Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

А. А. Федотов, И. И. Лукашова

О САМОПОДОБНОМ ПОВЕДЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СУММ

§1. Введение

Для $\omega \in (0,1)$ и $\zeta \in \mathbb{C}_-$, мы исследуем поведение сумм вида

$$S_N(\omega,\zeta) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(1 + e^{-2\pi i(\omega n + \frac{\omega}{2} + \zeta)}\right) \tag{1}$$

при больших $N \in \mathbb{N}$. Это эквивалентно исследованию при больших $\operatorname{Re} z$ решений уравнения

$$\sigma_h(z+h) = (1 + e^{-iz})\,\sigma_h(z-h), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

с $h = \pi\omega$. Это и родственные ему уравнения возникают во многих задачах математической физики, например, теории дифракции и распространения волн [1, 2], в теории интегрируемых систем [3], в теории узлов, квантовой теории Тейхмюллера и комплексной теории Черна–Саймонса [4], теории квазипериодических операторов [5]. Мероморфные решения (2) имеют богатые сложные множества полюсов и нулей, расположенных на вещественной оси. Эти нули и полюса быстро накапливаются к бесконечности, и поведение решений при $\operatorname{Re} z \to \pm\infty$, оказывается сложным, сильно зависит от арифметических свойств ω, и, насколько мы знаем, очень мало изучено.

В этой статье почти для всех ω мы получаем асимптотику *логарифмической* суммы (1), используя перенормировочную формулу, подобную тем, которые возникают в теории экспоненциальных сумм Гаусса, см., например, [6]. Эта формула выражает $S_N(\omega,\zeta)$ через логарифмическую сумму с меньшим количеством слагаемых и новыми параметрами вместо ω и ζ.

Ключевые слова: тригонометрические произведения, тригонометрический аналог Г-функции Эйлера, асимптотики, типичное поведение.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 20-01-00451-а.

Логарифмические суммы, очевидно, связаны с произведениями вида

$$\Pi_N(\omega,\theta)=\prod_{n=0}^{N-1}\cos\pi(\omega n+\theta),\quad N\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Последние часто появляются в теории квазипериодических операторов, см., например, [7–9]. Для них получены тонкие оценки. Мы считаем, что наши асимптотические формулы будут важным дополнением к этим оценкам.

Напомним, что $\operatorname{Im}\zeta<0$. В (1) выбирана ветвь функции $\zeta\mapsto\ln\big(1+e^{-2\pi i\zeta}\big)$, аналитическая в $\mathbb{C}_-$ и стремящаяся к нулю при $\operatorname{Im}\zeta\to-\infty$.

Для почти всех $\omega\notin\mathbb{Q}$ мы описываем типичное асимптотическое поведение логарифмических сумм при $N\to\infty$. Чтобы сформулировать наши результаты, положим для $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\begin{gathered}\omega_{l+1}=\left\{\frac{1}{\omega_l}\right\},\quad \omega_0=\omega,\qquad N_{l+1}=[\omega_l N_l],\quad N_0=N,\\ \xi_l=\{\omega_l N_l\},\qquad \zeta_{l+1}=\left\{-\frac{\zeta_l^*}{\omega_l}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega_l}\right]\right\},\quad \zeta_0=\zeta,\end{gathered} \tag{4}$$

где $\cdot^*$ – комплексное сопряжение, $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ – целая и дробные части, и для $z\in\mathbb{C}$ $\{z\}=\{\operatorname{Re}z\}+i\operatorname{Im}z$.

Прокомментируем формулы (4). Напомним, что любое $\omega\notin(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ может быть представлено бесконечной цепной дробью [10], и

$$\omega=\frac{1}{a_1+\omega_1}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\omega_2}}=\cdots=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\dots}}} \tag{5}$$

где a_1, a_2 $\dots$ – натуральные числа, называемые *элементами цепной дроби*, изображающей ω. Для бесконечной цепной дроби в (5) используется обозначение $[0;a_1,a_2,\dots]$.

Для всех $l\geqslant 0$

$$\operatorname{Im}\zeta_l=\frac{\operatorname{Im}\zeta_0}{\omega_0\omega_1\dots\omega_{l-1}}. \tag{6}$$

Легко проверить, что (см. параграф 5)

$$\omega_0\omega_1\dots\omega_{L-1}<\frac{1}{2^{[L/2]}},\quad L\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что при $l \to \infty$ последовательность $\{\operatorname{Im}\zeta_l\}$ возрастает по крайней мере экспоненциально быстро.

Ясно, что $N_0 \geqslant N_1 \geqslant N_2 \ldots \geqslant 0$, и $N_l > N_{l+1}$ если $N_l > 0$. Для $N_0 = N > 0$ определим $L(N) \in \mathbb{N}$ так, чтобы $N_{L(N)-1} > 0$ и $N_{L(N)} = 0$. В параграфе 5 мы убедимся, что из (7) вытекает оценка

$$L(N) \leqslant 2\log_2(2N). \tag{8}$$

Мы покажем (см. теорему 4), что для иррациональных ω_0

$$S_N(\omega_0, \zeta_0) = \sum_{l=0}^{L(N)-1} \Big(\ln\sigma_{\pi\omega_l}\big(2\pi(\zeta_l+\xi_l)\big) - \ln\sigma_{\pi\omega_l}\big(2\pi(\zeta_l)\big)\Big)^{*l}, \tag{9}$$

где $\cdot^{*l}$ обозначает комплексное сопряжение, примененное l раз. Сравним суммы в правой и левой частях этой формулы. Грубо говоря, все слагаемые в сумме S_N имеют одинаковый порядок. С другой стороны, мы увидим (см. теорему 2), что $\ln\sigma_h(z)$ ведет себя как $\frac{1}{h}\, e^{\operatorname{Im} z}$ при $\operatorname{Im} z \to -\infty$. Напомним, что числа $-\operatorname{Im}\zeta_l$ экспоненциально быстро растут с ростом l. Поэтому, если среди ω_l нет подпоследовательности, стремящейся к нулю слишком быстро, слагаемые в правой части (9) убывают сверхэкспоненциально быстро при $l \to \infty$.

Эти рассуждения показывают, что поведение логарифмической суммы с большим количеством слагаемых определяется самыми малыми из чисел ω_l. Исследованию этого явления и посвящена наша основная теорема:

Theorem 1. *Пусть $Y > 0$ и $Y_l = \frac{Y}{\omega_0\omega_1\ldots\omega_{l-1}}$, $l \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\{c_l\}_{l=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$ и*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|c_l|} e^{-2\pi Y_l} < \infty. \tag{10}$$

Для почти каждого $\omega \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, имеется такое конечное множество $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$, что

$$\frac{1}{\omega_l} \cdot e^{-2\pi Y_l} \leqslant |c_l| \quad \text{если} \quad l \notin \mathcal{L}. \tag{11}$$

Если $N \in \mathbb{N}$ *и* $\operatorname{Im}\zeta < -Y$, *то*

$$S_N(\omega,\theta) = \sum_{l\in\mathcal{L},\ l<L(N)} \frac{1}{\omega_l} \int\limits_{\zeta_l}^{\zeta_l+\xi_l} \ln(1+e^{(-2\pi i\zeta)^{*l}})\,d\zeta + \delta, \tag{12}$$

$$\delta \leqslant C\left(\sum_{l\in\mathcal{L}} \omega_l e^{-2\pi Y_l} + \sum_{l\geqslant 0,\, l\notin\mathcal{L}} |c_l|\right), \tag{13}$$

где C *обозначает положительные постоянные, зависящие только от* Y.

Заметим, что первая и вторая суммы в (13) ограничены суммами сходящихся рядов $\sum\limits_{l\geqslant 1} \omega_l e^{-2\pi Y_l}$ и $\sum\limits_{l\geqslant 1} |c_l|$ соответственно.

Грубо говоря, теорема 1 утверждает, что поведение S_N как функции N в существенном определяется конечным числом малых членов последовательности $\{\omega_l\}$. Позже мы увидим, что старший член в (12) определяется асимптотикой σ_h при $h \to 0$. Эта асимптотика имеет квазиклассический характер, см. [11]. Таким образом, поведение S_N при больших N в существенном определяется квазиклассическими эффектами.

Теорема 1 касается случая, когда $\operatorname{Im}\zeta < 0$. Случай, когда $\operatorname{Im}\zeta > 0$ сводится к рассматриваемому. Для $\zeta \in \mathbb{R}$, поведение S_N во многом определяется и другими эффектами.

Заметим, что по мере роста N каждое из чисел ξ_l в (12) систематически пробегает интервал $(0,1)$, и последовательность последовательных значений логарифмической суммы является квазипериодической.

Опишем результаты компьютерных вычислений. В комплексной плоскости для каждого $N = 1, 2, 3\dots$, мы будем отмечать точку, изображающую $S_N(\omega,\zeta)$, и соединять точки, изображающие S_N и S_{N+1}, отрезком прямой. Полученную кривую будем называть *графиком* логарифмической суммы. Для $2\pi\zeta = -i/10$ и $\omega = [0; 3, 3, 1, 9, \dots]$ такой график показан на рис. 1. Этот симпатичный рисунок не слишком информативен. Поэтому мы растянем график логарифмической суммы вдоль вещественной оси, добавив к значениям $S_N(\omega,\zeta)$ числа $5N$. В итоге получится Рис. 2. На этом рисунке заметны три квазипериодических стуктуры с периодами приблизительно равными $3, 13$ и 130. Первая и вторая соответствует первому и второму элементам цепной

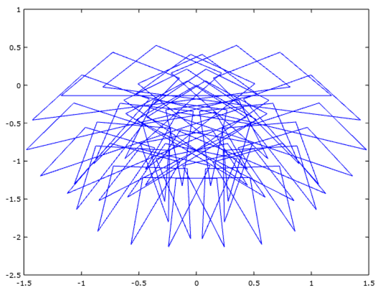

Рис. 1. График суммы $S_N(\omega, \zeta)$.

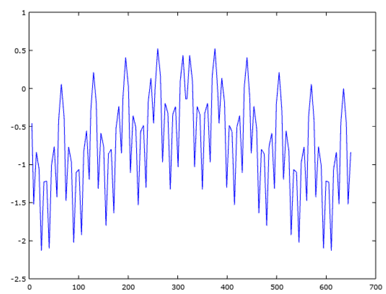

Рис. 2. График суммы $S_N(\omega, \zeta) + 5N$.

дроби, изображающей ω, а третья соответствует ее четвертому элементу, равному 9. Остальные элементы не вносят заметного вклада в приведенный график. Это хорошо согласуется с (12), так как $1/\omega_0 \approx 3$, $1/\omega_0\omega_1 \approx 13$, $1/\omega_0\omega_1\omega_2\omega_3 \approx 130$.

Легко видеть, что в случае, когда $\omega \in \mathbb{Q}$, логарифмическая сумма $S_N(\omega, \zeta)$ является суммой периодической и линейной функций. Их нетрудно описать напрямую. Используя нашу перенормировочную формулу, мы получаем нетривиальное представление для периодической функции.

Опишем структуру статьи. В следующем разделе мы кратко обсудим свойства специальной функции удовлетворяющий (2). В разделе 3 мы выведем перенормировочную формулу для логарифмических сумм. В в разделе 4 мы изучаем поведение логарифмических сумм

$S_N(\omega, \zeta)$ для больших N. Сначала рассматривается случай иррациональных ω и доказывается теорема 1. Затем, исследуется случай рациональных ω. Наконец, в разделе 5, мы проверим оценки (7) и (8).

§2. Специальная функция

Пусть $h \in (0, \pi)$. Здесь мы обсудим специальную функцию σ_h, являющуюся мероморфным решением уравнения (2), которое однозначно выделяется следующими свойствами. Оно аналитично и не имеет нулей в полосе $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \pi\}$, стремится к 1 при $\operatorname{Im} z \to -\infty$, и растет с минимальной возможной скоростью при $\operatorname{Im} z \to +\infty$.

Можно сказать, что функция σ_h является тригонометрическим аналогом Γ -функция Эйлера: она удовлетворяет однородному разностному уравнению первого порядка, единственным коэффициентом которого является тригонометрический полином первого порядка.

Имеется длинный список хорошо известных свойств σ_h, см., например, [1–5]. В частности, ее полюса и нули расположены в точках

$z = -\pi - h - 2\pi k - 2hl,\ k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $z = \pi + h + 2\pi k + 2hl,\ k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

соответственно. Поскольку все они находятся на вещественной оси, а их множество становиться все более и более плотным по мере того, как возрастает $|z|$, асимптотика σ_h при стремлении z к бесконечности вдоль линий, параллельных вещественной оси, очень сложна.

Функция σ_h удовлетворяет еще одному разностному уравнению:

$$\sigma_h(z + \pi) = (1 + e^{-\frac{i\pi}{h} z})\sigma_h(z - \pi). \tag{14}$$

Тот факт, что σ_h удовлетворяет еще одному разностному уравнению с $2h$ -периодическим коэффициентом не удивителен. Он следует из наблюдения, что обе функции $z \mapsto \sigma_h(z)$ и $z \mapsto \sigma_h(z + 2\pi)$ удовлетворяют уравнению (2), и что отношение двух решений (2) является $2h$-периодической функцией. Однако тот факт, что новое уравнение (14) подобно (2) очень необычен. Уравнение (14) играет важную роль в нашем анализе.

Нам потребуется и следующая теорема:

Theorem 2. *Фиксируем положительные X и Y. Существует такая постоянная $C > 0$, что при $|\operatorname{Re} z| < X$ и $\operatorname{Im} z < -Y$*

$$\sigma_h(z) = \exp\left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-i\infty}^{z} \ln(1 + e^{-iz})\, dz + \delta\right), \quad |\delta| \leqslant Che^{-|y|}, \tag{15}$$

где мы интегрируем вдоль кривой $z - i[0, +\infty)$.

Эта теорема является прямым следствием теоремы 4.1. из [11]. Сравните ее с предложением III.7 в [3]. При $h \to 0$ формула (15) описывает асимптотику σ_h. Отметим, что эта асимптотика имеет квазиклассический характер [11].

§3. Перенормировочная формула

3.1. Единичная перенормировка. В этом разделе мы опишем формулу, которая выражает заданную логарифмическую сумму в терминах логарифмической суммы с меньшим количеством слагаемых. Чтобы ее описать, мы должны определить несколько объектов.

Поскольку в $\mathbb{C}_-$ функция σ_h аналитична, не имеет нулей и стремится к 1 при $\operatorname{Im} z \to -\infty$ (локально равномерно по $\operatorname{Re} z$), то в $\mathbb{C}_-$ существует одна аналитическая ветвь функции $z \mapsto \ln \sigma_h(z)$, удовлетворяющая условию $\ln \sigma_h(z) \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to -\infty$ (локально равномерно по $\operatorname{Re} z$). Мы ее и используем всюду ниже.

Через $N_0 = N$, $\zeta_0 = \zeta$ и $\omega_0 = \omega$, определим N_1, ζ_1, ω_1 и ξ_0 формулами (4). Пусть $S_0(\omega, \zeta) = 0$ для всех ω и ζ. Справедливо следующее утверждение:

Theorem 3. *Для всех* $\zeta_0 \in \mathbb{C}_-$, $\omega_0 \in (0,1)$ *и натуральных* N_0

$$S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0) = (S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1))^* + \ln \sigma_{\pi\omega_0}\big(2\pi(\zeta_0 + \xi_0)\big) - \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi\zeta_0), \quad (16)$$

где $\cdot^*$ *обозначает комплексное сопряжение.*

Так как $\omega_0 \in (0,1)$ и $N_1 = [\omega_0 N_0]$, эта теорема выражает $S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0)$ через логарифмическую сумму с меньшим количеством слагаемых.

Доказательство. Из уравнения (2) следует, что

$$\begin{aligned} &\ln \sigma_{\pi\omega_0}\big(2\pi(\zeta_0 + \omega_0 N_0)\big) \\ &= \ln \sigma_{\pi\omega_0}\big(2\pi(\zeta_0 + \omega(N_0 - 1))\big) + \ln\big(1 + e^{-2\pi i\left(\omega_0(N_0-1) + \frac{\omega_0}{2} + \zeta_0\right)}\big) \\ &= \;\ldots\ldots\; = \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi\zeta_0) + S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Если $N_1 = [\omega_0 N_0] = 0$, то $\omega_0 N_0 = \xi_0$, $S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1) = 0$, и из (17) напрямую вытекает (16). В противном случае, используя (14) – второе разностное уравнение для σ_h, мы получим

$$\begin{aligned}&\ln \sigma_{\pi\omega_0}\bigl(2\pi(\zeta_0+\omega_0 N_0)\bigr)\\&=\ln \sigma_{\pi\omega_0}\bigl(2\pi(\zeta_0+\omega_0 N_0-1)\bigr)+\ln\Bigl(1+e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(\zeta_0+\omega_0N_0-1/2)}\Bigr)\\&=\ \dots\ \dots\ =\ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0+\omega_0N_0-N_1)+\widetilde{S}\end{aligned}$$

с

$$\begin{aligned}\widetilde{S}&=\sum_{n=0}^{N_1-1}\ln\Bigl(1+e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(\zeta_0+\omega_0N_0-1/2-n)}\Bigr)=\sum_{n=0}^{N_1-1}\ln\Bigl(1+e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(\zeta_0-1/2-n)}\Bigr)\\&=\left(\sum_{n=0}^{N_1-1}\ln\Bigl(1+e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(-\zeta_0^*+1/2+n)}\Bigr)\right)^*.\end{aligned}$$

Используя определения ω_1 и ζ_1, мы приходим к формуле

$$e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}\left(-\zeta_0^*+\frac12+m\right)}=e^{-2\pi i\left(-\frac{\zeta_0^*}{\omega_0}+\frac12\left[\frac{1}{\omega}{}_0\right]+\frac12\left\{\frac{1}{\omega}{}_0\right\}+m\left\{\frac{1}{\omega}{}_0\right\}\right)}=e^{-2\pi i\left(\zeta_1+\frac{\omega_1}{2}+m\omega_1\right)}.$$

В итоге, оказывается, что $\widetilde{S}=(S_{N_1}(\omega_1,\zeta_1))^*$, а поскольку $\omega_0N_0=N_1+\xi_0$, получаем окончательно

$$\ln \sigma_{\pi\omega_0}\bigl(2\pi(\zeta_0+\omega_0N_0)\bigr)=\ln \sigma_{\pi\omega_0}\bigl(2\pi(\zeta_0+\xi_0)\bigr)+\bigl(S_{N_1}(\omega_1,\zeta_1)\bigr)^*. \tag{18}$$

Сравнивая (17) с (18), приходим к (16). □

3.2. Последовательные перенормировки. Выразив сумму $S_{N_0}(\omega_0,\zeta_0)$ через логарифмическую сумму $S_{N_1}(\omega_1,\zeta_1)$, содержащую меньшее количество слагаемых, естественно попытаться применить теорему 3 к логарифмической сумме $S_{N_1}(\omega_1,\zeta_1)$ и так далее. Это ведет к следующим результатам.

Пусть сначала $\omega\notin\mathbb{Q}$. Тогда цепная дробь, изображающая ω бесконечна, и все ω_l с $l\in\mathbb{N}$ корректно определены и отличны от нуля. Поэтому можно определить бесконечные последовательности $\{\omega_l\}$, $\{N_l\}$, $\{\xi_l\}$ и $\{\zeta_l\}$ формулами (4). Справедливо следующее утверждение.

Theorem 4. *Для всех $\zeta_0\in\mathbb{C}_-$, $\omega_0\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ и $N=N_0\in\mathbb{N}$ справедлива формула* (9).

Доказательство. Пусть $L \in \mathbb{N}$. С помощью теоремы 3 получаем, что

$$\begin{aligned} S_{N_0}(\omega_0,\zeta_0) &= (S_{N_1}(\omega_1,\zeta_1))^* + \ln\sigma_{\pi\omega_0}\big(2\pi(\zeta_0+\xi_0)\big) - \ln\sigma_{\pi\omega_0}(2\pi\zeta_0) \\ &= S_{N_2}(\omega_2,\zeta_2) + \sum_{l=0}^{1}\Big(\ln\sigma_{\pi\omega_l}\big(2\pi(\zeta_l+\xi_l)\big) - \ln\sigma_{\pi\omega_l}(2\pi\zeta_l)\Big)^{*l} = \dots \\ &= (S_{N_L}(\omega_L,\zeta_L))^{*L} + \sum_{l=0}^{L-1}\Big(\ln\sigma_{\pi\omega_l}\big(2\pi(\zeta_l+\xi_l)\big) - \ln\sigma_{\pi\omega_l}\big(2\pi\zeta_l\big)\Big)^{*l}. \end{aligned} \tag{19}$$

Если $L = L(N_0)$, то $S_{N_L}(\omega_L,\zeta_L) = 0$, и мы приходим к (9). □

Наконец, обратимся к случаю, когда ω_0 рационально. Тогда цепная дробь, представляющая ω_0, конечна. Существует такое $M = M(\omega_0)$, что $\omega_M = 0$, а $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{M-1} \neq 0$.

Theorem 5. *Пусть* $\zeta_0 \in \mathbb{C}_-$, $\omega_0 \in (0,1)\cap\mathbb{Q}$, *и* $N_0 \in \mathbb{N}$. *Если* $L(N) \leqslant M = M(\omega)$, *то выполнено* (9). *В противном случае,*

$$S_{N_0}(\omega_0,\zeta_0) = N_M\ln(1+e^{-2\pi i\zeta_M}) + \sum_{l=0}^{M-1}\Big(\ln\big(\sigma_{\pi\omega_l}(\zeta_l+\xi_l)\big) - \ln\big(\sigma_{\pi\omega_l}(\zeta_l)\big)\Big)^{*l}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $M = M(\omega)$. Если $L(N_0) \leqslant M$, формула (9) следует из (19) с $L = L(N_0)$. Если $L(N_0) > M$, формула (20) следует из (19) с $L = M$ и равенства

$$S_{N_M}(\omega_M,\zeta_M) = S_{N_M}(0,\zeta_M) = N_M\ln(1+e^{-2\pi i\zeta_M})$$

которое вытекает из определений $M(\omega)$ и $S_N(\omega,\zeta)$. □

§4. Поведение $S(z,h,N)$ при больших N

4.1. Иррациональные ω**.** Здесь мы предполагаем, что $\omega \notin \mathbb{Q}$, и доказываем Теорему 1.

Фиксируем $Y > 0$ и предположим, что $\operatorname{Im}\zeta_0 = \operatorname{Im}\zeta \leqslant -Y$. Обратите внимание, что, согласно (6), для всех $l \geqslant 0$ выполнено неравенство $\operatorname{Im}\zeta_l < -Y$, и что $0 \leqslant \operatorname{Re}\zeta_l < 1$ и $0 \leqslant \xi_l < 1$. Следовательно, в силу теоремы 2 формулу (9) можно переписать в виде

$$S_N(\omega,\zeta) = \sum_{l=0}^{L(N)-1} t_l, \quad t_l = \frac{1}{2\pi\omega_l}\int\limits_{2\pi\zeta_l}^{2\pi(\zeta_l+\xi_l)} \ln\Big(1+e^{(-iz)^{*l}}\Big)\,dz + O\big(\omega_l e^{-2\pi i\zeta_l}\big), \tag{21}$$

где интегрируем по прямой, параллельной вещественной оси. Кроме того, в виду (6) и поскольку $0 < \omega_l < 1$ для всех $l \geqslant 0$

$$|t_l| \leqslant \frac{C}{\omega_l} e^{-\frac{2\pi|\operatorname{Im}\zeta_0|}{\omega_0\omega_1\cdots\omega_{l-1}}}$$

где C – положительная постоянная, зависящая только от Y.

Теперь нам потребуется теорема:

Theorem 6. *Пусть* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. *Если* $\sum\limits_{l=0}^{\infty} 1/\varphi(l) < \infty$, *то для почти всех* $\omega \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$ *неравенство* $a_l \geqslant \varphi(l)$ *выполнено только для конечного числа элементов цепной дроби* $[0; a_1, a_2, \dots]$, *изображающей* ω.

Эта теорема является одним из утверждений теоремы 30 из [10]. Теперь пусть $\{c_l\} \in l^1(\mathbb{N})$ - последовательность, удовлетворяющая (10). По теореме 6 для почти всех $\omega \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$, существует такое конечное множество $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$, что

$$a_{l+1} \leqslant \frac{c_l}{1+\frac{\omega_{l+1}}{a_{l+1}}} e^{\frac{2\pi|Y|}{\omega_0\omega_1\cdots\omega_{l-1}}} \quad l \notin \mathcal{L}, \tag{22}$$

где a_l – l-й элемент цепной дроби для ω. Ясно, что формула (22) эквивалентна (11). Мы можем записать (21) в виде (12) с δ, удовлетворяющим оценке

$$|\delta| \leqslant C\left(\sum_{\substack{l\in\mathcal{L},\\ l<L(N)}} \omega_l e^{-\frac{2\pi|Y|}{\omega_0\omega_1\cdots\omega_{l-1}}} + \sum_{\substack{l\notin\mathcal{L},\\ l<L(N)}} \frac{1}{\omega_l} e^{-\frac{2\pi|Y|}{\omega_0\omega_1\cdots\omega_{l-1}}}\right) \tag{23}$$

с константой, зависящей только от Y. Согласно (11) вторая сумма в правой части (23) ограничена $\|c\|_1$. Поэтому из оценки (23) следует (13). Доказательство теоремы 1 завершено.

4.2. Рациональные ω. Легко видеть, что в случае, когда $\omega \in \mathbb{Q}$, отображение $N \mapsto S_N(\omega,\zeta)$ представляет собой сумму периодической и линейной функций. Действительно, фиксируем ζ и ω так, чтобы $\omega = p/q$, где p и q - взаимно простые целые числа. Поскольку ω и ζ фиксированы, ниже мы не указываем зависимость от них.

Lemma 1. *Функция*

$$N \to P_N = S_N - \frac{N}{q} S_q. \tag{24}$$

является периодической с периодом q.

Доказательство. Поскольку функция $n \to \ln\left(1+e^{-2\pi i(\omega n+\frac{\omega}{2}+\zeta)}\right)$ является периодической с периодом q,

$$\sum_{n=m}^{m+q-1} \ln\left(1+e^{-2\pi i(\omega n+\frac{\omega}{2}+\zeta)}\right) = \sum_{n=m+1}^{m+q} \ln\left(1+e^{-2\pi i(\omega n+\frac{\omega}{2}+\zeta)}\right), \ \ \forall m \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{25}$$

Поэтому,

$$P_{N+q}-P_N = \sum_{n=N}^{N+q-1} \ln\left(1+e^{-2\pi i(\omega n+\frac{\omega}{2}+\zeta)}\right) - \sum_{n=0}^{q-1} \ln\left(1+e^{-2\pi i(\omega n+\frac{\omega}{2}+\zeta)}\right) = 0. \ \square$$

Из этой леммы вытекает представление

$$S_N = P_N + \frac{N}{q} S_q, \tag{26}$$

где первое слагаемое является q-периодическим по N, а второе – линейным. Из (20) вытекает следующая лемма.

Lemma 2. *Если $\zeta \in \mathbb{C}_-$, то*

$$\begin{aligned} P_N &= a\left(N_M - \frac{N}{q}\right) + \Delta_N, \\ \Delta_N &= \sum_{l=0}^{M-1} \Big(\ln \sigma_{\pi\omega_l}\big(2\pi(\zeta_l+\xi_l)\big) - \ln \sigma_{\pi\omega_l}\big(2\pi\zeta_l\big)\Big)^{*l}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$S_q = a, \qquad a = \ln(1+e^{-2\pi i \zeta_M}), \tag{28}$$

где $M = M(\omega)$, а ω_l, ζ_l, ξ_l и N_l определяются обычным образом через $\omega_0 = \omega$, $\zeta_0 = \zeta$ и $N_0 = N$.

Стоит отметить, что (28) можно получить напрямую, а (27) – нетривиальная формула: мы уже видели, что слагаемые суммы Δ_N могут быстро убывать с ростом l.

Доказательство. Достаточно проверить, что функции $N \mapsto N_M - N/q$ и $N \to \Delta_N$ являются q-периодическими. Действительно, сравнивая (20) с (26), мы получаем

$$N_M a + \Delta_N = P_N + \frac{N}{q} S_q. \tag{29}$$

Разделим эту формулу на N и устремим N к бесконечности. Если $N_M - N/q$ и Δ_N являются периодическими,

$$\frac{1}{q}\,S_q = \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta_N - P_N + N_M a}{N} = a \lim_{N\to\infty} \frac{N_M}{N}$$
$$= \frac{a}{q} \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{N_M - N/q}{N/q}\right) = \frac{a}{q},$$

и утверждение леммы получится из (29).

Проверим периодичность $N_M - N/q$ и Δ_N. Представим числа ω_l, с $l = 1, 2 \ldots M(\omega) - 1$, в виде $\omega_l = p_l/q_l$, где p_l и q_l – взаимно простые натуральные числа. Для $l = M(\omega)$ выбирем $p_l = 0$ и $q_l = 1$.

Lemma 3. *При замене N_0 на $N_0 + q_0$ для всех $l = 0, 1 \ldots M(\omega)$*

- *N_l заменится на $N_l + q_l$;*
- *ξ_l не изменится.*

Доказательство. Из формулы $\omega_{l+1} = \{1/\omega_l\}$ следует, что

$$q_l = p_{l-1}, \quad l = 1, \ldots M(\omega).$$

С помощью этих соотношений по индукции по $l = 0, 1, 2 \ldots M(\omega) - 1$, проверяется, что

$$[\omega_l(N_l + q_l)] = [\omega_l N_l + p_l] = N_{l+1} + q_{l+1}, \quad \{\omega_l(N_l + q_l)\} = \{\omega_l N_l + p_l\} = \xi_l.$$

Из этих формул следует утверждение леммы. □

Поскольку ζ_l не зависят от N_0, нужная нам периодичность вытекает из леммы 3. □

§5. Элементарные оценки

Здесь мы доказываем оценки (7) и (8). Предположим, что $\omega \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$. Тогда $\omega_0 = \omega = [0; a_1, a_2, a_3 \ldots]$, где все a_l – натуральные числа.

Выберем $l \in \mathbb{N}$ и докажем, что $\omega_{l-1}\omega_l < 1/2$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\omega_{l-1} > 1/2$. Тогда, поскольку $\omega_{l-1} = \frac{1}{a_l + \omega_l}$,

$$\omega_{l-1}\omega_l = 1 - a_l\omega_{l-1} < 1 - \omega_{l-1} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда вытекает (7).

Пусть $L = L(N)$. Тогда $[\omega_{L-2} \ldots [\omega_1[\omega_0 N] \ldots] \geqslant 1$, и $\omega_{L-2} \ldots \omega_1\omega_0 N \geqslant 1$.

Из последней оценки и (7) вытекает, что

$$\log_2 N \geqslant \log_2 \frac{1}{\omega_{L-2}\dots\omega_1\omega_0} > \frac{L-2}{2}.$$

Откуда и следует (8).

Благодарности

Авторы благодарны М. А. Лялинову за внимание к работе, прочтение статьи и полезные замечания.

Список литературы

1. G. D. Maliuzhinets, *Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances.* — Soviet Phys.: Doklady **3** (1958), 752–755.
2. V. Babich, M. Lyalinov, V. Grikurov, *Diffraction theory: the Sommerfeld–Malyuzhinets technique*, Alpha Science, Oxford 2008.
3. S. Ruijsenaars, *First order analytic difference equations and integrable quantum systems.* — J. Math. Phys. **38** (1997), 1069—1146.
4. S. Garoufalidis, R. Kashaev, *Resurgence of Faddeev's quantum dilogarithm*, arXiv:2008.12465.
5. V. Buslaev, A. Fedotov, *On the difference equations with periodic coefficients.* — Adv. Theor. Math. Phys. **5** (2001), 1105–1168.
6. A. Fedotov, F. Klopp, *An exact renormalization formula for Gaussian exponential sums and its applications.* — Amer. J. Math. **134**, No. 3 (2012), 711–748.
7. A. Avila, S. Jitomirskaya, *The ten Matriny problem.* — Ann. Math. **170** (2009), 303–342.
8. А. А. Федотов, *Матрица монодромии для уравнения почти-Матье с малой константой связи.* — Функц. анализ и его прил. **52**, No. 4 (2018), 89–93.
9. S. Jitomirskaya, F. Yang, *Pure point spectrum for the Maryland model: a constructive proof.* — Ergodic Theory Dynam. Systems, in press (2020).
10. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Физматлит, М., 1960.
11. А. А. Федотов, *Квазиклассические асимтотики функций Малюжинца.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **451** (2016), 178–187.

Fedotov A. A., Lukashova I. I. On a self-similar behavior of logarithmic sums.

The logarithmic sums $S_N(\omega,\zeta) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(1+e^{-2\pi i(\omega n+\frac{\omega}{2}+\zeta)}\right)$, where ω and ζ are parameters, are related to trigonometric products from the theory of quasiperiodic operators, as well as to a special function kindred to the Malyuzhinets function from the diffraction theory, hyperbolic Ruijsenaars G-function arising in connection with the theory integrable systems, and the Faddeev quantum dilogarithm, which plays an important role in the knot theory, Teichmüller quantum theory and complex Chern-Simons theory. Assuming that $\omega \in (0,1)$ and $\zeta \in \mathbb{C}_-$, and using renormalization formulas similar to the ones well known in the theory of the Gauss exponential sums, we describe the behavior of the logarithmic sums for large N.

С.-Петербургский государственный
университет, С.-Петербург, Россия
E-mail: a.fedotov@spbu.ru

Поступило 7 ноября 2021 г.

С.-Петербургский государственный
университет, С.-Петербург, Россия
E-mail: ilukashova072@gmail.com