Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

А. Б. Хасанов, Т. Г. Хасанов

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x, \tag{1}$$

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x),\, q_0(x+\pi) = q_0(x) \,\in C^4(R) \tag{2}$$

в классе бесконечнозонных π-периодических по x функций

$$q(x+\pi,t) = q(x,t) \in C_x^3(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t \geqslant 0). \tag{3}$$

Целью настоящей работы является разработка алгоритма построения решения $q(x,t),\ x \in R,\ t > 0$ задачи (1)-(3), в рамках метода обратной спектральной задачи для оператора Хилла:

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y,\ x \in R,\ t > 0. \tag{4}$$

Метод обратной задачи ведет свое начало с работы Гарднера, Грина, Крускала и Миура [1]. Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x),\ \ x \in R$$

сведением ее к обратной задаче рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad |q(x)|\,(1+|x|) \in L^1(R).$$

Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в работе Фаддеева [2], затем в работах Марченко [3], Левитана [4] и др. В статье [5] Лакс заметил универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) и обобщил уравнение КдФ, вводя понятие высшего уравнения КдФ.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза, формулы следов, обратная спектральная задача, оператор Хилла, система уравнений Дубровина.

Хорошо известно, что нахождение явной формулы, для решение уравнения КдФ в классе периодических функций существенно зависит от количества нетривиальных лакун в спектре оператора Хилла.

С помощью МОЗР для оператора Хилла, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах [6, 7] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Кроме того, для конечнозонных потенциалов (т.е. для решения уравнения КдФ) была выведена явная формула через тета-функций Римана. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3, 4] и [8, 9], а также в историческом очерке [10]. Отметим, что в случае

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad q(x,0) = 2a\cos 2x, \;\; a \neq 0$$

нам не удалось найти для решения $q(x,t)$ аналог формулы Итса–Матвеева [6].

Известно [11], что если $q(x) = 2a\cos 2x$, $a \neq 0$, то открыты все лакуны в спектре оператора Хилла $Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y$, $x \in R$, иначе говоря, $q(x)$ - бесконечнозонный π -периодический потенциал. В связи с этим мы изучаем задачу Коши (1)–(3) в классе периодических бесконечнозонных функций. Однако, к данной задаче можно применить метод статьи [12]. При этом решение задачи (1)–(3) получается в виде равномерно сходящегося функционального ряда. Следует отметить, что решения в классе периодических функций для нелинейных эволюционных уравнений изучались в работах [13–17] в различных постановках.

1. Предварительные сведения

В этом разделе для полноты изложения представлены некоторые из основных свойств оператора Хилла.

Рассмотрим в пространстве $L^2(R)$ оператор Хилла

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in R, \tag{5}$$

где $q(x) \in C^1(R)$ – действительная π-периодическая функция, $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр. Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (5), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = 0$ и $s(0,\lambda) = 0$, $s'(0,\lambda) = 1$. Функция $\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)$

называется функцией Ляпунова. Функции

$$\psi_{\pm} = c(x,\lambda) + \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)} \cdot s(x,\lambda)$$

называются решениями Флоке уравнения (5).

Спектр оператора L представляет собой следующее множество [18]:

$$\sigma(L) \equiv E = \{\lambda \in R : |\Delta(\lambda)| \leqslant 2\} = R \backslash \{(-\infty, \lambda_0) \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})\},$$

при этом интервалы $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \geqslant 1$ называется лакунами, где λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} – собственные значения периодической задачи $(y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi))$, а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} – собственные значения антипериодической задачи $(y(0) = -y(\pi),\ y'(0) = -y'(\pi))$ для уравнения (5).

Через ξ_n, $n \geqslant 1$, обозначим собственные значения задачи Дирихле $(y(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$ для уравнения (5), при этом имеют место включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}],\ n \geqslant 1$.

Определение 1. *Числа ξ_n, $n \geqslant 1$, вместе со знаками*

$$\sigma_n = \operatorname{sign}\{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\} = \pm 1, \quad n \geqslant 1$$

называются спектральными параметрами оператора L.

Определение 2. *Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \geqslant 1$ и границы $\lambda_n, n \geqslant 0$, спектра называются спектральными данными оператора L.*

Задача нахождения спектральных данных оператора L называется прямой спектральной задачей, а восстановление потенциала $q(x)$ по спектральным данным – обратной спектральной задачей для оператора L.

Потенциал $q(x)$ определяется единственным образом по спектральным данным $\{\lambda_{n-1}, \xi_n, \sigma_n, n \geqslant 1\}$ (см. [19]).

Если в уравнение (5) вместо $q(x)$ использовать $q(x+\tau)$, то границы $\lambda_n(\tau)$, $n \geqslant 0$ спектра получаемого оператора $L(\tau)y \equiv -y'' + q(x+\tau)y = \lambda y$, не будут зависеть от параметра τ: $\sigma(L(\tau)) = \sigma(L)$, $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \geqslant 0$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n = \xi_n(\tau), \sigma_n = \sigma_n(\tau), n \geqslant 1$, и являются периодическими функциями, т.е. $\xi_n(\tau+\pi) = \xi_n(\tau), \sigma_n(\tau+\pi) = \sigma_n(\tau), n \geqslant 1$, т.к. $q(x+\tau+\pi) = q(x+\tau)$. Эти спектральные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина

$$\dot{\xi}_n(\tau) = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot h_n(\xi), \tag{6}$$

и начальным условиям

$$\xi_n(\tau)|_{\tau=0} = \xi_n(0), \quad \sigma_n(\tau)|_{\tau=0} = \sigma_n(0), \;\; n \geqslant 1 \tag{7}$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \; n \geqslant 1. \tag{8}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Для дальнейшего исследования системы Дубровина сделаем замену переменных

$$\xi_n(\tau) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau), \quad n \geqslant 1. \tag{9}$$

Тогда она примет вид

$$\frac{dx_n(\tau)}{dt} = H_n(x_1(\tau), x_2(\tau), x_n(\tau), \dots), \quad n \geqslant 1 \tag{10}$$

$$x_n(0) = \arcsin\sqrt{\frac{\xi_n(0) - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, \quad n \geqslant 1 \tag{11}$$

где

$$H_n(x(\tau)) = \frac{1}{2}(-1)^n\sigma_n(0)h_n(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \dots), \quad n \geqslant 1.$$

Введем Банахово пространство:

$$K = \{x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) : \|x(\tau)\| = \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})\,|x_n(\tau)| < \infty\}.$$

Запишем систему (10), (11) в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = H(x(\tau)), \quad , x(\tau)|_{\tau=0} = x^0. \tag{12}$$

Можно доказать, что при всех $x(\tau), y(\tau) \in K$ имеет место неравенство (см. Замечание 2.)

$$\|H(x(\tau)) - H(y(\tau))\| \leqslant L\,\|x(\tau) - y(\tau)\|,$$

где

$$L = c\sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n, \quad \gamma_n = \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}. \tag{13}$$

Ряд (13) сходятся, если периодический потенциал удовлетворяет условию $q(x+\pi) = q(x) \in C^2(R)$. Поэтому бесконечная система дифференциальных уравнений Дубровина (6), (7) имеет единственное решение при любых начальных данных.

Следовательно, система дифференциальных уравнений Дубровина и формула первого следа

$$q(\tau) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau)) \tag{14}$$

дают решение обратной задачи.

Обратные задачи для конечнозонных потенциалов впервые были рассмотрены Н. И. Ахиезером [20]. В его работе решение обратной задачи было сведено к проблеме Якоби обращения абелевых интегралов. В статье [6] А. Р. Итс и В. Б. Матвеев нашли явную формулу для конечнозонных потенциалов. В случае конечнозонных потенциалов система дифференциальных уравнений (6) впервые была получена Дубровиным [12], в случае периодических потенциалов Трубовицом [21], а для почти периодических бесконечнозонных потенциалов – Левитаном [4].

Отметим, что впервые формула типа (14) была получена Хохштадтом [22] в случае, когда в спектре оператора L имеется конечное число лакун. Позже аналогичные формулы следов удалось получить Маккину и Мойербеке [23], Флашка [24], Левитану [4] и др.

В процессе изучения обратной спектральной задачи

для оператора L, в работах Хохштадта [25], Марченко [3], Левитана, Гусейнова [26], Трубовица [21] и др. найдена связь между гладкостью потенциала $q(x)$ и длиной лакун.

Теорема 1 (Марченко [3]). *Если $q(x) \in \tilde{W}_2^n[0,\pi]$ и $\mathrm{Im}\{q(x)\} = 0$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи для оператора L удовлетворяют равенствам*

$$\sqrt{\lambda_{2k-1}},\, \sqrt{\lambda_{2k}} = k + \sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2} \frac{a_{2j+1}}{(2k)^{2j+1}} \mp \frac{|l_n(2k)|}{(2k)^{n+1}} + \frac{\gamma_k^{\pm}}{k^{n+2}}, \tag{15}$$

где a_{2j+1}, b_{2j+1} *не зависят от* k, *и*

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)dt, \quad l_n(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q^{(n)}(x)e^{-ipx}dx, \sum_{k=0}^{\infty}\left|\gamma_k^{\pm}\right|^2 < \infty.$$

Здесь $\tilde{W}_2^n[0,\pi]$ *– подпространство пространства Соболева* $W_2^n[0,\pi]$, *состоящее из функций* $f(x) \in \tilde{W}_2^n[0,\pi]$, *удовлетворяющих периодическим краевым условиям* $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi)$, $k = 0,1,2,...,n-1$. *Заметим, что* $W_2^0[0,\pi] = \tilde{W}_2^0[0,\pi] = L_2[0,\pi]$.

Из асимптотических формул (15) вытекает следующая оценка для длин лакун:

$$\gamma_k = \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot k^{-n} \cdot |l_n(2k)| + \frac{\alpha_k}{k^{n+1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 < \infty. \tag{16}$$

Теорема 2. (Трубовиц [21])**.** *Для экспоненциального убывания длины лакун оператора* L *с* π*-периодическим действительным потенциалом* $q(x)$ *необходимо и достаточно аналитичность* $q(x)$.

Теорема 3. (Хохштадт [27])**.** *Для того чтобы число* $\frac{\pi}{n}$, $n \geqslant 2$ *было периодом потенциала* $q(x)$ *оператора* L, *необходимо и достаточно исчезновение всех лакун, номера которых не кратны* n.

Эта теорема была доказана Боргом [28] в 1946 году для $n = 2$.

2. Эволюция спектральных данных

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 4.. *Пусть* $q(x,t)$, $x \in R$, $t > 0$ *решение задачи* (1)-(3)*. Тогда границы спектра* $\lambda_n(t)$, $n \geqslant 0$ *оператора* $L(t)$, *не зависят от параметра* t, *т.е.* $\lambda_n(t) = \lambda_n$, $n \geqslant 0$, *а спектральные параметры* $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n \geqslant 1$ *удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\{2q(0,t) + 4\xi_n(t)\}, \;\; n \geqslant 1, \tag{17}$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \bar{h}_n(\xi),$$

$$\bar{h}_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}. \tag{18}$$

Здесь знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \ n \geqslant 1, \tag{19}$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geqslant 1$ – спектральные параметры оператора $L(0)$.

Доказательство. Пусть $q(x,t)$ π-периодическая по x функция удовлетворяющая уравнение (1). Обозначим через $y_n = y_n(x,t)$, $n \geqslant 1$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0,t) = 0$, $y(\pi,t) = 0$) для уравнения (4), соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \geqslant 1$. Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n(t)$, $n \geqslant 1$ и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi q_t(x,t) y_n^2(x,t) dx. \tag{20}$$

Используя уравнение (1), из равенства (20) получаем, что

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi \{q_{xxx} - 6qq_x\} y_n^2 dx = I_1. \tag{21}$$

Ищем первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y_n', т.е. пусть

$$(ay_n^2 + by_n{y'}_n + c{y'}_n^2)' = \{q_{xxx} - 6qq_x\} y_n^2, \tag{22}$$

где функции $a = a(x,t,\xi_n)$, $b = b(x,t,\xi_n)$, $c = c(x,t,\xi_n)$ не зависят от y_n и y_n'. Используя равенство $y_n'' = (q(x,t) - \xi_n(t))y_n$ и приравнивая коэффициенты, из (22) получим

$$b = -c', \ a = \frac{1}{2}c'' - c(q - \xi_n),$$

$$\frac{1}{2}c''' - 2c'(q - \xi_n) - cq_x = q_{xxx} - 6qq_x. \tag{23}$$

Нетрудно заметить, что

$$c(x,t,\xi_n) = 2q(x,t) + \alpha(t),$$

где

$$\alpha(t) = 4\xi_n(t),$$

удовлетворяет равенству (23). Таким образом, при

$$a(x,t,\xi_n) = q_{xx} - [2q + 4\xi_n](q - \xi_n),$$

$$b(x,t,\xi_n) = -2q_x,$$
$$c(x,t,\xi_n) = q(x,t) + 4\xi_n$$

выполняется равенство (22). Значит,

$$I_1 = \left(ay_n^2 + by_n y'_n + cy'^2_n\right)\Big|_0^\pi$$
$$= c(x,t,\xi_n)\, y'^2_n(x,t)\Big|_0^\pi = [2q(0,t) + 4\xi_n(t)]\cdot[y'^2_n(\pi,t) - y'^2_n(0,t)]. \qquad (24)$$

Подставляя формулы (24) в (21), получим

$$\dot{\xi}_n(t) = [y'^2_n(\pi,t) - y'^2_n(0,t)]\cdot\{2q(0,t) + 4\xi_n(t)\}. \qquad (25)$$

Так как собственные значения $\xi_n(t)$ задачи Дирихле для уравнения (4) простые, поэтому

$$y_n(x,t) = \frac{1}{\alpha_n(t)} s(x,\xi_n(t),t),$$

где

$$\alpha_n^2(t) = \int_0^\pi s^2(x,\xi_n(t),t)dx = s'(\pi,\xi_n(t),t)\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}.$$

Используя эти равенства, имеем

$$y'^2_n(\pi,t) - y'^2_n(0,t) = \frac{1}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}\left(s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}\right).$$

Подставляя в последнее равенство выражение

$$s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)} = \sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}$$

получим

$$y'^2_n(\pi,t) - y'^2_n(0,t) = \frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}.$$

Здесь

$$\sigma_n(t) = \operatorname{sign}\left\{s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}\right\}.$$

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda)\prod_{k=1}^\infty \frac{(\lambda_{2k-1}-\lambda)(\lambda_{2k}-\lambda)}{k^4},$$

$$s(\pi,\lambda,t) = \pi\prod_{k=1}^\infty \frac{\xi_k(t)-\lambda}{k^2}.$$

Следует, что

$$y'^2_n(\pi,t) - y'^2_n(0,t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(t).$$

Подставляя это равенство в (25) получим (17).

Теперь, докажем независимость от t собственных значений $\lambda_n(t)$, $n \geqslant 0$ периодической и антипериодической задачи для уравнения (4). Обозначим через $\nu_n(x,t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t)$, $n \geqslant 0$, периодической и антипериодической задачи для уравнения (4). Действуя вышеприведенным образом, получим равенство

$$\dot{\lambda}_n(t) = \{2q(0,t) + 4\lambda_n(t)\}[v'^2_n(\pi,t) - v'^2_n(0,t)]\cdot$$

Отсюда следует, что $\dot{\lambda}_n(t) = 0$, $n \geqslant 0$, т.к. $\nu_n(0,t) = \pm\nu_n(\pi,t)$, $\nu'_n(0,t) = \pm\nu'_n(\pi,t)$. Это и означает независимость границы спектра оператора $L(t)$, от параметра t. $\square$

Следствие 1. *Обозначим через λ_n, $n \geqslant 0$, $\xi^0_n(\tau)$, $\sigma^0_n(\tau)$, $n \geqslant 1$ спектральные данные оператора*

$$L(\tau)y \equiv -y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y, \quad x \in R.$$

Пусть $q(x,t)$, $x \in R$, $t > 0$ решение задачи (1)–(3). Тогда спектральные данные $\lambda_n(\tau,t)$, $n \geqslant 0$,$\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$ оператора

$$L(\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in R \tag{26}$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n,$$

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))\{2q(\tau,t) + 4\xi_n(\tau,t)\}. \tag{27}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi^0_n(\tau), \ \ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma^0_n(\tau), \ \ n \geqslant 1. \tag{28}$$

Замечание 1. Используя формулу первого следа

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t)) \tag{29}$$

систему дифференциальных уравнений (27) можем переписать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi)$$

$$\times\Big\{2\lambda_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)) + 4\xi_n(\tau,t)\Big\}, \quad n \geqslant 1. \tag{30}$$

Замечание 2. Бесконечная система уравнений Дубровина (30), (28) имеет единственное решение при любых начальных данных.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau,t))}$$

$$\times f_n(\xi(\tau,t)) g_n(\xi(\tau,t)), \quad n \geqslant 1 \tag{31}$$

с начальными условиями

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \ \ n \geqslant 1 \tag{32}$$

где $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau)\}$ – спектральные данные оператора Хилла $L(\tau,0)$ с коэффициентами $q_0(x+\tau)$, $x,\tau \in R$.

Здесь

$$f_n(\xi(\tau,t)) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_0)\prod_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_n(\tau,t)-\xi_k(\tau,t))^2}}, \tag{33}$$

$$g_n(\xi(\tau,t)) = 2\lambda_0 + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)) + 4\xi_n(\tau,t). \tag{34}$$

В результате замена переменных

$$\xi_n(\tau,t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t), \ \ n \geqslant 1$$

систему дифференциальных уравнений (31), (32) можно переписать в виде

$$\frac{dx_n(\tau,t)}{dt} = H_n(x_1(\tau,t), x_2(\tau,t), \dots), \ \ n \in N \tag{35}$$

$$x_n(\tau,t)\big|_{t=0} = x_n^0(\tau) = \arcsin\sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau)-\lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}}, \ \ n \geqslant 1 \tag{36}$$

где

$$H_n(x(\tau,t)) = (-1)^n \sigma_n(0) g_n$$

$$\times(\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t),\lambda_3+(\lambda_4-\lambda_3)\sin^2 x_2(\tau,t),\dots)$$
$$\times f_n(\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t),\lambda_3+(\lambda_4-\lambda_3)\sin^2 x_2(\tau,t),\dots),$$
$$\sigma_n(\tau,t)\,\mathrm{sign}\{\sin x_n(\tau,t)\cos x_n(\tau,t)\}=\sigma_n^0(\tau).$$

Для изучения задачи Коши (35), (36) введем банахово пространство:

$$K=\{x(\tau,t)=(x_1(\tau,t),x_2(\tau,t),\dots):\|x(\tau,t)\|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\,|x_n(\tau,t)|<\infty\}.$$

Напишем систему (35), (36) в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\quad x(\tau,t)|_{t=0}=x^0(\tau),\ x^0(\tau)\in K. \tag{37}$$

Из условии $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^4(R)$ и асимптотика собственных значений (15) при $n=4$, а также учитывая $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ получим, что $\inf\limits_{k\neq n}|\xi_n(\tau,t)-\xi_k(\tau,t)|\geqslant a>0$. Теперь, пользуясь этим неравенством и (15) при $n=4$, оценим функции $|f_n(\xi(\tau,t))|$, $\left|\frac{\partial f_n(\xi(\tau,t))}{\partial\xi_m}\right|$ и $|g_n(\xi(\tau,t))|$, $\left|\frac{\partial g_n(\xi(\tau,t))}{\partial\xi_m}\right|$.

Лемма 1. *Справедливы следующие оценки*

$$1.\quad C_1n\leqslant|f_n(\xi(\tau,t))|\leqslant C_2n,\left|\frac{\partial f_n(\xi(\tau,t))}{\partial\xi_m}\right|\leqslant C_3n,\ \ n\geqslant1, \tag{38}$$

$$2.\quad |g_n(\xi(\tau,t))|\leqslant C_4n^2,\left|\frac{\partial g_n(\xi(\tau,t))}{\partial\xi_m}\right|=2,\ \ n\geqslant1 \tag{39}$$

Доказательство. Имеет место следующие неравенство

$$C_1'n^2<|\xi_n(\tau,t)-\lambda_0|<C_2''\,n^2 \tag{40}$$

где $C_1'>0$, $C_2''>0$ и не зависят от n. Рассмотрим следующую последовательность

$$P_n=\prod_{k=1,\ k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}$$
$$=\prod_{k=1,\ k\neq n}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right)\left(1+\frac{\lambda_{2k}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right)$$

и оценим её сверху:

$$|P_n| = \prod_{k=1,\ k\neq n}^{\infty} \left|1+\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \left|1+\frac{\lambda_{2k}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|$$
$$\leqslant \prod_{k=1,\ k\neq n}^{\infty} \left(1+\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|\right)\left(1+\left|\frac{\lambda_{2k}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|\right)$$
$$\leqslant \prod_{k=1,\ k\neq n}^{\infty} \left(1+\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right)^2 \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right)^2 = C_2'',$$

где константа $C_2'' > 0$ не зависит от n. Учитывая (33) и (40), находим

$$|f_n(\xi)|^2 = |\xi_n-\lambda_0|\,|P_n| \leqslant C_1' C_2''\, n^2.$$

Отсюда получим, что

$$|f_n(\xi)| \leqslant C_2 n, \quad n\geqslant 1, \quad C_2=\sqrt{C_1'C_2''}.$$

Теперь оценим $|f_n(\xi)|$ снизу. Для этого введём множество индексов

$$M=\left\{k\in N:\ \frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\geqslant 1\right\}.$$

Это множество имеет конечное число элементов. Рассмотрим бесконечные произведение

$$A_n=\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}, \quad B_n=\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{\lambda_{2k}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}.$$

Ясно, что $P_n^2 = A_n\cdot B_n$. Перепишем A_n в следующем виде $A_n = A_{n,1}\cdot A_{n,2}\cdot A_{n,3}$. Здесь

$$A_{n,1}=\prod_{\substack{k=1,k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}, \quad A_{n,2}=\prod_{\substack{k=1,\\ k\in M}}^{n-1}\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n},$$

$$A_{n,3}=\prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M}}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}.$$

Если $k\neq n$ и $k\notin M$, то имеем

$$\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \leqslant \frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a} < 1,$$

$$-\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \geqslant -\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a} > -1,$$

$$1-\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right| \geqslant 1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a} > 0.$$

Отсюда, получим

$$|A_{n,1}| = \prod_{\substack{k=1, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty}\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| = \prod_{\substack{k=1, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty}\left|1+\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|$$

$$\geqslant \prod_{\substack{k=1, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_k}{\xi_k-\xi_n}\right|\right)$$

$$\geqslant \prod_{\substack{k=1, k\neq n\\ k\notin M}}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right) > \prod_{\substack{k=1,\\ k\notin M}}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}}{a}\right) = C_1''.$$

Если $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и $k \in M$, то

$$|A_{n,2}| = \prod_{\substack{k=1,\\ k\in M}}^{n-1}\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| = \prod_{\substack{k=1,\\ k\in M}}^{n-1}\frac{\xi_n-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k}$$

$$= \prod_{\substack{k=1,\\ k\in M}}^{n-1}\left(1+\frac{\xi_k-\lambda_{2k-1}}{\xi_n-\xi_k}\right) > 1.$$

Теперь рассмотрим случай $k \geqslant n+1$ и $k \in M$. Введём обозначение $\Delta = \max\limits_{k\geqslant 1}(\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1})$, и рассмотрим два случая.

1-случай. Пусть $k \geqslant n+1$, $k \in M$, $|\xi_k - \xi_n| \leqslant 2\Delta$. Тогда

$$\prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M*}}^{\infty}\left|\frac{\lambda_{2k-1}-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\right| > \prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M*}}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\lambda'_{2k-1}}{2\Delta}$$

$$\geqslant \prod_{\substack{k=1,\\ k\in M}}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\lambda'_{2k-1}}{2\Delta}.$$

Здесь $M^* = \{k \in M : |\xi_k - \xi_n| \leqslant 2\Delta\}$, число λ'_{2k-1} выбирается из условий

$$\max\{\lambda_{2k-2},\ \lambda_{2k-1}-2\Delta\} < \lambda'_{2k-1} < \lambda_{2k-1}.$$

2-случай. Пусть $k \geqslant n+1$, $k \in M$, $|\xi_k - \xi_n| > 2\Delta$. Тогда из того, что

$$\frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} < \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{2\Delta} < \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{2\Delta} < \frac{1}{2},$$

$$-\frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} > -\frac{1}{2}, 1 - \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_k - \xi_n} > \frac{1}{2}, \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} > \frac{1}{2},$$

получим оценку

$$\prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M**}}^{\infty} \left|\frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}\right| > \prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M**}}^{\infty} \frac{1}{2} > \prod_{\substack{k=1,\\ k\in M}}^{\infty} \frac{1}{2},$$

где $M^{**} = \{k \in M : |\xi_k - \xi_n| > 2\Delta\}$. Значит,

$$|A_{n,3}| = \prod_{\substack{k=n+1,\\ k\in M}}^{\infty} \left|\frac{\lambda_{2k-1} - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}\right| > \prod_{\substack{k=1,\\ k\in M}}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \lambda'_{2k-1}}{4\Delta} = C_1'''.$$

Используя полученные неравенства, выводим оценку

$$|A_n| = |A_{n,1}| \cdot |A_{n,2}| \cdot |A_{n,3}| > C_1' C_1''' = C_{1,1}. \tag{41}$$

Аналогичным образом, выводится следующая оценка:

$$|B_n| > C_{1,2}. \tag{42}$$

Умножая эти оценки (40), (41), (42) и извлекая квадратичный корень, получим неравенство $C_1 n \leqslant |f_n(\xi)|$. Здесь $C_1 = \sqrt{C'_{1,1} \cdot C_{1,11} \cdot C_{1,2}} > 0$.

Теперь докажем второе неравенство из (38).

Если $m \neq n$, то

$$f_n^2 = \prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2},$$

$$2f_n \frac{\partial f_n}{\partial \xi_m} = \frac{\partial f_m^2}{\partial \xi_m} = -2(\xi_n - \lambda_0)\frac{(\lambda_{2m-1} - \xi_n)(\lambda_{2m} - \xi_n)}{(\xi_m - \xi_n)^3}$$
$$\times \prod_{\substack{k=1\\ k\neq n,m}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2} = \frac{2f_n^2}{\xi_n - \xi_m},$$

т.е.

$$\frac{\partial f_n}{\partial \xi_m} = \frac{f_n}{\xi_n - \xi_m}.$$

Отсюда, в случае $m \neq n$ получим оценку:

$$\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| = \frac{|f_n(\xi)|}{|\xi_n - \xi_m|} \leqslant \frac{C_2 n}{a}.$$

Теперь оценим функцию $\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right|$. Для этого используем равенство $f_n^2 = (\xi_n - \lambda_0)P_n$. Отсюда, получим

$$2f_n \cdot \frac{\partial f_n}{\partial \xi_n} = \frac{\partial f_n^2}{\partial \xi_n} = P_n + (\xi_n - \lambda_0) \cdot \frac{\partial P_n}{\partial \xi_n} \tag{43}$$

Дифференцируя тождество

$$\ln A_n = \ln \prod_{k=1,\ k\neq n}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k}\right) = \sum_{k=1,\ k\neq n}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_{2k-1}}{\xi_n - \xi_k}\right),$$

получим равенство

$$\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n} = A_n \cdot \sum_{k=1, k\neq n}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1} - \xi_k}{(\xi_n - \lambda_{2k-1})(\xi_n - \xi_k)}.$$

Из этого равенства, учитывая неравенство $|A_n| \leqslant \tilde{C}$, выводим оценку:

$$\left|\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n}\right| \leqslant |A_n| \cdot \sum_{k=1,\ k\neq n}^{\infty} \frac{|\lambda_{2k-1} - \xi_k|}{|\xi_n - \lambda_{2k-1}| \cdot |\xi_n - \xi_k|}$$

$$\leqslant \tilde{C} \cdot \sum_{k=1, k\neq n}^{\infty} \frac{\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}}{a^2} \leqslant \tilde{C}_1.$$

Аналогичным образом, используя неравенство $|B_n| \leqslant \tilde{C}$, получим

$$\left|\frac{\partial B_n}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \tilde{C}_1.$$

Из полученных неравенств следует оценка

$$\left|\frac{\partial P_n}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \left|\frac{\partial A_n}{\partial \xi_n}\right| |B_n| + \left|\frac{\partial B_n}{\partial \xi_n}\right| |A_n| \leqslant \tilde{C}_2.$$

Отсюда и из (42) получим

$$|f_n(\xi)| \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \tilde{C}_4 n^2.$$

Используя оценку $C_1 n \leqslant |f_n(\xi)|$, выводим неравенства

$$C_1 n \cdot \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leqslant |f_n(\xi)| \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \tilde{C}_4 n^2,$$

т.е.

$$\left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_n}\right| \leqslant \tilde{C}_5 n.$$

□

Лемма 2. *Если* $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^4(R)$, *то вектор-функция* $H(x(\tau, t))$ *удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве* K, *т.е. существует константа* $L = \mathrm{const} > 0$, *такая, что для произвольных элементов* $x(\tau, t), y(\tau, t) \in K$ *выполняется следующее неравенство*

$$\|H(x(\tau, t)) - H(y(\tau, t))\| \leqslant L \|x(\tau, t) - y(\tau, t)\|.$$

Доказательство. Сперва оценим производную функции

$$F_n(\xi) = g_n(\xi) f_n(\xi):$$

$$\left|\frac{\partial F_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \leqslant \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \cdot |g_n(\xi)| + \left|\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \cdot |f_n(\xi)|$$
$$\leqslant C_3 n C_4 n^2 + 2C_2 n = n^3 C_3 C_4 + 2C_2 n \leqslant \bar{C} n^3.$$

Используя выражение $H_n(x(\tau, t)) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) F_n(\xi(\tau, t))$, получим равенство

$$|H_n(x(\tau, t)) - H_n(y(\tau, t))| = |F_n(\xi(\tau, t)) - F_n(\eta(\tau, t))|.$$

Теперь применим теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t) = F_n(\xi + t(\eta - \xi))$ на отрезке $t \in [0, 1]$. Тогда получим равенство $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$, т.е.

$$F_n(\xi) - F_n(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial \xi_m} \cdot (\xi_m - \eta_m),$$

где $\theta = \xi + t^*(\eta - \xi)$. Отсюда следует, что

$$|H_n(x(\tau, t)) - H_n(y(\tau, t))| = |F_n(\xi(\tau, t)) - F_n(\eta(\tau, t))|$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial \xi_m}\right| \cdot |\xi_m(\tau, t) - \eta_m(\tau, t)|$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C} n^3 (\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}) \left|\sin^2 x_m(\tau, t) - \sin^2 y_m(\tau, t)\right|$$

$$\leqslant \bar{C}n^3 \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}) \left| x_m(\tau,t) - y_m(\tau,t) \right| = \bar{C}n^3 \| x(\tau,t) - y(\tau,t) \|.$$

Здесь

$$\xi_m(\tau,t) = \lambda_{2m-1} + (\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}) \sin^2 x_m(\tau,t),$$
$$\eta_m(\tau,t) = \lambda_{2m-1} + (\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}) \sin^2 y_m(\tau,t).$$

Теперь оценим норму $\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\|$:

$$\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\| = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}) \left| H_k(x) - H_k(y) \right|$$
$$\leqslant \bar{C} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \gamma_k \left| x(\tau,t) - y(\tau,t) \right| = L \left\| x(\tau,t) - y(\tau,t) \right\|,$$

где

$$L = \bar{C} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \gamma_k \tag{44}$$

т.е. условие Липщица выполняется. Поэтому, решение задачи Коши (30), (28), для всех $t > 0$ и $\tau \in R$ существует и единственно. □

Следствие 2. *Эта теорема дает метод решения задачи* (1)-(3). *Обозначим через* λ_n, $n \geqslant 0$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$, *спектральные данные оператора* $L(\tau,t)$. *Сначала найдём спектральные данные* $\lambda_n, n \geqslant 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geqslant 1$ *для оператора* $L(\tau)$. *После этого, решая задачу Коши* (30), (28) *при произвольном значении* τ, *находим* $\xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$. *Из формулы следов* (29), *получим* $q(\tau,t)$.

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (1)-(3) имеет решение. От этого предположения не трудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $q(\tau,t)$ действительно удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 3. Покажем, что функция $q(\tau,t)$, построенная с помощью решение систему уравнений Дубровина (30) и формулы следов (29) действительно удовлетворяет уравнению (1). Для этого используем систему первого уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi), \quad n \geqslant 1, \tag{45}$$

и вторую формулу следов

$$q^2(\tau,t)-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)=\lambda_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k^2(\tau,t)). \qquad (46)$$

Из систем Дубровина (27) и (45), имеем

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=\{2q(\tau,t)+4\xi_n(\tau,t)\}\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial\tau}. \qquad (47)$$

Дифференцируя формулы первого следа (29) по t и учитывая (47), находим

$$q_t=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial t}=4q(\tau,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}+8\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau} \qquad (48)$$

Далее дифференцируя по τ формулы следов (29) и (46), получим

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=-q_\tau,\quad 4\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=\frac{1}{2}q_{\tau\tau\tau}-2qq_\tau.$$

Используя эти равенства из (48) выводим

$$q_t=q_{\tau\tau\tau}-6qq_\tau.$$

Замечание 4. Равномерная сходимость рядов (29), (44) и (46), а также (48) следует из (16), при $n=4$ и оценки

$$c_1n\leqslant\left|\bar{h}_n(\xi)\right|\leqslant c_2n,\quad n\geqslant1,$$

где $c_1>0$ и $c_2>0$ не зависят от n.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 5. *Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^4(R)$, то существует единственное решение $q(x,t)$ задачи* (1)–(3)*, которое определяется суммой ряда* (29) *и принадлежит классу $C_x^3(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t\geqslant0)$.*

Следствие 3 (см.[21], стр. 333)**.** *Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной π-периодической аналитической функцией, то решение $q(x,t)$ задачи* (1)–(3) *тоже является действительной аналитической функцией по x.*

Это утверждение следует из теоремы Трубовица. Так как длины лакун, соответствующие потенциалу $q_0(x)$, убывают экспоненциально, а потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, то $q(x,t)$ является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 4. *Если число $\frac{\pi}{n}$ является периодом начальной функции $q_0(x)$, то лакуны, номера которых не делятся на n, исчезают. Потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, значит, по теореме Хохштадта, число $\frac{\pi}{n}$ является периодом и для функции $q(x,t)$ по переменной x. Здесь $n \geqslant 2$ – натуральное число, а лакуна $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ имеет номер k.*

Список литературы

1. C. Gardner, I. Green, M. Kruskal, R. Miura, *A method for solving the Korteveg-de Vries equation.* — Phys. Rev. Lett., **19**, 1095–1098 (1967).
2. Л. Д. Фаддеев, *Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера.* — Тр. МИ АН СССР, **73**, 314–336 (1964).
3. В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Киев, "Наукова думка", 1977.
4. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля.* М., Наука, 1984.
5. P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.* — Comm. Pure and Appl. Math., **21**, 467–490 (1968).
6. А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза.* — ТМФ, **23**, No. 1, 51–68 (1975).
7. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза.* — ЖЭТФ,**67**, No. 12, 2131–2143 (1974).
8. Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко, *Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты.* Киев, "Наукова думка", 1987.
9. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М., Наука, 1980.
10. V. B. Matveev, *30 years of finite-gap integration theory.* Phil.Trans. R., Soc. A **366**, 837–875 (2008).
11. E. L. Ince, *Ordinary differential equations.* New York, Dover. 1956.
12. Б. А. Дубровин, *Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.* — Функц. анализ и его прил., **9**, вып. 3, 41–51 (1975).
13. P. G. Grinevich, I. A. Taimanov, *Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type.* Geometry, Topology and Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. **2** (224), eds.V. M. Buchstaber, I.M.
14. А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, *Об уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.* — ТМФ, **164**, No. 2, 214–221 (2010).
15. А. О. Смирнов, *Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза.* — Матем. сб., **185**, No. 8, 103–114 (1994).

16. P. Lax, *Almost periodic solutions of the KdF equation.* — SCAM Revue, **18**, No. 3, 351–575 (1976).
17. А. В. Домрин, *Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений.* — Изв. РАН. Сер. матем., **74**, No. 3, 23–44 (2010).
18. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* Т. I–II, М., ИЛ, 1961.
19. И. В. Станкевич, *Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла.* — ДАН СССР, **192**, No. 1, 34–37 (1970).
20. Н. И. Ахиезер, *Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов.* — ДАН СССР, **141**, No. 2, 262–266 (1961).
21. E. Trubowtz, *The inverse problem for periodic potentials.* — Comm. Pure. Appl. Math., **30**, 321–337. (1977).
22. H. Hochstadt, *On the determination of Hill's equation from its spectrum.* — Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, 353–362 (1965).
23. H. P. Mckean, P. Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation.* — Invent. Math., **30**, No. 3, 217–274 (1975).
24. H. Flachka, *On the inverse problem for Hill's operator.* Arch. Rational Mech. Anal., **59**, No. 4, 293–309 (1975).
25. H. Hochstadt, *Estimates on the stability interval's for the Hill's equation.* — Proc. AMS, **14**, 930–932 (1963).
26. Б. М. Левитан, Г. Ш. Гусейнов, *Вычисление главного члена асимптотики длины лакуны периодической задачи Штурма–Лиувилля.* — Сердика Българско математическо списание, **3**, 273–280 (1977).
27. H. Hochstadt, *A Generalization of Borg's inverse theorem for Hill's equations.* — J. Math. Anal. and Appl., **102**, 599–605 (1984).
28. G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgable.* Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwete Acta Math.-Berlin, 78, 1–96 (1946).

Hasanov A. B., Hasanov T. G. The Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation in the class of periodic infinite-gap functions.

In this paper, the method of the inverse spectral problem is applied to finding a solution to the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in the class of periodic infinite-gap functions. A simple derivation of the system of differential Dubrovin equations is proposed. The solvability of the Cauchy problem is proved for the infinite system of Dubrovin differential equations in the class of four-times continuously differentiable periodic infinite-gap functions. It is shown that the sum of a uniformly convergent functional series constructed using the solution of the infinite system of Dubrovin equations and the formula for the first trace, does satisfy the nonlinear Korteweg–de Vries equation. In addition, it is proved that if the number $\frac{\pi}{n}$ is the period of the initial function, then the number

$\frac{\pi}{n}$ is the period for the solution of the Cauchy problem with respect to the variable x. Here $n \geqslant 2$ is a positive integer.

Самаркандский
государственный университет,
Университетский бульвар, 15,
140104 Самарканд, Узбекистан
E-mail: ahasanov2002@mail.ru

Ургенчский государственный университет,
ул. Хамид Алимджан, 14,
220100 Ургенч, Узбекистан
E-mail: temur.hasanov.2018@mail.ru

Поступило 9 октября 2021 г.