Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

В. В. Суханов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ПОЛУОСИ С МЕДЛЕННО ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ ПОТЕНЦИАЛОМ

§1. Введение

Работа посвящена исследованию решений нестационарного уравнения

$$-i\Phi_t = \mathrm{H}(\varepsilon \mathrm{t})\Phi, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.1}$$

с оператором H медленно зависящим от времени. Хорошо известны асимптотические формулы описывающие поведение решений уравнения (1.1) в случае, когда спектр оператора H в каждый момент времени является дискретным. Построение асимптотических формул для решения уравнения (1.1) в случае, если оператор H имеет непрерывный спектр, традиционно основано на адиабатической теореме теории рассеяния (см. [1]). Соответствующая техника, например, хорошо развита в случае, когда оператор H представим в виде суммы

$$\mathrm{H}(\varepsilon \mathrm{t}) = \mathrm{H}_0 + \mathrm{V}(\varepsilon \mathrm{t}), \tag{1.2}$$

где оператор H_0 от t не зависит. В случае быстро убывающего потенциала, в старшем порядке асимптотические формулы для решений уравнения (1.1) строятся так, как если бы оператор H от времени не зависел, см. [3] и [2]. В настоящей работе используется другой подход, использованный в работах [4,5] и не зависящий от адиабатической теоремы теории рассеяния. В качестве модели выбран одномерный оператор Шредингера на полуоси с условием Дирихле в нуле, с быстро убывающим вещественным потенциалом

$$\mathrm{H}(\tau) = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x,\tau), \ \ v \in \mathbf{R}, \ \ \tau = \varepsilon t.$$

Ключевые слова: оператор Шредингера, адиабатическая теорема теории рассеяния, непрерывный спектр, собственные функции.

Исследование автора поддержано грантом РНФ No. 17-11-01126.

Мы будем считать, что оператор H(t) (для любого момента времени) не имеет дискретного спектра. В качестве основного асимптотического анзатца для решения уравнения (1.1) выбрано разложение по собственным функциям непрерывного спектра оператора H(t) в данный момент времени.

Во втором параграфе мы приведем основные сведения из спектральной теории оператора Шредингера на полуоси.

Третий параграф посвящен построению формального решения нестационарного уравнения Шредингера. Такое решение, в старшем порядке, строится как интеграл по спектральному параметру от собственных функций оператора Шредингера в данный момент времени. Дальнейшие члены разложения определяются тем условием, чтобы решение оставалось быстроубываюшим при $x \to +\infty$ и удовлетворяло условию Дирихле.

В четвертом параграфе мы докажем, что построенные формальные решения являются асимптотическими разложениями точных решений задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера.

Наконец, в пятом параграфе, мы сравним полученные результаты с результатами, возникающими в рамках подхода, связанного с адиабатической теоремой теории рассеяния. Для модели оператора Дирака, рассмотренной в работе [4], асимптотическое поведение решения описывалось состоянием оператора H(t) в начальный момент времени со сверхстепенной точностью по ε. В случае оператора Шредингера это не так. Старший член асимптотики по-прежнему зависит только от состояния оператора H(t) в начальный момент времени. Однако младшие члены разложения чувствуют динамику оператора H(t). Это связано с краем спектра оператора Шредингера.

§2. Необходимые сведения из спектральной теории для оператора Шредингера на полуоси

Для анализа решений уравнения (1.1) нам потребуются некоторые сведения из спектральной теории для оператора Шредингера (см. [6]). Рассмотрим оператор Шредингера на полуоси

$$\mathrm{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x), \quad x \in [0, +\infty).$$

с условием Дирихле в нуле. Здесь $v(x)$ – вещественнозначный, гладкий потенциал

$$v(x) \in C^{\infty}([0,\infty)), \tag{2.1}$$

($v(x)$ должен иметь гладкое продолжение на интервал $[-\varepsilon,\infty)$, $\varepsilon > 0$) и быстро убывать при $x \to +\infty$:

$$\frac{d^l}{dx^l} v(x) = O(x^{-n}) \tag{2.2}$$

для любых натуральных l и n. Здесь и в дальнейшем мы будем считать, что оператор H не имеет дискретного спектра, т.е. не существует отличных от нуля решений уравнения

$$\mathrm{H}y = \lambda y = k^2 y, \quad y(0) = 0 \tag{2.3}$$

принадлежащих $L_2(0,\infty)$.

Фиксируем решение Йоста $f(x,k)$ спектрального уравнения

$$\mathrm{H}f = k^2 f, \tag{2.4}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$f(x,k) = \exp(ikx) + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{2.5}$$

а также решение задачи Коши $\varphi(x,k)$

$$\mathrm{H}\varphi = k^2 \varphi \tag{2.6}$$

$$\varphi(0,k) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(0,k)}{\partial x} = 1. \tag{2.7}$$

Функции $f(x,k)$ и $\varphi(x,k)$ связаны соотношением

$$\varphi(x,k) = \overline{a(k)} f(x,k) + a(k) \overline{f(x,k)}.$$

Из анализа подходящих интегральных уравнений Вольтерра

$$f(x,k) = e^{ikx} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(k(x-y))}{k} v(y) f(y,k)\, dy$$

$$\varphi(x,k) = \frac{\sin(kx)}{k} + \int_0^x \frac{\sin(k(x-y))}{k} v(y) \varphi(y,k)\, dy$$

для решений $f(x,k)$ и $\varphi(x,k)$ легко получить следующую лемму (см. [6]).

Лемма 2.1. *Решения $f(x,k)$ и $\varphi(x,k)$ существуют и единственны при $x \in [0,+\infty), k \in [0,+\infty)$. Они являются бесконечно дифференцируемыми функциями от x и k. Функция $\varphi(x,k)$ обладает следующей асимптотикой*

$$\varphi(x,k) = \overline{a(k)}\exp(ikx) + a(k)\exp(-ikx) + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{2.8}$$

Коэффициент a удовлетворяет условиям:

$$a(k) = \frac{-1}{2ik} f(0,k), \quad a(k) \in C^{\infty}(0,+\infty);$$

Оператор H обладает однократным непрерывным спектром на положительной полуоси. Функцию ψ определенную равенством

$$\psi = \frac{\varphi}{a}$$

можно рассматривать как собственную функцию непрерывного спектра оператора H, в частности

$$\int\limits_0^{\infty} \psi(x,k)\overline{\psi(y,k)}\,dk = 2\pi\delta(x-y).$$

Функция $\psi(x,k)$ имеет следующие свойства:

$$\psi(0,k) = 0, \tag{2.9}$$

$$\psi(x,k) = \exp(ikx)\overline{a(k)}/a(k) + \exp(-ikx) + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{2.10}$$

Введем в рассмотрение пространство функций $S_0(0,\infty)$

$$c \in S_0(0,\infty) \longleftrightarrow c \in S(-\infty,+\infty)$$

(т.е. функция c, заданная на положительной полуоси, должна убывать при $x \to +\infty$ в соответствии с классом Шварца и иметь гладкое продолжение на всю ось) и преобразование $F: \ S_0(0,+\infty) \to S_0(0,+\infty)$ задаваемое функцией ψ

$$d(k) = F\left(c(x)\right) = \int\limits_0^{\infty} dx c(x)\overline{\psi(x,k)}. \tag{2.11}$$

Это преобразование обладает свойствами, аналогичными преобразованию Фурье. В частности, оно обратимо, а формула для обратного преобразования имеет вид

$$c(x) = F^{-1}(d(k)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dk d(k)\psi(x,k). \tag{2.12}$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$Hv - k^2 v = h(x),$$

удовлетворяющее условию Дирихле можно найти в виде

$$v(x) = \frac{1}{2ika(k)}\int\limits_0^x (\varphi(x,k)f(y,k) - f(x,k)\varphi(y,k))h(y)\,dy + r\varphi(x,k). \tag{2.13}$$

Здесь r – произвольный коэффициент.

Замечание 2.2. Как видно из леммы, коэффициент $a(k)$ имеет вид

$$a(k) = \frac{-1}{2ik}f(0,k)$$

В случае общего положения $a(k) \to \infty$ при $k \to 0$, поэтому мы будем полагать, что оператор Н, таков что

$$|ka(k)| \geqslant \varepsilon_0 > 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

При таком условии формула (2.13) не имеет особенности при $k \to 0$.

§3. Формальное решение нестационарного уравнения Шредингера

Рассмотрим решение задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера

$$\begin{gathered} -i\Phi_t = \mathrm{H}(\tau)\Phi, \ \ \tau = \varepsilon t, \ \ \varepsilon \ll 1 \\ \Phi|_{t=o} = \Phi_0(x), \quad \Phi(0,t) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathrm{H}(\tau)$-оператор Шредингера на полуоси

$$\mathrm{H}(\tau) = -\frac{d^2}{dx^2} + v\left(x,\tau\right), \ \tau = \varepsilon t,$$
$$v(x,\tau) \in C^\infty((0,+\infty) \times [0,\tau_0]),$$
$$\Phi_0(x) \in S_0(0,+\infty), \ \Phi_0(0) = 0, \ \partial_\tau^j v(\bullet,\tau) \in S(0,+\infty), \ j = 0,1,2,\ldots$$

Кроме того мы будем полагать, что

$$|ka(k,\tau)| \geqslant \varepsilon_0 > 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Будем строить формальное решение задачи Коши (3.1) на промежутке $\tau \in [0, \tau_0]$ в виде разложения

$$\widehat{\Phi}(x,t) \cong \int_0^\infty dk \exp(ik^2 t) \sum_{l=0}^\infty \varepsilon^l F_l(x,k,\tau). \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. Разумеется нестационарное уравнение Шредингера имеет много решений в зависимости от поведения в нуле и на бесконечности по переменной x. Нам требуется решение равное нулю при $x = 0$ и хорошо убывающее при $x \to +\infty$. Такое решение можно получить в рамках следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Задача Коши* (3.1) *имеет единственное формальное решение вида* (3.2), *обладающее следующими свойствами*:

$$F_l(x,k,\tau) \in C^\infty((0,+\infty) \times (0,+\infty) \times [0,\tau_0]),\ \partial_\tau^j F_l(x,\bullet,\tau) \in C^\infty(0,+\infty)$$

$$F_l|_{x=0} = 0, \tag{3.3}$$

$$F_l = Q_l(x,k,\tau)\exp(ikx) + q_l^0(k)\exp(-ikx) + o(1),\quad x \to +\infty. \tag{3.4}$$

Здесь Q_l – полиномы по x

$$Q_l = \sum_{m=0}^{l} q_{lm}(\tau,k) x^m,$$

с гладкими коэффициентами

$$\partial_\tau^j q_{lm}(\tau,\bullet) \in S_0(0,+\infty), j = 0,1,2,\dots$$

а $q_l^0(k)$ – гладкие функции из $C^\infty(0,+\infty)$ не зависящие от τ и x.

Для доказательства теоремы подставим ряд (3.2) в уравнение (3.1). Приравняем члены при одинаковых степенях ε. Легко видеть, что коэффициенты ряда (3.2) удовлетворяют рекуррентной системе соотношений

$$-i(F_l)_\tau = (\mathrm{H}(\tau) - k^2)F_{l+1}.$$

В старшем порядке получим

$$(\mathrm{H}(\tau) - k^2)F_0(x,k,\tau) = 0.$$

Таким образом, функция $F_0(x,k,\tau)$ является решением спектрального уравнения (2.4). Решение спектрального уравнения, удовлетворяющего условию Дирихле, может быть представлено в виде

$$F_0(x,k,\tau) = d^0(k,\tau)\varphi(x,k,\tau).$$

Для того чтобы определить функцию $d^0(k,\tau)$ используем условие (3.4). С учетом асимптотики (2.10) решения $\psi(x,k,\tau)$ получим

$$(d^0)_\tau = 0.$$

Наконец, из начального условия задачи Коши (3.1) окончательно имеем

$$d^0(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} dx\overline{\psi(x,k,0)}\Phi_0(x).$$

Далее выполнение теоремы можно увидеть с помощью метода математической индукции. Пусть утверждение теоремы выполнено для всех $l \leqslant N$. В частности, отсюда следует, что

$$\frac{\partial F_N(0,k,\tau)}{\partial\tau} = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial F_N(x,k,\tau)}{\partial\tau} = \exp(ikx)\widetilde{Q}_N(x,k,\tau) + o(1), \quad x \to +\infty. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\widetilde{Q}_l(x,k,\tau) = \frac{\partial Q_l}{\partial\tau}.$$

При $l = N+1$ получим

$$\begin{aligned} F_{N+1}(x,k,\tau) = \frac{1}{2ia(k)k}\int\limits_0^x dy(\varphi(x,k)f(y,k) \\ - f(x,k)\varphi(y,k))\frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial\tau} + d^{N+1}(k,\tau)\psi(x,k,\tau). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $F_{N+1}(x,k,\tau)$ при $x \to +\infty$. Подставим формулы (2.5) и (2.8), описывающие асимптотическое поведение функций $f(x,k,\tau)$ и $\varphi(x,k,\tau)$, а также асимптотику (3.6) производной функции F_N в соотношение (3.7). Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение для интеграла, стоящего в правой части равенства при $y \to +\infty$, $x > y$, обладает асимптотическим поведением следующего вида

$$\begin{aligned} (\varphi(x,k)f(y,k) - f(x,k)\varphi(y,k))\frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial\tau} \\ \simeq a(k)(\exp(-ikx)\exp(2iky) - \exp(ikx))\widetilde{Q}_N(y,k,\tau) \end{aligned}$$

Отсюда можно получить асимптотику функции $F_{N+1}(x,k,\tau)$

$$F_{N+1}(x,k,\tau) \simeq \widehat{Q}_{N+1}(x,k,\tau)\exp(ikx) + \widehat{q}_{N+1}(k,\tau)\exp(-ikx) + d^{N+1}(k,\tau)\Big(\exp(-ikx) + \exp(+ikx)\frac{\bar{a}}{a}\Big)$$

при $x \to +\infty$, где $\widehat{Q}_{N+1}(x,k,\tau)$ – подходящий полином по x степени $N+1$, а $\widehat{q}_{N+1}(k,\tau)$ – коэффициент не зависящий от x. Отсюда используя соотношение (3.4) можно найти коэффициент d^{N+1} с точностью до одной неизвестной постоянной (по τ) величины

$$d^{N+1}(k,\tau) = -\widehat{q}_{N+1}(k,\tau) + q^0_{N+1}(k).$$

Для отыскания недостающей функции можно использовать начальное условие задачи Коши

$$\int\limits_0^\infty dk F_{N+1}(x,k,0) = 0.$$

В итоге, получим

$$q^0_{N+1}(k) = F(0)[\frac{-1}{4i\pi a(k)k}\int\limits_0^x dy(\varphi(x,k,0)f(y,k,0) - f(x,k,0)\varphi(y,k,0)) \times \frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial\tau}|_{\tau=0} + \widehat{q}_{N+1}$$

Здесь $F(0)$ – преобразование построенное по формуле (2.11) с функцией $\psi(x,k,\tau)$ в момент времени $\tau = 0$. Таким образом, мы видим, что существует единственная функция $F_{N+1}(x,k,\tau)$ обладающая нужными свойствами. На этом будем считать теорему доказанной.

§4. Оценки формального решения

Введем в рассмотрение отрезок ряда (3.2)

$$\Phi_N(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} dk\exp(ikt)\sum_{l=0}^N \varepsilon^l F_l(x,k,\tau)$$

и соответствующую ему невязку в уравнении (3.1)

$$\Delta\Phi_N(x,t) = -i\frac{\partial\Phi_N}{\partial t} - \mathrm{H}(\tau)\Phi_N = -i\varepsilon^{N+1}\int\limits_0^\infty dk\exp(ik^2t)\frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial\tau}.$$

Теорема 4.1. *Невязка* $\Delta\Phi_N(x,t)$ *удовлетворяет следующим оценкам*

$$\Delta\Phi_N(x,t) \in C^\infty((0,+\infty),[0,\tau_0]),$$
$$\|\Delta\Phi_N(x,t)\|_{klm} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Здесь

$$\|F(x,t)\|_{lkm} = \sum_{l'=0}^{l}\sum_{k'=0}^{k}\sum_{m'=0}^{m}\max_{x,\tau}\left|\frac{\partial^{l'+k'}F}{\partial^{l'}x\partial^{k'}t}(|x|^m+1)\right|$$

Доказательство этой теоремы является прямым следствием конструкции формального решения $\Phi_N(x,t)$.

Теорема 4.2. *Формальный ряд* $\widehat{\Phi}$ *является асимптотическим разложением точного решения* Φ *задачи Коши* (1.2) *для* $\tau \in [0,\tau_0]$. *Выполнены следующие оценки*

$$\forall k,l,m \quad \|\Phi-\Phi_N\|_{lkm} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Введем в рассмотрение точное решение Φ задачи Коши (3.1)

$$-i\Phi_t = \mathrm{H}(\tau)\Phi, \ \ \tau=\varepsilon t,$$
$$\Phi|_{t=o} = \Phi_0(x).$$

Это решение мы можем рассматривать как результат действия действия оператора $M(t)$ на начальные данные задачи Коши

$$\Phi(t) = M(t)\Phi_0.$$

Оператор $H(\tau)$ формально самосопряженный в $L_2(0,+\infty)$. Таким образом оператор $M(t)$ можно считать изометрическим в $L_2(0,+\infty)$. Рассмотрим функцию

$$X_N = \Phi - \Phi_N.$$

Она удовлетворяет неоднородному уравнению

$$-i\frac{\partial X_N}{\partial t} - \mathrm{H}(\tau)X_N = \Delta\Phi_N. \tag{4.1}$$

Мы можем вычислить решение этого уравнения с помощью оператора $M(t)$

$$X_N(k,t) = iM(t)\int_0^t dt' M^{-1}(t')\Delta\Phi_N(t').$$

Из этого соотношения мы можем получить оценку для нормы функции X_N

$$\|X_N\|_{L_2(0,+\infty)} \leqslant t \max_{t'\in[0,t]} \|\Delta\Phi_N(t')\|_{L_2(0,+\infty)}.$$

Для того, чтобы получить оценки для производной $\frac{\partial X_N}{\partial x}$ продифференцируем уравнение (4.1)

$$-i\frac{\partial^2 X_N}{\partial t\partial x} - \mathrm{H}(\tau)\frac{\partial X_N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi_N + v_x X_N.$$

Теперь мы имеем неоднородное уравнение для $\frac{\partial X_N}{\partial x}$. Оценки для него можно получить аналогично, как для уравнения (4.1). Похожим образом возникают оценки для производных $\frac{\partial X_N}{\partial t}$, а также для произведений $X_N x^l$. На этом будем считать теорему доказанной.

§5. Асимптотическое поведение решения при больших временах

В старшем порядке построенное нами решение при $\varepsilon \to 0$ имеет вид

$$\Phi(x,t) \cong \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\exp(ik^2t)\psi(x,k,\tau)\int_0^{+\infty} dy\overline{\psi(y,k,0)}\Phi_0(y). \qquad (5.1)$$

Легко видеть, что при $t \gg 1$ внешний интеграл, стоящий в правой части содержит большой параметр и, следовательно, асимптотика его может быть вычислена с помощью метода стационарной фазы. Основной вклад дают точки стационарной фазы и граница промежутка интегрирования.

Начнем с анализа вклада точек стационарной фазы. Хорошо известно, что при больших временах решение нестационарного уравнения Шредингера в основном сосредоточено в области где x порядка t. Поэтому будем считать, что x велико. Тогда функцию $\psi(x,k,\tau)$ в интеграле (5.1)можно заменить ее асимптотикой

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\exp(ik^2t)(\exp(ikx)\frac{\overline{a(k,\tau)}}{a(k,\tau)}+\exp(-ikx))\int_0^{+\infty} dy\overline{\psi(y,k,0)}\Phi_0(y). \quad (5.2)$$

Стационарная точка возникнет только у тех слагаемых, которые содержат экспоненту $\exp(ik^2t)\exp(-ikx)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} dk\exp(ik^2t)\exp(-ikx)\int\limits_0^{+\infty} dy\overline{\psi(y,k,0)}\Phi_0(y)\\
&\cong \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-ix^2/(4t))\int\limits_0^{+\infty} dy\overline{\psi(y,x/(2t),0)}\Phi_0(y).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Легко видеть, что полученное выражение зависит только от состояния оператора в начальный момент времени и не зависит от дальнейшей динамики. Этот результат естественно согласуется с результатами, полученными из адиабатической теоремы теории рассеяния, см. [1].

Теперь посмотрим на вклад от границы промежутка интегрирования при $k = 0$. По-прежнему будем считать, что x велико. Тогда вновь можно использовать асимптотику для собственных функций. Перепишем формулу (5.2) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} dk\exp(ik^2t)(\exp(ikx)R_1(k,\tau)+\exp(ik^2t)\exp(-ikx)R_2(k)) \tag{5.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R_1(k,\tau) &= \frac{\overline{a(k,\tau)}}{a(k,\tau)}\int\limits_0^{+\infty} dy\overline{\psi(y,k,0)}\Phi_0(y),\\
R_2(k) &= \int\limits_0^{+\infty} dy\overline{\psi(y,k,0)}\Phi_0(y).
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям в интеграле (5.4)(т.е. интегрируя быстро осциллирующую экспоненту $\exp(ik^2t)\exp(\pm ikx)$ и дифференцируя амплитуду $R_{1,2}$) можно получить вклады в асимптотику. Для старших членов они будут иметь порядок $O(1/t)$. Эти вклады меньше, чем вклады от стационарных точек. При этом вклады от R_1 будут чувствовать динамику оператора от времени, а вклады от R_2 нет.

Замечание 5.1. Таким образом, в старшем порядке асимптотика полностью определяется оператором в начальный момент времени, но степенные поправки чувствуют динамику оператора Шредингера на полуоси (как это было и для оператора Шредингера на всей оси, см. [5]). Для оператора Дирака, как видно из работы [4], поправки имели сверхстепенной характер. Наличие степенных поправок как для оператора Шредингера полуоси так и для оператора Шредингера на всей оси связано с краем непрерывного спектра в нуле.

Список литературы

1. J. D. Dollard, *Adiabatic switching in the Shroedinger theory of scattering.* — J. Math. Phys. **7** (1966), 802–810.
2. G. Nenciu, *On the adiabatic limit for Dirac particles in external fields.* — Com. Math. Phys. **76** (1980), 117–128.
3. A. Martinez, Sh. Nakamura, *Adiabatic limit and scattering.* — C. R. Acad. Sci. Paris ser I Math. **318**, No. 12 (1994), 1153–1158.
4. В. В. Суханов, *Асимптотическое поведение решений нестационарного уравнения Дирака с медленно зависящим от времени потенциалом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **483** (2019), 189–198.
5. В. В. Суханов, *Асимптотическое поведение решений нестационарного уравнения Шредингера с медленно зависящим от времени потенциалом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **493** (2020), 323–335.
6. V. A. Marchenko, *Sturm-Liouville operators and their applications*, "Naukova Dumka", Kiev, 1977. (Russian)

Sukhanov V. V. Asymptotic behavior of solutions to a nonstationary equation Schrödinger on a semi-axle with a potential which is slowly depends on time.

The asymptotic behavior of the solutions of the Cauchy problem for the nonstationary Schrödinger equation on the semiaxis with a rapidly decreasing potential is studied. The construction of asymptotic solutions is based on the spectral expansion of the solution at a given time. This construction does not use the adiabatic theorem of scattering theory. In the highest order (as in the approach associated with the adiabatic theorem of scattering theory), the solution does not depend on the dynamics of the potential and is completely determined by the value of the potential at the zero instant of time. In this paper, we calculated power-law corrections to the leading term of the solution associated with the boundary of the

continuous spectrum, which take into account the time dependence of the operator.

С.-Петербургский государственный
университет НИИФ 198904,
С.-Петербург, Петродворец,
Ульяновская ул., 1 Россия
E-mail: vvsukhanov@mail.ru

Поступило 23 октября 2021 г.