Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 507, 2021 г.

А. М. Вершик, Ф. В. Петров

ОБОБЩЕННАЯ ЛЕММА МАКСВЕЛЛА–ПУАНКАРЕ И МЕРЫ УИШАРТА

§1. Введение

Список всех эргодических мер на множестве бесконечных эрмитовых (или вещественных симметричных) матриц был найден в [4], затем совсем другим способом – в [1], после чего появился ряд работ, посвященных различным обобщениям вопроса. Помимо хорошо известных инвариантных гауссовых мер (иногда называемых белым шумом, мерой Вигнера–Дайсона и т.п.), т.е. мер на множестве бесконечных матриц с независимыми одинаково распределёнными по гауссовой мере на K матричными элементами, имеется серия (пропущенная в работе [2]) особых, вырожденных мер – так называемых мер Уишарта. Эта серия представляет особый интерес и изучена в гораздо меньшей степени. Фактически произвольная эргодическая инвариантная мера комбинируется из гауссовых мер и мер Уишарта (см. [1]). Самое короткое определение меры Уишарта с параметрами $c_1, c_2, \dots$ таково: выбираются случайно и независимо комплексные гауссовы векторы $\xi^1, \xi^2, \dots$ в векторном пространстве произвольной размерности $n = 1, 2, \dots, \infty$ и строится матрица $\sum c_i \xi^i \otimes \bar{\xi}_i$. Её распределение и называют мерой Уишарта.

В работе [1] отыскание всех инвариантных эргодических мер, включая и меры Уишарта, проводилось с помощью эргодического метода [2] и довольно сложной техники симметрических функций. Ставилась задача описания преобразования Фурье искомых мер как пределов преобразований Фурье элементарных мер, соответствующих орбитам конечномерных унитарных (ортогональных) групп. Именно оправдание предельных переходов представляло определённые сложности. В данной работе, имеющей чисто технический характер, мы даем новый способ описания мер Уишарта, который также основан на эргодическом

Ключевые слова: меры Уишарта, многообразие Штифеля, концентрация меры.
Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-11-00152.

методе, но применённом не к преобразованию Фурье мер, а к последовательности самих мер на орбитах. Такое впечатление, что это наиболее простое и короткое описание ответа. Правда, здесь мы ограничиваемся только случаем мер с конечным числом собственных чисел, что не очень существенно.

Оказывается, что предельная процедура применения эргодического метода в данном случае просто повторяет доказательство классической леммы Максвелла–Пуанкаре (см. [3]), состоящей в том, что слабый предел последовательности лебеговых мер на конечномерных сферах с нужной нормировкой есть стандартная гауссова мера в бесконечномерном пространстве. В терминах мер Уишарта эта лемма соответствует инвариантной мере на матрицах ранга 1. Такой способ ближе к исходной идее эргодического метода [2], при этом обобщение леммы Максвелла–Пуанкаре состоит в простой замене последовательности сфер последовательностью многообразий Штифеля растущей размерности и точно такой же ссылке на закон больших чисел. Именно это доказывается ниже. В [2] дано обобщение леммы Максвелла–Пуанкаре на случай некомпактных орбит классических групп и σ-конечных мер на них, однако наиболее общий вид лемм этого типа, т.е. лемм о слабых пределах инвариантных мер на классических многообразиях, пока не найден.

Случай бесконечного числа собственных чисел требует некоторой дополнительной оценки, но мы её здесь не рассматриваем, так как в новой предполагаемой работе предъявим ещё один, более мощный способ доказательства теоремы, основанный на том же эргодическом методе, применённом к многогранникам Гельфанда–Цетлина и мерам на них.

Отметим еще два обстоятельства. Меры Уишарта параметризуются предельными частотами соответствующих последовательностей собственных чисел; сумма частот должна быть конечна. Противоположный случай состоит в том, что все предельные частоты равны нулю, – именно этому случаю отвечает белый шум. Очевидна аналогия со случаем центральных мер на бесконечных таблицах Юнга: там также есть центральные меры, задающиеся набором частот строк и столбцов с суммой частот равной 1, и, с другой стороны, имеется единственная мера с нулевыми частотами строк и столбцов – мера Планшереля. Иначе говоря, белый шум есть аналог меры Планшереля, и несущественная разница – в том, что здесь имеется одномерная серия шумов.

Меры с не более чем счётным числом частот, сумма которых равна 1, и меры с нулевыми частотами представляют собой два крайних случая эргодических центральных (инвариантных) мер, очень различных по своей природе и отвечающих существенно разным асимптотикам (например, асимптотикам спейсинга – расстояний между соседними собственными числами).

Доказательство единственности (или единственности с точностью до конечного числа параметров) всегда составляет особую трудность – она появляется во многих задачах о центральных мерах (см. [11]). Коротко говоря, инвариантные меры имеют внутреннюю размерность: меры Уишарта имеют размерность 0, а белый шум – размерность 1. Для произвольных (нестационарных) марковских компактов размерность эргодических мер может быть произвольным натуральным числом.

Другое замечание: если заранее предположить, что собственные числа неотрицательны, то список эргодических мер, точнее список эргодических центральных мер на пространстве неотрицательно определённых эрмитовых матриц, состоит только из мер Уишарта. Поэтому в этом случае отыскание всех эргодических мер проще общего случая – помогает интерпретация неотрицательных матриц как матриц Грама; в других терминах он рассмотрен в работах [9, 10].

Мы начинаем с общей конструкции, описывающей ветвление пространства эрмитовых матриц относительно последовательности собственных чисел главных миноров.

Это расслоение эрмитовых матриц конечной размерности над пространством их спектров со слоем тор (в невырожденном случае), конечно, является классическим, хотя его точное описание трудно найти в литературе. Пространство спектров, то есть база расслоений, есть бесконечномерный многогранник Гельфанда–Цетлина, который образует непрерывную диаграмму Браттели, и задача об отыскании инвариантных мер на эрмитовых матрицах может быть редуцирована к задаче об отыскании центральных мер на пространстве путей этого непрерывного графа, который мы называем графом Гельфанда–Цетлина (ГЦ). Такой путь был намечен еще С. В. Керовым и первым автором, и для белого шума он был детально реализован в работе [8]. В следующей нашей работе будет изложен общий метод отыскания центральных мер для некоторых непрерывных диаграмм Браттели на примере графа ГЦ.

§2. Торы. Общая конструкция

Пусть A – эрмитова матрица размера $N \times N$, где $N \in \mathbb{N} \cup \infty$. Пусть (e_i) обозначает стандартный базис; $V_k = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ – линейная оболочка первых k координатных базисных векторов при $k = 1, 2, \ldots, N$; $P_k : \mathbb{C}^N \to V_k$ – ортогональный проектор на V_k.

Обозначим через A_k главный (то есть левый верхний) минор матрицы A размера $k \times k$; тогда $A_k = P_k A P_k$ (мы отождествляем операторы и соответствующие им матрицы, то есть A_k понимается как оператор в V_k). Будем считать, что матрица A *типична* в том смысле, что спектр каждой из матриц A_k простой.

Обозначим через $\mathcal{B}_k \subset V_k$ собственный базис матрицы A_k, понимаемый как набор из k ортогональных собственных направлений, упорядоченный по возрастанию собственных чисел. Пусть $k < N$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbb{T}^k$ – элемент k-мерного тора, то есть $|\tau_i| = 1$ при $i = 1, \ldots, k$. Определим $S(A, \tau)$ как матрицу оператора, который диагонален в базисе

$$(\mathcal{B}_k(A), e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots)$$

с элементами $(\tau_1, \ldots, \tau_k, 1, 1, \ldots)$.

Положим $\tau A = S(A, \tau)^* A S(A, \tau)$. Выберем номер $\ell \in [k, N]$. Заметим, что пространство V_ℓ инвариантно для оператора $S(A, \tau)$, то есть $S(A, \tau) P_\ell = P_\ell S(A, \tau)$. Поэтому для минора $(\tau A)_\ell$ матрицы τA имеем

$$\begin{aligned}(\tau A)_\ell = P_\ell S(A, \tau)^* A S(A, \tau) P_\ell &= S(A, \tau)^* P_\ell A P_\ell S(A, \tau) \\ &= S(A, \tau)^* A_\ell S(A, \tau),\end{aligned}$$

так что операторы $(\tau A)_\ell$ и A_ℓ сопряжены и для собственных базисов имеем

$$\mathcal{B}_\ell(\tau A) = S(A, \tau)^* \mathcal{B}_\ell.$$

В частности, при $\ell = k$ получаем $(\tau A)_k = A_k$. Отсюда сразу следует, что $(\tau A)_i = A_i$ при $i \leqslant k$. Таким образом, матрицы $(\tau A)_i$ и A_i сопряжены при всех $i = 1, 2, \ldots, N$, так что матрицы τA и A имеют общую *спектральную историю* – упорядоченный набор спектров главных миноров.

Предложение 2.1. *Для фиксированного τ отображение $A \to \tau A$ сохраняет стандартную гауссову меру на матрицах.*

Доказательство. Обозначим через a_{ij} случайные элементы матрицы A, а через γ_{ij} соответствующую гауссову меру (на прямой при $i = j$

и на комплексной плоскости при $i \neq j$), так что для гауссовой меры имеем $d\gamma = \prod_{i \leqslant j} d\gamma_{ij}$. Достаточно доказать, что

$$\int \prod_{i \leqslant j} f_{ij}(a_{ij}) d\gamma = \int \prod_{i \leqslant j} f_{ij}((\tau a)_{ij}) d\gamma.$$

Применим теорему Фубини, производя сначала интегрирование по множеству пар, для которых $i \leqslant j$ и $j > n$ (а элементы матрицы A_n, следовательно, фиксированы). Достаточно доказать, что при фиксированной матрице A_n интеграл по матричным элементам, не входящим в A_n, не зависит от τ. Поскольку $(\tau A)_n = A_n$, вместе с матрицей A_n фиксирована и ортогональная матрица $S(A, \tau)$. Пусть B – случайная гауссова матрица того же размера, что и A. Заметим, что матрица $S(A, \tau)^* B S(A, \tau)$ распределена так же, как B. При этом элементы матрицы $S(A, \tau)^* B S(A, \tau)$, не входящие в её главный минор порядка n, не зависят от B_n. Отсюда следует, что совместное распределение элементов матрицы $\tau A = S(A, \tau)^* B S(A, \tau)$, не входящих в главный минор порядка n, такое же, как у матрицы $S(A, \tau)^* B S(A, \tau)$, а значит, такое же, как у матрицы B, – и потому не зависит от τ. □

Таким образом, на эрмитовых матрицах размера $N \times N$ задано сохраняющее спектральную историю действие группы $\mathbb{T}^k$. Причём это групповое действие: произведению элементов тора отвечает композиция соответствующих действий. Более того, действия торов при разных k коммутируют, что определяет действие произведения всех этих торов – абелевой группы $\mathbb{T}^{N(N-1)/2}$ (бесконечного тора при $N = \infty$).

Проверим это. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \mathbb{T}^m$. Чему равен оператор $S(\tau A, \sigma)$? Если $m \leqslant k$, то, поскольку $\mathcal{B}_m(\tau A) = \mathcal{B}_m(A)$, получаем $S(\tau A, \sigma) = S(A, \sigma)$. Если же $m \geqslant k$, то $\mathcal{B}_m(\tau A) = S(A, \tau)^* \mathcal{B}_m(A)$, откуда следует, что операторы $S(A, \sigma)$ и $S(\tau A, \sigma)$ сопряжены оператором $S(A, \tau)$: $S(\tau A, \sigma) = S(A, \tau)^* S(A, \sigma) S(A, \tau)$.

Пусть $m \geqslant k$. Докажем, что $\sigma \tau A = \tau \sigma A$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}_n(\sigma \tau A) = \mathcal{B}_n(\tau \sigma A)$ при $n \geqslant m$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(\sigma \tau A) &= S(\tau A, \sigma)^* \mathcal{B}_n(\tau A) = S(\tau A, \sigma)^* S(A, \tau) * \mathcal{B}_n(A) \\ &= S(A, \tau)^* S(A, \sigma)^* S(A, \tau) S(A, \tau)^* \mathcal{B}_n(A) = S(A, \tau)^* S(A, \sigma)^* \mathcal{B}_n(A) \\ &\qquad = S(\sigma A, \tau)^* \mathcal{B}_n(\sigma A) = \mathcal{B}_n(\tau \sigma A), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Итак, на пространстве типичных матриц действует тор $\mathbb{T}^{N(N-1)/2}$, и инвариантом действия является спектральная история. Это полная система инвариантов: две типичные эрмитовы матрицы A, B с одинаковой спектральной историей получаются одна из другой действием тора, а для вещественных симметричных матриц – действием подгруппы $\{-1,1\}^{N(N-1)/2} \subset \mathbb{T}^{N(N-1)/2}$. Покажем это.

Поскольку для типичной матрицы ни одно направление базиса $\mathcal{B}_k$ не лежит в пространстве V_{k-1}, мы можем на каждом направлении выбрать единичный вектор с положительной k-й координатой (относительно стандартного базиса); именно такой ортонормированный базис и зафиксируем при каждом k и снова обозначим $\mathcal{B}_k$. В нём матрица квадратичной формы $Q(x) = (Ax, x)$ диагональна, и на диагонали стоят собственные числа матрицы A_k.

Поймём, как при данном $n \leqslant N$ устроены матрицы A_n, такие, что матрица A_{n-1} и спектр Λ_n матрицы A_n фиксированы.

На языке квадратичных форм это означает, что известны сужение квадратичной формы $Q(x) = (Ax, x)$ на V_{n-1} и собственные числа сужения формы Q на V_n.

Положим $a_n = \operatorname{tr} A_n - \operatorname{tr} A_{n-1}$. Тогда в координатах относительно базиса $(\mathcal{B}_{n-1}, e_n)$ пространства V_n матрица сужения квадратичной формы Q на V_n выглядит как

$$D := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Множество $\Lambda_n := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ должно быть спектром матрицы D, то есть

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - t) = \begin{vmatrix} a_1 - t & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 - t & 0 & b_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & a_{n-1} - t & b_{n-1} \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_{n-1} & a_n - t \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - t) \cdot \left(a_n - t - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|b_i|^2}{a_i - t} \right)$$

(определитель может быть вычислен, например, с помощью разложения по последней строке). Таким образом, числа $-|b_i|^2$ должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i - t) - \prod\limits_{i=1}^{n}(a_i - t)}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_i - t)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i - t)}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_i - t)} - a_n + t = -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{|b_i|^2}{a_i - t}. \qquad (1)$$

Заметим, что $a_n = \operatorname{tr} A_n - \operatorname{tr} A_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i$, откуда следует, что левая часть соотношения (1) является рациональной дробью, в которой числитель имеет меньшую степень, чем знаменатель.

Она раскладывается на простейшие дроби, и числа $|b_i|^2$ таким образом определяются однозначно. При этом типичность матрицы гарантирует, что $b_i \neq 0$ при всех i. Таким образом, свобода состоит в выборе аргументов чисел b_i, $i = 1, \ldots, n-1$, и изменение этих аргументов как раз соответствует описанному выше действию тора.

Итак, последовательно действуя на матрицу A торами $\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^3, \ldots$, можно добиться, чтобы её миноры $A_1, A_2, \ldots$ совпадали с соответствующими минорами матрицы B. При этом после того, как совпали миноры порядка k, действия следующих торов этого уже не отменяют – так что в итоге найдётся единственный элемент тора $\mathbb{T}^{N(N-1)/2}$, переводящий A в B.

Резюмируем нашу конструкцию: пространство типичных матриц расслоено на торы (точнее говоря, на орбиты действия тора), и это есть расслоение на поверхности уровня отображения матрицы в её спектральную историю.

Несложно выбрать сечение этого расслоения, то есть одну матрицу для данной спектральной истории. Именно, в обозначениях выше будем всегда выбирать числа b_i вещественными положительными. Получается типичная матрица, которую мы считаем "канонической" матрицей с данной спектральной историей.

Теорема 2.2. *Гауссова мера на матрицах есть прямое произведение меры Лебега на торе и меры на "канонических" матрицах (или меры на спектральных историях), индуцируемой из гауссовой меры.*

Доказательство. Рассмотрим случайную гауссову матрицу. Пусть X – измеримое событие, зависящее только от спектральной истории. Докажем, что условная вероятностная мера на торе при условии X есть мера Лебега. Заметим, что эта условная мера инвариантна относительно действия тора на себе умножениями, поскольку событие X и гауссова мера инвариантны относительно действия тора на матрицы.

Инвариантная вероятностная мера на торе есть мера Лебега. $\square$

Отметим, что действие тора сохраняет гауссову меру и сама гауссова мера оказывается разложена в прямое произведение меры Лебега на торе и меры на "канонических" матрицах, или, удобнее говорить, мерах на спектральных историях (индуцируемых из гауссовой меры; подробно эти меры изучены в статье [13], опирающейся на более раннюю работу [8]).

Скажем несколько слов об изменениях, которые необходимо произвести в этой конструкции для матриц общего вида (с совпадающими собственными числами). В формуле (1) фиксированы оказываются не величины $|b_i|^2$, а суммы $|b_i|^2$, соответствующие индексам с одним и тем же значением a_i. Таким образом, вместо тора возникает произведение сфер соответствующих размерностей.

§3. Лемма Максвелла–Пуанкаре для многообразия Штифеля

Здесь мы докажем достаточно стандартное утверждение о гауссовой аппроксимации на многообразии Штифеля, ср. [12, п. 5]. Наше доказательство не использует вычислений и оценок интегралов, но использует только закон больших чисел.

Пусть $\mathbb{K}$ обозначает поле вещественных или комплексных чисел или тело кватернионов.

Пусть $w^n = (w_1, \dots, w_k) \in V_k(\mathbb{K}^n)$ – случайный набор из k попарно ортогональных векторов, $\|w_i\| = \sqrt{n}$. Иными словами, последовательность $(w_1, \dots, w_k)$ выбирается на соответствующем многообразии Штифеля $V_k(\mathbb{K}^n)$ по инвариантной относительно действия унитарной группы мере $d\mu_{V_k(\mathbb{K}^n)}$. (Обычно многообразие Штифеля состоит из наборов ортонормированных векторов, но нам удобнее зафиксировать длины $\sqrt{n}$.)

Пусть T – оператор проектирования в $\mathbb{K}^n$ на k-мерное координатное подпространство. Он индуцирует покомпонентное действие из $V_k(\mathbb{K}^n)$ на $\mathbb{K}^{k\cdot k}$. Рассмотрим меру $\nu_{n,k}$, индуцированную оператором T на $\mathbb{K}^{k\cdot k}$.

Теорема 3.1. *Пусть n стремится к бесконечности; тогда меры $\nu_{n,k}$ стремятся к стандартному гауссову инвариантному ансамблю на $\mathbb{K}^{k\cdot k} = (\mathbb{K}^k)^k$.*

Доказательство. Рассмотрим меру $d\tilde{\mu}_{n,k}$ на $\mathbb{K}^{n\cdot k}$, которая соответствует выбору k независимых гауссовских векторов $u_1, \dots, u_k$ из $\mathbb{K}^n$ с математическим ожиданием квадрата модуля каждой координаты равным 1. Для неё проекция на $\mathbb{K}^k$ в точности такая, как в формулировке теоремы. Осталось понять требуемую слабую близость мер $d\tilde{\mu}_{n,k}$ и $d\mu_{V_k(\mathbb{K}^n)}$ при больших n. Для этого нам удобно считать, что оператор T проектирует не на фиксированное, а на случайное (по инвариантной мере на грассманиане) подпространство, в котором выбирается случайный ортонормированный базис. Образы обеих рассматриваемых мер не изменяются от такого взгляда на вещи.

Из закона больших чисел следует, что набор $U = (u_1, \dots, u_k)$ при большом n с вероятностью близкой к единице $o(\sqrt{n})$-близок к некоторому набору $W = (w_1, \dots, w_k) \in V_k(\mathbb{K}^n)$ (можно считать для определённости, что W получается из U ортогонализацией). В самом деле, с вероятностью близкой к единице среднее значение $\|u_i\|^2$ равно n, а среднее значение $u_i \cdot u_j$ равно $o(n)$, поэтому углы между u_i и u_j близки к прямым. Из этого следует требуемое.

Теперь заметим, что для случайного вектора v на единичной сфере получаем $\mathbb{E}|(v, w_i - u_i)|^2 = o(1)$, поэтому среднее квадратичное каждого элемента $(k \times k)$-матрицы, индуцируемой набором $W - U$ с помощью оператора T, мало. Отсюда стандартным применением неравенства Чебышева следует требуемая близость мер. □

§4. Меры Уишарта

Для определённости сосредоточимся на вещественном случае.

Напомним подробнее данное во введении (в комплексном случае) определение меры Уишарта на матрицах размера $n \times n$ (возможно, $n = \infty$) с вещественными параметрами $c_1, \dots, c_n$. Выбираем n независимых стандартных гауссовых векторов $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ и строим матрицу $\sum c_i \xi_i \otimes \xi_i$. Если $c_i = 0$ при $i > k$, мы получаем распределение на матрицах ранга не выше k. Оно корректно определено и при $n = \infty$.

Пусть k – фиксированное натуральное число, а n стремится к бесконечности. Рассмотрим меру на симметричных вещественных матрицах размера $n \times n$ и ранга не выше k, инвариантную относительно действия ортогональной группы $O(n)$.

Если собственные числа матрицы A фиксированы и равны $\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots, 0$, то её орбита под действием группы $O(n)$ состоит из матриц вида $\sum \lambda_i \xi_i \otimes \xi_i$, где набор векторов $\xi_1, \dots, \xi_k$ распределён по инвариантной мере на многообразии Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, изучение совместного распределения нескольких матричных элементов матрицы A сводится к изучению распределения проекций $\xi_1, \dots, \xi_k$ на конечномерное (координатное) подпространство.

Таким образом, из теоремы 3.1 получаем следующее:

• если $\frac{1}{n^2} \sum \lambda_i^2$ стремится к бесконечности, то матричные элементы почти наверное не имеют предельного распределения;

• если $\lambda_i \sim c_i n$, то распределение матрицы A стремится к распределению Уишарта ранга k с параметрами $c_1, \dots, c_k$.

Таким образом, раскладывая произвольную инвариантную меру на симметричных матрицах ограниченного ранга по мерам на орбитах, получаем, что в пределе $n = \infty$ она раскладывается по мерам Уишарта.

Список литературы

1. G. Olshanski, A. Vershik, *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices.* In: Contemporary Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 137–175.
2. А. М. Вершик, *Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп.* — ДАН СССР **218**, вып. 4 (1974), 749–752.
3. А. М. Вершик, *Существует ли лебегова мера в бесконечномерном пространстве?* — Труды Инст. Мат. им В. А. Стеклова **259** (2007), 256–281.
4. D. Pickrell, *Mackey analysis of infinite classical motion groups.* — Pacific J. Math. **150**, No. 1 (1991), 139–166.
5. T. Assiotis, *Ergodic decomposition for inverse Wishart measures on infinite positive-definite matrices.* — SIGMA **15** (2019), 067.
6. J. Wishart, *The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population.* — Biometrika **20A** (1928), 32—52.
7. T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 3rd edition, Wiley Interscience, Hoboken, NJ (2003).
8. Yu. Baryshnikov, *GUEs and queues.* — Probab. Theory Related Fields **119** (2001), 256–274.
9. Л. Н. Довбыш, В. Н. Судаков, *О матрицах Грама–де Финетти.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **119** (1982), 77–86.
10. T. Austin, *Exchangeable random measures.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **51**, No. 3 (2015), 842–861.
11. А. М. Вершик, *Три теоремы единственности меры Планшереля с различных точек зрения.* — Труды Инст. Мат. им В. А. Стеклова **305** (2019), 63–77.

12. G. Olshanski, *Unitary representations of infinite-dimensional pairs* (G, K) *and the formalism of R. Howe.* In: A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko (eds.), Representations of Lie groups and related topics. Gordon and Breach, New York, 1990, pp. 269–463.
13. K. Johansson, E. Nordenstam, *Eigenvalues of GUE minors.* — Electron. J. Probab. **11**, No. 50 (2006), 1342–1371.

Vershik A. M., Petrov F. V. A generalized Maxwell–Poincaré lemma and Wishart measures.

We get a series of degenerate Wishart measures on the space of infinite Hermitian matrices by directly passing to a limit of a sequence of orbital invariant measures on the Stiefel manifold.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
и С.-Петербургский государственный
университет,
С.-Петербург, Россия,
Институт проблем
передачи информации РАН,
Москва, Россия
E-mail: avershik@pdmi.ras.ru

Поступило 3 ноября 2021 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
и С.-Петербургский государственный
университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: f.v.petrov@spbu.ru