Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 507, 2021 г.

Г. А. Вепрев

МАСШТАБИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ ТИПИЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§1. Введение

1.1. Масштабированная энтропия. Масштабированная энтропия есть инвариант сохраняющего меру преобразования, предложенный А. М. Вершиком в работах [2–4]. В отличие от классической энтропии Колмогорова–Синая, основанной на динамике измеримых разбиений, мы, следуя подходу А. М. Вершика, изучаем свойства усреднений измеримых метрик и полуметрик.

Пусть (X, μ) – стандартное вероятностное пространство (пространство Лебега–Рохлина). Неотрицательная функция ρ на $(X, \mu)^2$ называется *полуметрикой*, если она симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника. Полуметрика называется *измеримой* (суммируемой), если она измерима (суммируема) как функция двух переменных.

Для положительного ε определим *ε-энтропию* полуметрической тройки (X, μ, ρ) следующим образом. Пусть k – минимальное такое натуральное число, что пространство X представляется в виде объединения измеримых множеств $X_0, X_1, \ldots, X_k$, где $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\operatorname{diam}(X_i) < \varepsilon$ для $i > 0$. Положим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \log_2 k,$$

если такое конечное k существует. Иначе положим $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = +\infty$.

Полуметрика называется *допустимой*, если все ее ε–энтропии конечны при всех положительных ε. Оказывается (см. [5]), это условие эквивалентно тому, что полуметрика является сепарабельной на подмножестве полной меры. Множество всех суммируемых допустимых полуметрик образует выпуклый конус $\mathcal{A}\mathrm{dm}$ в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. Для работы с допустимыми полуметриками полезна специальная *m-норма* на подпространстве в $L^1(X^2, \mu^2)$, содержащем конус $\mathcal{A}\mathrm{dm}$,

---

Ключевые слова: масштабированная энтропия, типичный автоморфизм, нулевая энтропия.

Работа поддержана грантом РНФ 21-11-00152. Работа выполнена при финансовой поддержке "Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса»".

определенная в работе [5]:

$$\|f\|_m = \inf\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} : \rho(x,y) \geqslant |f(x,y)|, \ \mu^2\text{-п.в.}\},$$

где инфимум вычисляется по множеству всех измеримых полуметрик.

Пусть T – автоморфизм пространства (X,μ), а ρ – допустимая полуметрика на (X,μ). Символом $T^n_{\mathrm{av}}\rho$ обозначим усреднение полуметрики ρ за n шагов преобразования T:

$$T^n_{\mathrm{av}}\rho(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(T^i x, T^i y), \quad x,y \in X.$$

Рассмотрим следующую величину:

$$\Phi_\rho(n,\varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho).$$

Априори функция $\Phi_\rho(n,\varepsilon)$ зависит от n, ε и полуметрики ρ. Однако её асимптотическое поведение по n в некотором смысле не зависит от ε и ρ. Следующее определение было предложено А. М. Вершиком в работах [2–4].

Определение 1. Последовательность положительных чисел h_n называется *масштабирующей энтропийной последовательностью* для полуметрики ρ, если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\Phi_\rho(n,\varepsilon) \asymp h_n.$$

Иными словами, функция Φ_ρ асимптотически не зависит от ε.

Здесь и далее соотношение $\phi \asymp \psi$ для двух последовательностей $\phi(n)$ и $\psi(n)$ означает, что существуют такие две положительные константы c и C, что $c\phi(n) \leqslant \psi(n) \leqslant C\phi(n)$. Отметим, что любая последовательность $h'_n \asymp h_n$ также является масштабирующей последовательностью для ρ.

Полуметрика называется *порождающей*, если все её сдвиги разделяют точки с точностью до множества меры нуль. В работе [7] П. Б. Затицкий доказывает, что если последовательность h_n является масштабирующей для некоторой порождающей полуметрики $\rho \in \mathcal{A}\mathrm{dm}$, то h_n является масштабирующей для любой такой полуметрики. Таким образом, класс всех масштабирующих энтропийных последовательностей не зависит от полуметрики и образует инвариант сохраняющего меру преобразования T. Отметим, что этот класс может оказаться пустым (см. [6]).

Для преобразований с положительной энтропией Колмогорова–Синая последовательность $h_n = n$ является масштабирующей последовательностью, см. [7]. В [5] доказано, что преобразования с чисто точечным спектром, и только они, имеют ограниченную масштабирующую энтропийную последовательность. Случаи линейной и ограниченной масштабирующей последовательности являются экстремальными случаями асимптотического поведения последовательности h_n.

В работах [8, 9] было доказано, что если масштабирующая последовательность h_n существует, то можно найти субаддитивную последовательность $f_n \asymp h_n$. Более того, для любой данной субаддитивной возрастающей последовательности f_n существует эргодическое сохраняющее меру преобразование T, для которого f_n является масштабирующей последовательностью. В частности, для любой возрастающей к бесконечности последовательности $f_n = o(n)$ существуют как автоморфизмы с масштабирующей последовательностью, растущей асимптотически быстрее f_n, так и автоморфизмы с масштабирующей последовательностью, растущей медленнее f_n. Более того, существуют преобразования, масштабирующая последовательность которых не сравнима с f_n.

Необходимо отметить что схожие инварианты "медленного типа" рассматривались в работах [1, 10, 11, 14].

В общем случае понятие масштабирующей последовательности может быть обобщено следующим образом. Определим отношение эквивалентности на множестве функций из $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$, убывающих по своим вторым аргументам: будем говорить, что Φ и Ψ эквивалентны, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \Psi(n, \varepsilon) \precsim \Phi(n, \delta) \text{ и } \Phi(n, \varepsilon) \precsim \Psi(n, \delta). \qquad (1)$$

Для последовательностей $\phi(n)$ и $\psi(n)$ соотношение $\phi \precsim \psi$ означает, что $\phi(n) \leqslant C\psi(n)$ для некоторой положительной константы C. Мы будем писать $\phi \prec \psi$, если $\phi(n) = o(\psi(n))$. Отношение $\precsim$ продолжается на множество функций двух переменных. Мы будем писать $\Phi \precsim \Psi$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\Phi(n, \varepsilon) \precsim \Psi(n, \delta)$. Отношение $\precsim$ согласовано с отношением эквивалентности (1) и образует частичный порядок на множестве классов эквивалентности.

В работе [7] доказано (см. лемму 9), что для любого сохраняющего меру преобразования и порождающих полуметрик ω и ρ из $\mathcal{A}\mathrm{dm}$ соответствующие энтропийные функции Φ_ρ и Φ_ω эквивалентны. Таким образом, мы можем дать следующее определение.

Определение 2. *Масштабированной энтропией* системы (X, μ, T) называется класс эквивалентности $\mathcal{H}(X, \mu, T) = [\Phi_\rho]$, где $\rho \in \mathcal{A}\mathrm{dm}(X, \mu)$ – некоторая (любая) порождающая полуметрика.

Стоит отметить согласованность определения с понятием масштабирующей последовательности. Система (X, μ, T) допускает энтропийную масштабирующую последовательность в том и только том случае, если класс $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ содержит функцию $\Phi(n, \varepsilon) = \phi(n)$, не зависящую от ε.

Для масштабированной энтропии также справедливы аналоги теорем о субаддитивности. Для любого сохраняющего меру преобразования T класс $\mathcal{H}(T)$ содержит функцию, монотонную по ε и n и субаддитивную по n. И обратно, для любой такой функции Φ существует такой эргодический автоморфизм T, что $\mathcal{H}(T) \ni \Phi$. Подробный обзор теории масштабированной энтропии ожидается в готовящейся работе А. М. Вершика, П. Б. Затицкого и автора.

В настоящей работе мы изучаем масштабированную энтропию типичного преобразования. Типичность рассматривается в слабой топологии группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ стандартного пространства с мерой (X, μ). Мы доказываем, что не существует никаких нетривиальных оценок масштабированной энтропии типичного преобразования. Иными словами, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\phi(n)$ – неограниченная возрастающая последовательность положительных чисел, причем $\phi(n) = o(n)$. Тогда множество автоморфизмов T, для которых для любой функции $\Phi \in \mathcal{H}(T)$ и любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\Phi(n, \varepsilon)$ не сравнима с $\phi(n)$, содержит плотное G_δ-множество.*

Отметим, что на настоящий момент автору неизвестно, допускает ли типичное преобразование масштабирующую последовательность. Также остается открытым вопрос о существовании нетривиальных оценок масштабированной энтропии типичных групповых действий.

1.2. Последовательностная энтропия. Доказательство теоремы 1 использует взаимные оценки между масштабированной энтропией и *последовательностной энтропией Кириллова–Кушниренко* [12], точнее вариантом последовательностной энтропии, который рассматривался в работе [13]. Пусть $P = \{P_j\}$ есть последовательность конечных множеств целых чисел. Для автоморфизма T пространства (X, μ)

и конечного измеримого разбиения ξ определим величину

$$h_P(T,\xi) = \limsup_j \frac{1}{|P_j|} H\Big(\bigvee_{n\in P_j} T^{-n}\xi\Big),$$

где $H(\zeta)$ – энтропия Шеннона разбиения ζ. Последовательностная энтропия преобразования T относительно системы множеств P определяется следующим образом:

$$h_P(T) = \sup_\xi h_P(T,\xi).$$

1.2.1. *Оценки ε-энтропии.* Сформулируем несколько технических результатов теории масштабированной энтропии, которые будут использоваться в дальнейшем. Каждому измеримому разбиению ξ естественным образом соответствует *разрезная полуметрика* $\rho_\xi(x,y)$, равная единице, если x и y лежат в разных элементах разбиения ξ, и нулю иначе. Следующая лемма из работы [7] связывает энтропию Шеннона измельчения разбиений и ε-энтропию усреднения соответствующих разрезных полуметрик.

Лемма 1. *Путь $m,k\in\mathbb{N}$ и $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ – конечные измеримые разбиения пространства (X,μ), состоящие не более чем из m элементов. Пусть $\xi = \bigvee_{i=1}^k \xi_i$ есть общее измельчение этих разбиений, а $\rho = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \rho_{\xi_i}$ – усреднение соответствующих полуметрик. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$ выполнено неравенство*

$$\frac{H(\xi)}{k} \leqslant \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)}{k} + 2\varepsilon\log m - \varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \frac{1}{k}.$$

Одним из фундаментальных свойств ε-энтропии является ее монотонность в следующем смысле [9].

Лемма 2. *Пусть $\rho_1,\dots,\rho_k$ – допустимые полуметрики на пространстве (X,μ), причем $\rho_i\leqslant 1$ для $i\leqslant k$. Тогда существует такое $m\leqslant k$, что*

$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}(X,\mu,\rho_m) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon\left(X,\mu,\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \rho_i\right).$$

Также в контексте данной работы полезна следующая лемма из работы [7] о локальной ограниченности ε-энтропии в m-норме.

Лемма 3. *Предположим, что полуметрики* $\rho, \widetilde{\rho} \in \mathcal{A}\mathrm{dm}(X,\mu)$ *и число* $\varepsilon > 0$ *таковы, что* $\|\rho - \widetilde{\rho}\|_m < \varepsilon^2/32$. *Тогда для любого* $n \geqslant 1$ *выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\widetilde{\rho}) \leqslant \mathbb{H}_{\frac{\varepsilon}{4}}(X,\mu,T^n_{\mathrm{av}}\rho).$$

§2. Отсутствие оценки сверху масштабированной энтропии типичного автоморфизма

Следующая теорема была доказана в работе [13].

Теорема 2. *Пусть* $L(j)$ *– неубывающая последовательность натуральных чисел, стремящаяся к бесконечности, и* $P = \{P_j\}$, *где* $P_j = \{j, 2j, \ldots, L(j)j\}$. *Тогда множество автоморфизмов* $\{S \mid h_P(S) = \infty\}$ *содержит плотное* G_δ*-подмножество в группе* $\mathrm{Aut}(X,\mu)$.

Последовательностная энтропия и ее обобщения тесно связаны с масштабированной энтропией. Примером такой связи является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\phi(n)$ *– последовательность положительных чисел и* $\lim\limits_n \frac{\phi(n)}{n} = 0$. *Тогда множество автоморфизмов* $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, *для которых для* $\Phi \in \mathcal{H}(S)$ *выполнено условие* $\Phi \not\precsim \phi$, *содержит плотное* G_δ*-подмножество.*

Теорема 3 может быть сформулирована в терминах классов эквивалентности отношения (1).

Следствие 1. *Пусть* $\Phi(n,\varepsilon)$ *– такая положительная функция, убывающая по* ε, *что для любого* ε *выполнено условие* $\Phi(n,\varepsilon) = o(n)$. *Тогда множество автоморфизмов* $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, *для которых* $\mathcal{H}(S) \not\precsim \Phi$, *типично.*

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим такую целочисленную последовательность $L(j)$, что $L(j) \succ \phi(L(j)j)$.

Пусть $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$. Предположим, что существуют положительная константа c и конечное измеримое разбиение ξ, состоящее из m элементов, удовлетворяющие соотношению

$$\limsup_j \frac{1}{L(j)} H(\xi_j) > c,$$

где $\xi_j = \bigvee\limits_{n=1}^{L(j)} T^{-nj}\xi$. Пусть ρ – разрезная полуметрика, соответствующая разбиению ξ, а полуметрика $\rho_j = \frac{1}{L(j)} \sum\limits_{n=1}^{L(j)} T^{-nj}\rho$ – среднее первых $L(j)$ сдвигов полуметрики ρ под действием преобразования T^j. Применяя лемму 1 для разбиений $T^{-nj}\xi$, получим следующее неравенство:

$$\frac{H(\xi_j)}{L(j)} \leqslant \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_j)}{L(j)} + 2\varepsilon\log m - \varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \frac{1}{L(j)}.$$

Выбирая достаточно малое $\varepsilon > 0$, найдем такую подпоследовательность $\{j_k\}$, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_{j_k}) \gtrsim L(j_k).$$

Заметим, что

$$T_{\mathrm{av}}^{L(j)j}\rho = \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j-1} T^{-i}\rho_j.$$

Следовательно, в силу леммы 2

$$\mathbb{H}_{\frac{\varepsilon^2}{2}}(X,\mu,T_{\mathrm{av}}^{L(j_k)j_k}\rho) \geqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_{j_k}) \gtrsim L(j_k) \succ \phi(L(j_k)j_k).$$

Последнее неравенство справедливо в силу выбора последовательности $L(j)$. Таким образом, для любой функции $\Phi \in \mathcal{H}(T)$ и последовательности $n_k = L(j_k)j_k$ при достаточно малом ε выполнено условие $\Phi(n_k,\varepsilon) \succ \phi(n_k)$. Следовательно, $\Phi \not\precsim \phi$ для любого автоморфизма $T \in \{S \mid h_P(S) > 0\}$. Применяя теорему 2, получаем желаемое. $\square$

§3. Отсутствие оценки снизу масштабированной энтропии типичного автоморфизма

Для доказательства теоремы 1 остается доказать отсутствие нетривиальной оценки снизу для типичного преобразования.

Теорема 4. *Пусть $\phi(n)$ – неограниченная возрастающая последовательность положительных чисел. Тогда множество автоморфизмов T, для которых для любой функции $\Phi \in \mathcal{H}(T)$ выполнено условие $\Phi \not\gtrsim \phi(n)$, содержит плотное G_δ-подмножество.*

Замечание. Теорема 4 также может быть сформулирована в терминах классов эквивалентности отношения (1).

Доказательство. Зафиксируем некоторую плотную последовательность конечных измеримых разбиений $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства (X,μ) и полуметрику $\rho = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho_{\xi_i}$, где ρ_{ξ_i} есть разрезная полуметрика для разбиения ξ_i. Пусть $\{T_q\}$ – плотное семейство преобразований с чисто точечным спектром, например счетное плотное подмножество в орбите стандартного одометра, а $\{\varepsilon_k\}$ – убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Так как масштабированная энтропия преобразования с чисто точечным спектром ограничена, для любых q и p найдется такое $j_{p,q}$, что

$$\mathbb{H}_{\frac{\varepsilon_k}{4}}(X,\mu,(T_q)_{\mathrm{av}}^{j_{p,q}}\rho) < \frac{1}{p}\phi(j_{p,q}), \quad k = 1,\dots,p. \tag{2}$$

Докажем, что существует такая окрестность $U_{p,q}$ преобразования T_q, что для любого $T \in U_{p,q}$

$$\mathbb{H}_{\varepsilon_k}(X,\mu,T_{\mathrm{av}}^{j_{p,q}}\rho) < \frac{1}{p}\phi(j_{p,q}), \quad k = 1,\dots,p. \tag{3}$$

В силу леммы 3 для этого достаточно найти такую окрестность U, что $\|T_{\mathrm{av}}^{j_{p,q}}\rho - S_{\mathrm{av}}^{j_{p,q}}\rho\|_m < \varepsilon^2/32$ для любого $S \in U$. Пусть $\rho_N = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i}\rho_{\xi_i}$. При достаточно большом N полуметрика ρ_N отстоит в m-норме от полуметрики ρ менее чем на $\varepsilon^2/64$. Полуметрика ρ_N, в свою очередь, является конечной комбинацией разрезных полуметрик, соответствующих конечным разбиениям $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$. Пусть A – семейство всех элементов всех разбиений $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$. Так как A конечно и количество шагов $j_{p,q}$, по которым производится усреднение, фиксировано, достаточно требовать малость всех величин $\mu(T^{-i}a \triangle S^{-i}a)$ для всех $a \in A$, $i = 0,\dots,j_{p,q}-1$, что и определяет искомую окрестность U.

Пусть

$$W = \bigcap_p \bigcup_q U_{p,q}.$$

Ясно, что W является G_δ-множеством и содержит плотное семейство $\{T_q\}_q$. Пусть $T \in W$, а k – некоторое натуральное число. По построению для любого $T \in W$ и любого $p > k$ существует такое q_p, что

$$\mathbb{H}_{\varepsilon_k}(X,\mu,T_{\mathrm{av}}^{j_{p,q_p}}\rho) < \frac{1}{p}\phi(j_{p,q_p}). \tag{4}$$

Пусть $\Phi(n,\varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T_{\mathrm{av}}^n\rho)$. Полуметрика ρ является допустимой и порождающей в силу плотности семейства $\{\xi_i\}$, и, следовательно,

$\Phi \in \mathcal{H}(T)$. Неравенство (4) гарантирует, что существует такая подпоследовательность n_p, что при достаточно малом ε выполнено условие $\Phi(n_p, \varepsilon) \prec \phi(n_p)$. Тем самым для любого T из плотного G_δ-множества W выполнено условие $\mathcal{H}(T) \not\succsim \phi(n)$. $\square$

Благодарности

Автор благодарен А. М. Вершику за внимание к настоящей работе и своему научному руководителю П. Б. Затицкому за множество полезных советов и обсуждений. Автор благодарен В. В. Рыжикову за привлечение его внимания к результату о типичности бесконечной последовательностной энтропии.

Список литературы

1. T. Adams, *Genericity and rigidity for slow entropy transformations.* — New York J. Math. **27** (2021), 393–416.
2. А. М. Вершик, *Информация, энтропия, динамика.* В сб.: Математика XX века: взгляд из Петербурга, МЦНМО, 2010, сс. 47–76.
3. A. M. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants.* — Markov Process. Related Fields **16**, No. 1 (2010), 169–185.
4. А. М. Вершик, *Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром.* — Алгебра и анализ **23**, вып. 1 (2011), 111–135.
5. A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov, *Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces.* — Cent. Eur. J. Math. **11**, No. 3 (2013), 379–400.
6. Г. А. Вепрев, *Scaling entropy of unstable systems.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **498** (2020), 5–17.
7. П. Б. Затицкий, *Масштабирующая энтропийная последовательность: инвариантность и примеры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2015), 128–161.
8. П. Б. Затицкий, *О возможной скорости роста масштабирующей энтропийной последовательности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **436** (2015), 136–166.
9. П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *О субаддитивности масштабирующей энтропийной последовательности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **436** (2015), 167–173.
10. A. Katok, J.-P. Thouvenot, *Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **33** (1997), 323–338.
11. A. Kanigowski, A. Katok, D. Wei, *Survey on entropy-type invariants of subexponential growth in dynamical systems*, `arXiv:2004.04655`.
12. А. Г. Кушниренко, *О метрических инвариантах типа энтропии.* — Успехи мат. наук **22**, вып. 5 (1967), 57–65.
13. V. V. Ryzhikov, *Compact families and typical entropy invariants of measure-preserving actions*, `arXiv:2102.06187`.
14. S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems.* — Israel J. Math. **100** (1997), 187–207.

Veprev G. A. The scaling entropy of a generic action.

We prove that the scaling entropy of a generic action is asymptotically incomparable with a given increasing sublinear sequence.

С.-Петербургский международный
математический институт
имени Леонарда Эйлера,
14 линия ВО 29Б, 199178,
С.-Петербург, Россия
E-mail: egor.veprev@mail.ru

Поступило 25 октября 2021 г.