоря, несколько уравнений относительно одной переменной могут не иметь общих корней.

Мы рассмотрели три примера: 1) линейный осциллятор, который легко исследуется аналитически [32], 2) \wp -осциллятор и 3) осциллятор Якоби, то есть динамическую систему

$$\dot{p} = qr, \quad \dot{q} = -pr, \quad \dot{r} = -k^2 pq, \quad (9)$$

которая интегрируется в эллиптических функциях Якоби. Мы выбрали различные начальные данные и рассматривали n в интервале от 2 до 10. Все вычисления проводились в системе компьютерной алгебры Sage [33] на бытовом компьютере. Степени многочленов, общие корни которых дают искомые значения шагов, увеличиваются с ростом n экспоненциально, что существенно ограничило наши возможности по увеличению n .

Пример 3. Для \wp -осциллятора при тех же начальных условиях, что были использованы в примере 2, не существует значений для шага Δt , при которых решение имеет период $n = 2, 3, 6$. При $n = 4$ шаг не зависит от начальной точки. В табл. 1 собраны все подходящие положительные значения для Δt , найденные для n из первого десятка.

Пример 4. Для осциллятора Якоби (9) при $k = 1/5$ и начальных условиях

$$p = 0, \quad q = 1, \quad r = 0$$

n	Δt
2	\emptyset
3	\emptyset
4	1.074
5	6.908
6	\emptyset
7	0.556, 5.870, 7.759
8	0.535, 1.074, 6.843
9	0.504, 9.187
10	0.471, 0.559, 6.777, 6.908

Таблица 1. Значения шага Δt , обеспечивающие периодичность решения из примера 3.

n	Δt
2	\emptyset
3	3.609
4	2.041
5	1.47, 6.86
6	1.17, 3.60
7	0.97, 2.57, 10.85
8	0.83, 2.04, 5.18
9	0.73, 1.70, 3.60, 16.23

Таблица 2. Значения шага Δt , обеспечивающие периодичность решения из примера 4.

положительные значения шага Δt имеются для всех периодов $n > 2$, см. табл. 2.

Приближенное решение имеет период $n = 5$ при двух значениях шага. На плоскости pq при первом значении шага получается почти правильный пятиугольник, при втором – пентаграмма, см. рис. 2. Интеграл движения $p^2 + q^2 = 1$ в обоих случаях не сохраняется точно. Приближенное решение имеет период $n = 6$ также при двух значениях шага. Первое из них совпадает с шагом при $n = 3$ и дает треугольник, а второе дает шестиугольник, см. рис. 3. Приближенное решение имеет период $n = 7$ при трех значениях шага, см. рис. 4.

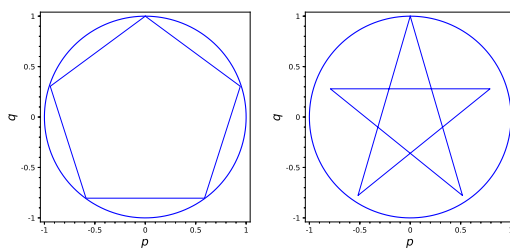


Рис. 2. Приближенное решение из примера 4 при двух шагах, обеспечивающих период $n = 5$.

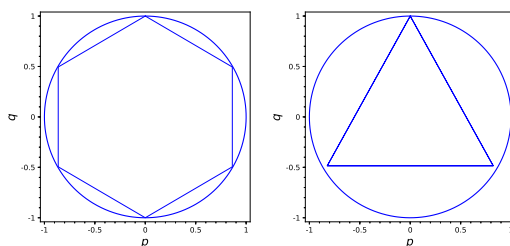


Рис. 3. Приближенное решение из примера 4 при двух шагах, обеспечивающих период $n = 6$.

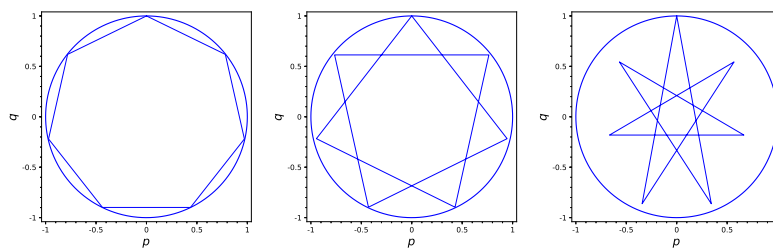


Рис. 4. Приближенное решение из примера 4 при двух шагах, обеспечивающих период $n = 7$.

С ростом n число значений для шага, при которых получают периодические приближения к решению задачи Коши, рассмотренной

n	$n\Delta t$
3	10.827
4	8.164
5	7.379
6	7.022
7	6.827
8	6.706
9	6.627
∞	6.347

Таблица 3. Последовательность периодов для приближенных решений из примера 4.

в примере 4, растет. При этом наименьшему из возможных значений dt при фиксированных n отвечает почти правильный n -угольник на плоскости pq . Эти решения возвращаются к исходному значению за времена $n\Delta t$, собранные в табл. 3. Кажется, что эти времена образуют монотонно убывающую последовательность, сходящуюся к точному периоду.

Результаты проведенных экспериментов удобно представить в виде двух гипотез:

- (1) для всякого достаточно большого n и любых начальных условий можно указать конечное число положительных значений для шага Δt , при которых получаются периодические последовательности с периодом n ,
- (2) если поставить в соответствие каждому n минимальный период, получится последовательность, сходящаяся к периоду точного решения при $n \rightarrow \infty$.

В силу первой гипотезы любое точное частное решение можно аппроксимировать приближенным решением, унаследовавшим периодический характер точного решения, а в силу второй — шаг Δt аппроксимации можно взять произвольно малым и поэтому приблизиться к точному решению с любой заданной точностью.

n	Порядок F_n
4	0
5	3
6	3
7	6
8	6
9	9
10	12

Таблица 4. Порядки эквипериодических кривых для примера 5.

§5. ЭКВИПЕРИОДИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

В предыдущем параграфе мы следили за одним решением, но меняли Δt . Посмотрим теперь на поведение решений на фазовом пространстве, но при фиксированном Δt .

Множество в фазовом пространстве, образованное всеми начальными данными, порождающими приближенные решения, имеющие один и тот же период n , является алгебраическим; будем называть его эквипериодическим множеством n -го порядка. Из первой гипотезы нетрудно вывести, что эквипериодические множества достаточно большого порядка не пусты и имеют коразмерность 1.

Для их отыскания в предыдущем алгоритме нужно рассматривать x_0 как набор из m символьных переменных. Нам удалось отыскать эти множества только при небольших n .

Пример 5. В случаях линейного и \wp -осциллятора эквипериодические множества порядка 2 и 3 пусты. При $n = 3$ уравнение кривой вырождается в уравнение

$$3\Delta t^4 - 4 = 0,$$

что вполне согласуется с отмеченным ранее обстоятельством: при $n = 4$ шаг не зависит от начальных данных (пример 2). При $n = 5$ эквипериодическое множество оказывается эллиптической кривой

$$\begin{aligned} 27\Delta t^{10}x - 432\Delta t^8xy^2 + 432\Delta t^8x^2 + 1728\Delta t^6x^3 + 27\Delta t^8 \\ - 432\Delta t^6y^2 - 936\Delta t^6x + 168\Delta t^4 + 240\Delta t^2x - 80 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

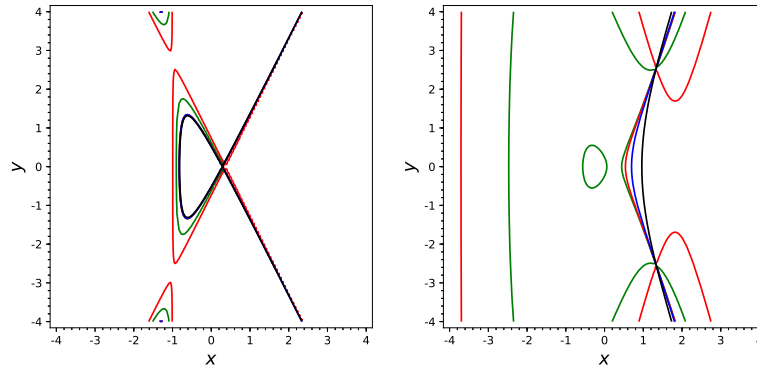


Рис. 5. Эквипериодические кривые для примера 5 при шаге $\Delta t = 1$ (левый рисунок) и при шаге $\Delta t = 0.5$ (правый рисунок).

Эта кривая изображена на рис. 5. Порядки многочленов $F_n \in \mathbb{Q}[\Delta t][x, y]$ представлены в табл. 4. Поскольку эти порядки растут, квазипериодические кривые не принадлежат одному и тому же пучку, линейному или иррациональному.

Пример 6. В случае осциллятора Якоби квазипериодическое множество состоит из некоторой поверхности в пространстве pqr , к которой следует добавить координатные прямые. Полученные выражения весьма громоздки.

Из самого определения вытекают простейшие свойства квазипериодических множеств.

- Если какая-нибудь точка приближенного решения принадлежит квазипериодическому множеству, то это решение имеет период n и все его точки принадлежат этому множеству. Поэтому квазипериодические множества являются интегральными множествами для приближенного решения. Таким образом, на периодических решениях выполняются законы сохранения, но отличные от известных для непрерывной модели.
- Если квазипериодические множества порядков n' и n'' пересекаются в неособой точке рассматриваемого преобразования Кроне, то решение, начавшееся в точке пересечения, должно

иметь периоды n' и n'' одновременно. Поэтому числа n' и n'' должны иметь общий делитель n''' , а сама точка пересечения должна лежать на эквипериодическом множестве порядка n''' .

Если мы посмотрим, например, на плоскость xy для \wp -осциллятора при фиксированном значении шага Δt , то увидим счетное число эквипериодических кривых $F_n(x, y, \Delta t) = 0$. Решение, начавшееся в точке кривой F_n , пробегает ровно n точек этой кривой и возвращается обратно. Решения, не попавшие на эти кривые, будут аperiодическими.

§6. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В классической механике периодически делались попытки рассматривать дифференциальные уравнения Ньютона как разностные, рассматривая dt как малую, но конечную величину [34]. Однако если заменить уравнение $\frac{dx}{dt} = f(x)$ на $\hat{x} - x = f(x)\Delta t$, то нарушаются все фундаментальные законы природы, в том числе t -симметрия и законы сохранения. В результате разностная модель теряет хорошо известные свойства непрерывной модели и приходится использовать непрерывную модель, обладающую правильными качественными свойствами, а дискретную модель рассматривать как несовершенную модель, пригодную только для численных расчетов.

Конечной целью является создание дискретных моделей, обладающих наиболее важными свойствами механических моделей. К их числу, безусловно, относятся наследование алгебраических законов сохранения, t -симметрии, обратимости и периодичности. Как мы выяснили ранее, совместить обратимость и точное сохранение всех алгебраических интегралов невозможно [22]. В этой работе, как и в непрерывном случае, мы ограничили рассмотрение интегральным многообразием (пример 1) и рассматривали разностные схемы на многообразии. Однако в дискретном случае можно пойти и другим путем, отказавшись от точного сохранения именно тех выражений, которые сохраняются в непрерывном случае.

Отправным пунктом в этой статье для нас послужило следующее наблюдение: динамические системы с квадратичной правой частью могут быть аппроксимированы обратимыми разностными схемами, обладающими t -симметрией. Приближенные решения, найденные по этим схемам, являются бирациональными функциями начальных данных

на всем фазовом пространстве. Это удивительно, поскольку в непрерывном случае для появления этого свойства приходилось ограничивать фазовое пространство алгебраическим интегральным многообразием (см. пример 1).

Для любых начальных данных и любых $n \in \mathbb{N}$ методами компьютерной алгебры можно найти все возможные значения для шага Δt , при которых приближенное решение представляет собой последовательность точек с периодом n . Проведенные эксперименты учат, что при достаточно больших n множество таких шагов не пусто и минимальный шаг с ростом n стремится к нулю. Таким образом, для любых начальных данных можно указать периодическое приближенное решение, сколь угодно близкое к точному в равномерной норме.

Множества точек фазовой плоскости, из которых выходят решения, представляющие собой последовательности с периодом n , были названы в тексте эквипериодическими. Их исследование представляется нам весьма перспективной и красивой задачей, которая может прояснить, в какой мере дискретизация по обратимой разностной схеме хаотизирует вполне интегрируемую непрерывную задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. J. Cooper, *Stability of Runge–Kutta methods for trajectory problems*. — IMA J. Numer. Anal. **7** (1987), 1–13.
2. Y. B. Suris, *Preservation of symplectic structure in the numerical solution of Hamiltonian systems*. In: S. S. Filippov (ed.), *Numerical Solution of Differential Equations* [in Russian], Akad. Nauk. SSSR, Inst. Prikl. Mat., Moscow, 1988, pp. 138–144.
3. Yu. B. Suris, *Hamiltonian methods of Runge–Kutta type and their variational interpretation*. — Math. Model. **2** (1990), 78–87.
4. E. Hairer, G. Wanner, Ch. Lubich, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2000.
5. D. Greenspan, *Completely conservative and covariant numerical methodology for N -body problems with distance-dependent potentials*, technical report no. 285 at <http://hdl.handle.net/10106/2267> (1992).
6. D. Greenspan, *Completely conservative, covariant numerical methodology*. — Comp. Math. Appl. **29**, No. 4 (1995), 37–43.
7. D. Greenspan, *Completely conservative, covariant numerical solution of systems of ordinary differential equations with applications*. — Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **65** (1995), 63–87.
8. D. Greenspan, *N -Body Problems and Models*, World Scientific, 2004.
9. J. C. Simo, O. González, *Assessment of energy-momentum and symplectic schemes for stiff dynamical systems*, presented at the ASME Annual Meeting (1993).

10. E. Graham, G. Jeleni, M. A. Crisfield, *A note on the equivalence of two recent time-integration schemes for N -body problems*. — *Comm. Numer. Methods Engrg.* **18** (2002), 615–620.
11. E. A. Ayryan, M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, Yu. Ying, *On periodic approximate solutions of the three-body problem found by conservative difference schemes*. — *Lect. Notes Comput. Sci.* **12291** (2020), 77–90.
12. X. Yang, L. Ju, *Efficient linear schemes with unconditional energy stability for the phase field elastic bending energy model*. — *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **315** (2016), 691–711.
13. X. Yang, L. Ju, *Linear and unconditionally energy stable schemes for the binary fluid-surfactant phase field model*. — *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **318** (2017), 1005–1029.
14. H. Zhang, X. Qian, S. Song, *Novel high-order energy-preserving diagonally implicit Runge–Kutta schemes for nonlinear Hamiltonian ODEs*. — *Appl. Math. Lett.* **102** (2020), 106091.
15. J. Shen, J. Xu, J. Yang, *The scalar auxiliary variable (SAV) approach for gradient flows*. — *J. Comput. Phys.* **353** (2018), 407–416.
16. P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*. In: *Œuvres de Paul Painlevé*, Vol. 1 (1971).
17. H. Umemura, *Birational automorphism groups and differential equations*. — *Nagoya Math. J.* **119** (1990), 1–80.
18. M. D. Malykh, *On transcendental functions arising from integrating differential equations in finite terms*. — *J. Math. Sci.* **209** (2015), 935–952.
19. L. Cremona, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*. In: *Opere matematiche di Luigi Cremona*, Vol. 2, U. Hoepli, Milano, 1915, pp. 54–61 and 193–218.
20. M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*. — *Comm. Math. Phys.* **50** (1976), 69–77.
21. M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*, Wiley, 1989.
22. E. A. Ayryan, M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, Yu. Ying, *On explicit difference schemes for autonomous systems of differential equations on manifolds*. — *Lect. Notes Comput. Sci.* **11661** (2019), 343–361.
23. A. Goriely, *Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems*, World Scientific, 2001.
24. W. W. Golubev, *Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point*, Jerusalem, 1960.
25. F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Vol. 1, Springer, Berlin–Heidelberg, 1979.
26. E. A. Ayryan, M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, *On difference schemes approximating first-order differential equations and defining a projective correspondence between layers*. — *J. Math. Sci.* **240** (2019), 634–645.
27. Л. Н. Лагутинский, *К вопросу о простейшей форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений*. — *Мат. сб.* **27**, вып. 4 (1911), 420–423.
28. A. Bychkov, G. Pogudin, *Optimal monomial quadratization for ODE systems*, [arXiv:2103.08013](https://arxiv.org/abs/2103.08013) (2021).

29. B. Grammaticos, F. W. Nijhoff, A. Ramani, *Discrete Painlevé equations*. In: The Painlevé Property, One Century Later, Springer, Berlin–Heidelberg, 1999, pp. 413–516.
30. P. A. Clarkson, E. L. Mansfield, H. N. Webster, *On the relation between the continuous and discrete Painlevé equations*. — Theor. Math. Phys. **122** (2000), 1–16.
31. K. Ishizaki, R. Korhonen, *Meromorphic solutions of algebraic difference equations*. — Constr. Approx. **48** (2018), 371–384.
32. V. P. Gerdt, M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, Yu Ying, *On the properties of numerical solutions of dynamical systems obtained using the midpoint method*. — Discrete Contin. Models Appl. Comput. Sci. **27**, No. 3 (2019), 242–262.
33. SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.4), 2016; <https://www.sagemath.org>.
34. R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Dover, Mineola, 2010.

Baddour A., Malykh M. D., Sevastianov L. A. On periodic approximate solutions of dynamical systems with a quadratic right-hand side.

We consider difference schemes for dynamical systems $\dot{x} = f(x)$ with a quadratic right-hand side that have t -symmetry and are reversible. Reversibility is interpreted in the sense that the Cremona transformation is performed at each step of the calculations using a difference scheme. The inheritance of periodicity and the Painlevé property by the approximate solution is investigated. In the computer algebra system Sage, values are found for the step Δt for which the approximate solution is a sequence of points with period $n \in \mathbb{N}$. Examples are given, and conjectures about the structure of the sets of initial data generating sequences with period n are formulated.

Российский университет
дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
Москва, Россия

Поступило 17 октября 2021 г.

Объединённый институт
ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна,
Московская область, 141980, Россия
E-mail: malykh_md@pfur.ru