

К. С. Седов, А. А. Федотов

О МАТРИЦАХ МОНОДРОМИИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА НА ОСИ С МАЛЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Разностный оператор Шрёдингера, действующий в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$H_\theta \psi_k = \psi_{k+1} + \psi_{k-1} + \lambda v(hk + \theta) \psi_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\theta \in [0, 1)$, $h \in (0, 1)$ и $\lambda > 0$ – параметры, а v – периодическая функция, возникает в современной квантовой физике и, в частности, в физике твердого тела, например, при исследовании спектра электрона в кристалле, помещенном в магнитное поле, в различных асимптотических режимах, см., например, [1–4]. Часто v называют потенциалом, h – частотой, θ – эргодическим параметром, а λ – константой связи.

Случай, когда λ мала, – хорошо известная классическая задача. Рассмотрение таких задач началось с пионерской работы [5] и было продолжено многими математиками, см., например, [6–9]. Одним из сложных и малоизученных вопросов остается вычисление асимптотик длин спектральных лакун.

В этой работе для малых λ мы исследуем уравнение Шрёдингера

$$\psi(z+h) + \psi(z-h) + \lambda v(z) \psi(z) = E \psi(z), \quad (1.1)$$

где z – вещественная (комплексная) переменная. Предполагается, что v – вещественно-аналитическая 1-периодическая функция. Хорошо известно, что при $h \notin \mathbb{Q}$ спектр H_θ не зависит от θ и совпадает со спектром оператора H , определяемого левой частью (1.1) в $L^2(\mathbb{R})$, см., например, [10].

Наша конечная цель – исследование геометрии спектра H при $\lambda \rightarrow 0$. Для этого мы используем метод монодромизации – перенормировочный подход, предложенный В. С. Буслаевым и А. А. Федотовым

Ключевые слова: разностные уравнения на оси с периодическими коэффициентами, уравнение Шрёдингера, малая константа связи, матрица монодромии.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 17-11-01069.

(см. обзор [11]). Одним из центральных объектов при таком подходе оказывается матрица монодромии. В этой работе мы изучаем его асимптотически.

Оператор, соответствующий левой части (1.1), коммутирует с оператором T сдвига на 1, поэтому пространство решений (1.1) оказывается инвариантным относительно T , и можно рассмотреть его сужение на это пространство. Пространство решений (1.1) – 2-мерный модуль над кольцом h -периодических функций [11]. Поэтому матрица ограничения оператора сдвига на него оказывается h -периодической матрицей-функцией z размера 2×2 . Это и есть матрица монодромии. Так же, как и для дифференциальных уравнений, она является важным инструментом для спектрального анализа [11].

Ранее за счет исследования асимптотик матрицы монодромии в работах [12, 13] были получены асимптотики серии лакун при малых λ для оператора почти-Матье – оператора H_θ с $v(z) = 2\lambda \cos 2\pi z$. Теперь мы сконцентрируемся на случае, когда потенциал аналитичен в некоторой полосе конечной ширины. Нас интересует, каким образом особенности, находящиеся на конечном расстоянии от вещественной оси, могут влиять на спектр. Здесь мы делаем первый шаг в этом направлении: находим асимптотику при $\lambda \rightarrow 0$ матрицы монодромии для уравнения (1.1). При этом мы рассматриваем две ситуации. Сначала мы предполагаем, что потенциал v аналитичен в некоторой окрестности \mathbb{R} и получаем общие асимптотические формулы. Затем мы исследуем асимптотику матрицы монодромии в простейшем случае нарушения аналитичности потенциала – в случае, когда, являясь аналитическим в некоторой полосе, в некоторой более широкой полосе потенциал имеет конечное число простых полюсов на период. В обоих случаях матрица монодромии определена в полосе шириной $\frac{\text{const}}{h}$. В случае аналитического v матрица монодромии оказывается аналитичной. В случае же, когда v имеет полюса, скажем, в точках z_1 и \bar{z}_1 , матрица монодромии имеет простые полюса в точках $\frac{z_1}{h}$ и $\frac{\bar{z}_1}{h}$.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Уравнение монодромии. Метод монодромизации. Здесь мы коротко обсудим метод монодромизации и, в частности, выпишем формальное определение для матрицы монодромии.

Метод монодромизации возник при попытке использовать идеи теории Блоха-Флоке для исследования разностных уравнений на вещественной оси с периодическими коэффициентами. Он первоначально был развит для изучения геометрии спектра уравнения Харпера. Затем он успешно применялся для решения других задач, в частности, для исследования спектра одномерных дифференциальных двухчастотных почти периодических операторов в случае, когда один из периодов много больше другого. Больше подробностей читатель найдет в обзоре [11].

В методе монодромизации рассматривают уравнение (1.1), т.е. разностное уравнение на оси с периодическими коэффициентами. Как и в случае дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, для него можно попытаться построить блоховские решения, т.е. решения, которые при сдвиге аргумента на период умножаются на константу. Удобно записать (1.1) в матричном виде

$$\Psi(z+h) = M(z)\Psi(z), \quad M(z) = \begin{pmatrix} E - \lambda v(z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(z) = \begin{pmatrix} \psi(z) \\ \psi(z-h) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Отметим, что $M(z) = M(z+1)$, $\det M(z) = 1$.

В случае дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz}\Psi(z) = M(z)\Psi(z) \quad (2.2)$$

для нахождения блоховских решений строят фундаментальное матричное решение (2.2) и определяют для него матрицу монодромии \widetilde{M} формулой:

$$\Psi(z+1) = \Psi(z)\widetilde{M}^t. \quad (2.3)$$

Затем \widetilde{M} диагонализуют (если это возможно). При этом возникает фундаментальное матричное решение, для которого матрица монодромии диагональна. Его столбцы оказываются блоховскими решениями. Поведение блоховских решений на бесконечности описывается в терминах $\text{Tг } \widetilde{M}$. Зная поведение блоховских решений, можем сказать, как ведет себя общее решение и определить принадлежность E спектру (см. [14]).

Для разностных периодических уравнений матрица монодромии по-прежнему определяется формулой (2.3), где $z \mapsto \Psi(z) \in SL(2, \mathbb{C})$ – фундаментальное матричное решение для уравнения (2.1). Но, как уже отмечалось, теперь пространство решений – модуль над кольцом h -периодических функций, и матрица монодромии – h -периодическая

функция z . Попытка найти блоховские решения для уравнения (2.1) приводит к другому разностному уравнению – уравнению монодромии

$$\Psi_1(z + h_1) = M_1(z)\Psi_1(z), \quad M_1(z) = \widetilde{M}(hz), \quad (2.4)$$

где $h_1 = \{\frac{1}{h}\}$ – преобразование Гаусса числа h . Задача сводится к построению блоховских решений для уравнения (2.4). В дальнейшем удобно саму матрицу M_1 называть матрицей монодромии. Отметим, что, как и M , матрица M_1 1-периодическая и унимодулярная. Таким образом, возникает задача того же вида, что и ранее. Применяя описанные преобразования к (2.4), получаем еще одно уравнение монодромии и т.д. Свойства возникающей цепочки уравнений тесно связаны со спектральными свойствами изучаемого оператора [11].

2.2. Общие асимптотические формулы для коэффициентов матрицы монодромии. Для $Y > 0$ положим $S(Y) = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < Y\}$. Предположим, что $z_0 \in i\mathbb{R}_+$, а потенциал v аналитичен и 1-периодичен в полосе $S(\operatorname{Im} z_0)$ и непрерывен вплоть до границы полосы. Имеет место

Теорема 1. Пусть E принадлежит замкнутому подынтервалу интервала $(-2, 2)$. При достаточно малых λ в пространстве решений уравнения (1.1) существует такой базис, что соответствующая матрица монодромии M_1 аналитична в полосе $S(\operatorname{Im} z_0 / h)$ и при $\lambda \rightarrow 0$ описывается локально равномерной асимптотической формулой

$$M_1 = A(I + \lambda B + O(\lambda^2)), \quad (2.5)$$

где $A = \begin{pmatrix} e^{\frac{ik}{h}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{ik}{h}} \end{pmatrix}$,

$$B(z) = \frac{1}{2iw} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \cot \pi(z' - z) v(hz') \begin{pmatrix} -1 & e^{2ikz'} \\ -e^{-2ikz'} & 1 \end{pmatrix} dz',$$

а контуры γ_1 и γ_2 – отрезки прямых, идущих из точки $\frac{\bar{z}_0 - 1}{h}$ в точку $\frac{\bar{z}_0}{h}$ и из точки $\frac{z_0}{h}$ в точку $\frac{z_0 - 1}{h}$ соответственно, $k = \arccos \frac{E}{2}$ и $w = 2i \sin k$.

Заметим, что в формуле (2.5) старший член асимптотики не зависит от z , а слагаемые порядка порядка λ оказались 1-периодическими. Это согласуется с тем, что матрица монодромии 1-периодична. Кроме того, из формул следует, что $\det M_1(z) = 1 + O(\lambda^2)$, что согласуется с тем, что матрица монодромии унимодулярна. Отметим также, что для

описанной матрицы M_1 с точностью до $O(\lambda^2)$ выполнено соотношение $M_1(z) = \sigma \overline{M_1(\bar{z})} \sigma$. Это происходит потому, что, благодаря вещественности v на \mathbb{R} , нам удастся так выбрать базисные решения, что M_1 удовлетворяет этому соотношению точно, см. предложение 3.7.

2.3. Асимптотика матрицы монодромии для потенциала, мероморфного в полосе. Теперь рассмотрим случай простейшего нарушения аналитичности потенциала – здесь мы предполагаем, что в полосе $S(\text{Im } z_0)$ потенциал имеет конечное число простых полюсов на период. Пусть P – период множества полюсов. Матрица монодромии оказывается мероморфной в полосе $S(\text{Im } z_0 / h)$: она имеет простые полюса в точках множества $\frac{1}{h}P + \mathbb{Z}$, где использовано стандартное обозначение для множества чисел вида $\frac{1}{h}y + t$, где $y \in P$, а $t \in \mathbb{Z}$. Мы приходим к следующему результату:

Теорема 2. Пусть E принадлежит замкнутому подынтервалу интервала $(-2, 2)$. При достаточно малых λ в пространстве решений уравнения (1.1) существует такой базис, что соответствующая матрица монодромии M_1 мероморфна в полосе $S(\text{Im } z_0 / h)$ и при $\lambda \rightarrow 0$ описывается локально равномерной асимптотической формулой

$$M_1 = A(I + \lambda(B + C) + G(z, \lambda)), \tag{2.6}$$

где A и B – матрицы, определенные в теореме 1, а

$$C = \frac{\pi}{hw} \sum_{\zeta \in P/h} \cot \pi(\zeta - z) \underset{\tilde{\zeta}=h\zeta}{\text{res}} v(\tilde{\zeta}) \begin{pmatrix} 1 & -e^{i2k\zeta} \\ e^{-i2k\zeta} & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь w – такое же, как в теореме 1,

$$G(z, \lambda) = \frac{O(\lambda^2)}{Q(z)}, \quad Q(z) = \prod_{\zeta \in P/h} (1 - \exp(-2\pi i(\zeta - z)))$$

и $O(\lambda^2)$ – аналитическая матрица-функция.

Мы видим, что явно выделяются вклады в матрицу монодромии от полюсов потенциала.

Отметим, что общие (неасимптотические) свойства матрицы монодромии в случае, когда потенциал v мероморфен и имеет два полюса на периоде, изучались в [15]. Полученный результат согласуется с наблюдениями из этой работы.

Те же свойства матрицы монодромии, о которых мы упоминали в комментариях к теореме 1, снова отражаются в свойствах поправочных членов – они опять 1-периодичны, и вне полюсов выполнены соотношения: $\det M_1(z) = 1 + O(\lambda^2)$ и $\sigma M_1(\bar{z})\sigma = M_1(z) + O(\lambda^2)$.

Замечание 1. В случае потенциала специального вида

$$v(\zeta) = \frac{1}{1 - \epsilon \cos 2\pi\zeta}, \quad 0 < \epsilon < 1,$$

(эта модель была введена и используется физиками [16]) базис в пространстве решений (1.1) можно выбрать так, что интегрального слагаемого λB в формуле (2.6) не будет. Этот случай мы рассмотрим в отдельной работе.

Параграф 3 работы посвящен доказательству теоремы 1, а в параграфе 4 мы доказываем теорему 2.

Ниже мы используем для функций и выбранных нами их аналитических продолжений одни и те же обозначения.

§3. АСИМПТОТИКА МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛА, АНАЛИТИЧЕСКОГО В ПОЛОСЕ

Как и во введении, ниже мы систематически используем обозначение $S(Y) = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < Y\}$, где $Y > 0$. В этом параграфе мы считаем, что $z_0 \in i\mathbb{R}_+$, а v аналитичен в полосе $S(\operatorname{Im} z_0)$ и непрерывен вплоть до ее границы.

Опишем план этого параграфа. Сначала мы строим два линейно независимых решения разностного уравнения (1.1). Затем мы находим их асимптотики и, вычисляя коэффициенты матрицы монодромии для базиса из построенных решений, получаем асимптотические формулы для нее.

Для построения решений (1.1) перепишем это уравнение в виде

$$\psi(z+h) + \psi(z-h) - E\psi(z) = -\lambda v(z)\psi(z), \quad (3.1)$$

и, поскольку λ мало, будем рассматривать правую часть как возмущение. Легко видеть, что функции

$$\psi_{\pm}^0(z) = e^{\pm i\frac{k}{h}z}, \quad k = \arccos \frac{E}{2}, \quad (3.2)$$

являются решениями (3.1) при $\lambda = 0$.

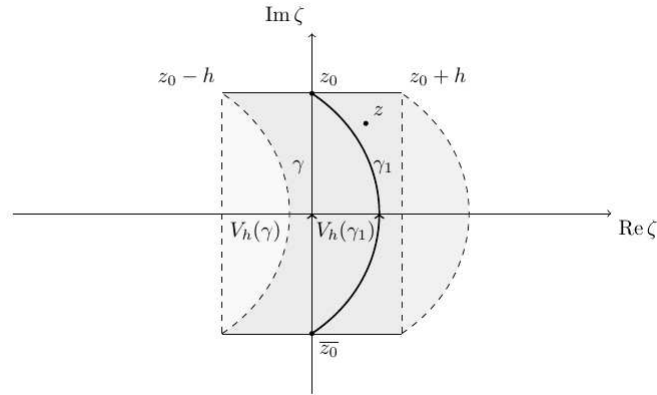


Рис. 1. Контур γ и продолжение решений.

Для построения решений возмущенного уравнения (3.1) исследуем уравнение с интегральным оператором, ядро которого построено через ψ_{\pm}^0 , найдём его решения, затем аналитически продолжим их в $S(\text{Im } z_0)$ и докажем, что полученное продолжение даёт решения (3.1) в этой полосе.

3.1. Интегральное уравнение. Положим

$$\begin{aligned}
 K(z, \zeta) &= -\frac{1}{2ih} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} \frac{\psi_+^0(z)\psi_-^0(\zeta) - \psi_+^0(\zeta)\psi_-^0(z)}{2i \sin k} v(\zeta) \\
 &= -\frac{1}{2ih \sin k} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} \sin \frac{k}{h}(z - \zeta) v(\zeta).
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

При $z = \zeta$ доопределим K по непрерывности. Пусть γ – отрезок $i\mathbb{R}$ от точки \bar{z}_0 до z_0 . Определим оператор \mathcal{K} , действующий в пространстве $C(\gamma, \mathbb{C})$ непрерывных комплекснозначных функций на γ по формуле

$$(\mathcal{K}f)(z) = \int_{\gamma} K(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \gamma.$$

В силу того, что ядро (3.3) не имеет особенностей на γ , оператор \mathcal{K} является ограниченным в пространстве $C(\gamma, \mathbb{C})$.

Рассмотрим в $C(\gamma, \mathbb{C})$ уравнение

$$\psi_{\pm} = \psi_{\pm}^0 + \lambda(\mathcal{K}\psi_{\pm}).
 \tag{3.4}$$

Очевидно, имеет место

Предложение 3.1. *При достаточно малых λ существует единственное решение $\psi_{\pm} \in C(\gamma, \mathbb{C})$ уравнения (3.4); оно имеет вид*

$$\psi_{\pm}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\mathcal{K}^n \psi_{\pm}^0)(z), \quad z \in \gamma, \quad (3.5)$$

причем ряд сходится равномерно на γ .

3.2. Аналитическое продолжение решений интегрального уравнения. Теперь мы аналитически продолжим решения (3.5) в $S(\text{Im } z_0)$. Для этого нам потребуется несколько определений.

Пусть $\delta > 0$, $\Omega \subset \mathbb{C}$. Положим $V_{\delta}(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \exists \zeta \in \Omega : \text{Im } z = \text{Im } \zeta \text{ и } |\text{Re } z - \text{Re } \zeta| < \delta\}$. Будем называть $V_{\delta}(\Omega)$ горизонтальной δ -окрестностью Ω .

Кривая называется вертикальной, если она может быть кусочно гладко параметризована $\text{Im } z$.

Для области $D \subset \mathbb{C}$ $\mathcal{A}(D)$ означает множество аналитических в D функций.

Предложение 3.2. *Решения ψ_{\pm} уравнения (3.4) допускают аналитическое продолжение в $S(\text{Im } z_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим выражение (3.3) для ядра $K(z, \zeta)$. При $\zeta \in \gamma$ ядро аналитично по z в $V_h(\gamma)$ (рис. 1). Кроме того, $(z, \zeta) \mapsto K(z, \zeta)\psi_{\pm}(\zeta) \in C(V_h(\gamma) \times \gamma)$. Следовательно, $z \mapsto \int_{\gamma} K(z, \zeta)\psi_{\pm}(\zeta) d\zeta \in \mathcal{A}(V_h(\gamma))$, и из уравнения (3.4) видим, что функции ψ_{\pm} аналитичны в $V_h(\gamma)$.

Чтобы продвинуться дальше, выберем произвольную вертикальную кривую $\gamma_1 \subset V_h(\gamma)$ (рис. 1), имеющую общие концы с γ . Так как ψ_{\pm} аналитичны в $V_h(\gamma)$, (3.4) выполняется и на кривой γ_1 вместо γ , поэтому $\psi_{\pm} \in \mathcal{A}(V_h(\gamma_1))$. Благодаря произволу в выборе γ_1 , мы видим, что в $S(\text{Im } z_0)$ ψ_{\pm} аналитически продолжаются в $V_{2h}(\gamma)$. Действуя аналогично, мы последовательно аналитически продолжим в $S(\text{Im } z_0)$ ψ_{\pm} в $V_{3h}(\gamma)$, $V_{4h}(\gamma)$ и т.д. \square

Замечание 2. Ниже мы систематически используем следующие обозначения: под $(\mathcal{K}\psi_{\pm})(z)$ мы понимаем интеграл $\int_{\gamma_z} K(z, \zeta)\psi_{\pm}(\zeta) d\zeta$, в котором γ_z – вертикальная кривая с концами z_0 и $\overline{z_0}$, проходящая между точками $z + h$ и $z - h$.

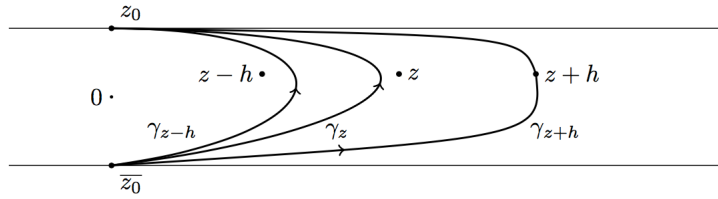


Рис. 2. Выбор контуров γ_{z+h} , γ_{z-h} и γ_z .

Справедливо

Предложение 3.3. *Функции ψ_{\pm} удовлетворяют (1.1) в полосе $S(\text{Im } z_0)$.*

Доказательство. Пусть $(\mathcal{H}_0 f)(z) = f(z+h) + f(z-h) - Ef(z)$, $z \in S(\text{Im } z_0)$. Очевидно, $\mathcal{H}_0 \psi_{\pm}^0 = 0$. Применяя \mathcal{H}_0 к (3.4), получим $\mathcal{H}_0 \psi_{\pm} = \lambda \mathcal{H}_0 \mathcal{K} \psi_{\pm}$. Мы видим, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_0 \mathcal{K} \psi_{\pm})(z) &= \int_{\gamma_{z+h}} K(z+h, \zeta) \psi_{\pm}(\zeta) d\zeta \\ &+ \int_{\gamma_{z-h}} K(z-h, \zeta) \psi_{\pm}(\zeta) d\zeta - E \int_{\gamma_z} K(z, \zeta) \psi_{\pm}(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где контуры γ_{z+h} , γ_{z-h} и γ_z выбраны как на рисунке 2.

Продеформируем контуры γ_{z+h} и γ_{z-h} в первом и втором интегралах в (3.6) к γ_z . При этом в первом интеграле контур пересечет простой полюс подынтегрального выражения в точке z и мы получим:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{z+h}} K(z+h, \zeta) \psi_{\pm}(\zeta) d\zeta &= \int_{\gamma_z} K(z+h, \zeta) \psi_{\pm}(\zeta) d\zeta \\ &+ 2\pi i \operatorname{res}_{\zeta=z} K(z+h, \zeta) \psi_{\pm}(\zeta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

При деформации контура во втором интеграле он не пересекает полюса. Вычет в (3.7) равен $-\frac{1}{2\pi i} v(z) \psi_{\pm}(z)$. В результате из (3.6) получим

$$(\mathcal{H}_0\mathcal{K}\psi_{\pm})(z) = \int_{\gamma_z} \left(K(z+h, \zeta) + K(z-h, \zeta) - EK(z, \zeta) \right) \psi_{\pm}(\zeta) d\zeta - v(z)\psi_{\pm}(z).$$

Поскольку $\mathcal{H}_0\psi_{\pm}^0 = 0$, из первого представления для ядра K из (3.3) следует, что выражение в скобках равно нулю. Поэтому $(\mathcal{H}_0\mathcal{K}\psi_{\pm})(z) = -v(z)\psi_{\pm}(z)$, откуда вытекает (1.1). \square

Реализованная здесь схема построения решений уравнения (3.1) использует идеи из [17] для построения целых решений уравнения Харпера.

3.3. Асимптотика решений ψ_{\pm} при $\lambda \rightarrow 0$.

Теорема 3. *Решения ψ_{\pm} допускают в $S(\text{Im } z_0)$ локально равномерное асимптотическое представление*

$$\psi_{\pm}(z) = \psi_{\pm}^0(z) + \lambda \int_{\gamma_z} K(z, \zeta) \psi_{\pm}^0(\zeta) d\zeta + O(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Доказательство. Для определенности будем обсуждать только решение ψ_+ . Из (3.5) следует равномерная на γ асимптотическая формула

$$\psi_+(z) = \psi_+^0(z) + \lambda(\mathcal{K}\psi_+^0)(z) + O(\lambda^2), \quad z \in \gamma.$$

Чтобы показать, что (3.8) локально равномерна в $S(\text{Im } z_0)$, выберем вертикальную кривую γ_1 , имеющую общие концы с γ . Вместо (3.4) рассмотрим аналогичное уравнение на γ_1 . С одной стороны, при достаточно малых λ оно имеет единственное решение в $C(\gamma_1, \mathbb{C})$, а с другой, ψ_+ удовлетворяет этому уравнению (т.к. можно продеформировать γ_1 к γ в полосе аналитичности ψ_+). Поэтому при достаточно малых λ оценка (3.8) справедлива и равномерна на γ_1 .

Поскольку функция

$$z \mapsto f(z) = \psi_+(z) - \left(\psi_+^0(z) + \lambda \int_{\gamma_1} K(z, \zeta) \psi_+^0(\zeta) d\zeta \right)$$

аналитична по z в $S(\text{Im } z_0)$, непрерывна в z_0 и допускает равномерную оценку $O(\lambda^2)$ на γ и γ_1 , по принципу максимального модуля эта оценка сохранится и между этими кривыми. Отсюда следует утверждение предложения. \square

3.4. Коэффициенты матрицы монодромии. Здесь мы выпишем выражения для коэффициентов матрицы монодромии M_1 в терминах решений ψ_{\pm} , а затем воспользуемся ими для нахождения асимптотик коэффициентов.

3.4.1. *Формулы для коэффициентов матрицы монодромии.* Следуя [11], напомним общие формулы для коэффициентов матрицы монодромии.

Пусть $\psi_{1,2}$ – два решения (1.1) на \mathbb{R} . Выражение

$$w\{\psi_1, \psi_2\} = \psi_1(z+h)\psi_2(z) - \psi_2(z+h)\psi_1(z)$$

называется их вронскианом. Вронскиан – h -периодическая функция. Если он не обращается в нуль, $\psi_{1,2}$ образуют базис в пространстве решений (1.1), и любое другое решение ψ можно представить в виде

$$\psi(z) = \alpha(z)\psi_1(z) + \beta(z)\psi_2(z), \quad (3.9)$$

где α и β – h -периодические коэффициенты. Отсюда и из определения вронскиана следует, что

$$\alpha(z) = \frac{w\{\psi(z), \psi_2(z)\}}{w\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}}, \quad \beta(z) = -\frac{w\{\psi(z), \psi_1(z)\}}{w\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}}. \quad (3.10)$$

В силу того, что потенциал v 1-периодичен, функции $z \mapsto \psi_1(z+1)$ и $z \mapsto \psi_2(z+1)$ также являются решениями (1.1), поэтому

$$\psi_1(z+1) = a(z)\psi_1(z) + b(z)\psi_2(z), \quad \psi_2(z+1) = c(z)\psi_1(z) + d(z)\psi_2(z), \quad (3.11)$$

где a, b, c и d – h -периодические функции. Матрица

$$\tilde{M}(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

и есть матрица монодромии в базисе $\psi_{1,2}$ до линейной замены переменной, превращающей ее в 1-периодическую функцию.

Сравнивая (3.11) с формулами (3.9), (3.10), видим, что коэффициенты $\tilde{M}(z)$ выражаются через решения $\psi_{1,2}$ следующим образом:

$$a(z) = \frac{w\{\psi_1(z+1), \psi_2(z)\}}{w\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}}, \quad b(z) = -\frac{w\{\psi_1(z+1), \psi_1(z)\}}{w\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}}, \quad (3.12)$$

$$c(z) = \frac{w\{\psi_2(z+1), \psi_2(z)\}}{w\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}}, \quad d(z) = -\frac{w\{\psi_2(z+1), \psi_1(z)\}}{w\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}}. \quad (3.13)$$

3.4.2. *Асимптотика коэффициентов $\tilde{M}(z)$ в базисе ψ_{\pm} .* Проверим теперь, что решения ψ_{\pm} образуют базис в пространстве решений (1.1) и рассмотрим матрицу $\tilde{M}(z)$, отвечающую этому базису. Затем, используя (3.12)-(3.13) с $\psi_1 = \psi_+$, $\psi_2 = \psi_-$ и асимптотики ψ_{\pm} , получим асимптотики $\tilde{M}(z)$. Имеет место

Предложение 3.4. *При $z \in S(\text{Im } z_0)$ справедливо локально равномерное асимптотическое представление:*

$$w\{\psi_+(z), \psi_-(z)\} = w\{\psi_+^0, \psi_-^0\} + O(\lambda^2). \quad (3.14)$$

Доказательство. Очевидно,

$$\begin{aligned} w\{\psi_+(z), \psi_-(z)\} &= w\{\psi_+^0(z) + \lambda(\mathcal{K}\psi_+^0)(z) \\ &+ O(\lambda^2), \psi_-^0(z) + \lambda(\mathcal{K}\psi_-^0)(z) + O(\lambda^2)\} = w\{\psi_+^0, \psi_-^0\} \\ &+ \lambda(w\{\psi_+^0(z), (\mathcal{K}\psi_-^0)(z)\} + w\{(\mathcal{K}\psi_+^0)(z), \psi_-^0(z)\}) + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Из предложения 3.5 следует, что выражение в скобках равно нулю. \square

Предложение 3.5.

$$w\{(\mathcal{K}\psi_{\pm}^0)(z), \psi_{\pm}^0(z)\} = \frac{-1}{2ih} \int_{\gamma_z} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta) \psi_{\pm}^0(\zeta) \psi_{\pm}^0(\zeta) d\zeta, \quad (3.15)$$

$$w\{(\mathcal{K}\psi_{\pm}^0)(z), \psi_{\mp}^0(z)\} = \frac{-1}{2ih} \int_{\gamma_z} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta) \psi_{\mp}^0(\zeta) \psi_{\pm}^0(\zeta) d\zeta, \quad (3.16)$$

где γ_z – вертикальная кривая, идущая из точки $\overline{z_0}$ в точку z_0 и проходящая между точек z и $z+h$.

Доказательство. Для проверки первого соотношения распишем соответствующий вронскиан:

$$\begin{aligned} w\{(\mathcal{K}\psi_{\pm}^0)(z), \psi_{\pm}^0(z)\} &= \psi_{\pm}^0(z) \int_{\gamma_{z+h}} K(z+h, \zeta) \psi_{\pm}^0(\zeta) d\zeta \\ &\quad - \psi_{\pm}^0(z+h) \int_{\gamma_z} K(z, \zeta) \psi_{\pm}^0(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

При вычислении выражения $(\mathcal{K}\psi_{\pm}^0)(\cdot)$ в точках z и $z + h$ можно обойтись одним контуром γ_z , проходящим между z и $z + h$. Поэтому

$$w\{\mathcal{K}\psi_{\pm}^0(z), \psi_{\pm}^0(z)\} = \int_{\gamma_z} w\{K(z, \zeta), \psi_{\pm}^0(z)\} \psi_{\pm}^0(\zeta) d\zeta. \quad (3.17)$$

Далее, из первого равенства в (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} & w\{K(z, \zeta), \psi_{\pm}^0(z)\} \\ &= \frac{v(\zeta)}{4h \sin k} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} w\{\psi_{+}^0(z)\psi_{-}^0(\zeta) - \psi_{+}^0(\zeta)\psi_{-}^0(z), \psi_{+}^0(z)\} \\ &= \frac{v(\zeta)}{4h \sin k} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} \psi_{+}^0(\zeta) w\{-\psi_{-}^0(z), \psi_{+}^0(z)\} \\ &= \frac{iv(\zeta)}{2h} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} \psi_{+}^0(\zeta). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.17) следует (3.15); (3.16) проверяется аналогично. \square

Из равенства

$$w\{\psi_{+}^0, \psi_{-}^0\} = 2i \sin k.$$

и предложения 3.4 вытекает

Следствие 3.1. *Если λ достаточно мало и E принадлежит компактному подынтервалу интервала $(-2, 2)$, решения ψ_{\pm} образуют базис.*

Доказательство. Фиксируем $Y_0 \in (0, \text{Im } z_0)$ и $X_0 > 2h$. Как видно из (3.14), в прямоугольнике $\{z \mid |\text{Im } z| \leq Y_0 \text{ и } |\text{Re } z| \leq X_0\}$ справедливо равномерное асимптотическое представление $w = w\{\psi_{+}(z), \psi_{-}(z)\} = 2i \sin k + O(\lambda^2)$. В силу периодичности вронскиана, эта оценка сохраняется во всей полосе $\{z \mid |\text{Im } z| \leq Y_0\}$. Пусть I – компактный подынтервал $(-2, 2)$. Поскольку на $I \sin k$ отделен от нуля, видим, что при достаточно малом λ $w \neq 0$ в полосе $\{z \mid |\text{Im } z| \leq Y_0\}$. \square

Получим асимптотику матрицы $\tilde{M}(z)$ для базиса ψ_{\pm} .

Предложение 3.6. *В полосе $S(\text{Im } z_0)$ при $\lambda \rightarrow 0$ справедливо локально равномерное асимптотическое представление*

$$\tilde{M} = A + \lambda D + O(\lambda^2),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{ik}{h}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{ik}{h}} \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} d_1^+ & d_2^+ \\ d_2^- & d_1^- \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_1^\pm &= \pm (\mathfrak{w}\{(\mathcal{K}\psi_\pm^0)(z+1), \psi_\mp^0(z)\} - \mathfrak{w}\{(\mathcal{K}\psi_\mp^0)(z), \psi_\pm^0(z+1)\}), \\ d_2^\pm &= \mp (\mathfrak{w}\{(\mathcal{K}\psi_\pm^0)(z+1), \psi_\pm^0(z)\} - \mathfrak{w}\{(\mathcal{K}\psi_\pm^0)(z), \psi_\pm^0(z+1)\}), \end{aligned}$$

а $w = \mathfrak{w}\{\psi_+^0, \psi_-^0\}$ – вронскиан решений ψ_\pm^0 .

Доказательство. Вычислим \tilde{M}_{11} . Согласно (3.12), для этого необходимо вычислить вронскиан $\mathfrak{w}\{\psi_1(z+1), \psi_2(z)\}$ с $\psi_1 = \psi_+$ и $\psi_2 = \psi_-$. Используя (3.2), получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}\{\psi_1(z+1), \psi_2(z)\} &= \mathfrak{w}\{\psi_+^0(z+1) + \lambda(\mathcal{K}\psi_+^0)(z+1) + O(\lambda^2), \psi_-^0(z) \\ &\quad + \lambda(\mathcal{K}\psi_-^0)(z) + O(\lambda^2)\} = e^{\frac{ik}{h}} \mathfrak{w}\{\psi_+^0, \psi_-^0\} \\ &\quad + \lambda (\mathfrak{w}\{\psi_+^0(z+1), (\mathcal{K}\psi_-^0)(z)\} + \mathfrak{w}\{(\mathcal{K}\psi_+^0)(z+1), \psi_-^0(z)\}) + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Теперь используя (3.14) и (3.12), получим формулу для коэффициента \tilde{M}_{11} . Остальные коэффициенты вычисляются аналогично. \square

Предложения 3.6 и 3.5 позволяют нам доказать основной результат этого параграфа – теорему 1, сформулированную во введении.

Доказательство. Получим асимптотическую формулу для $\tilde{M}_{11}(z)$. Из предложения 3.6 и определения ψ_\pm^0 следует, что

$$\tilde{M}_{11}(z) = e^{\frac{ik}{h}} + \lambda \frac{e^{\frac{ik}{h}}}{w} (\mathfrak{w}\{(\mathcal{K}\psi_+^0)(z+1), \psi_-^0(z+1)\} - \mathfrak{w}\{(\mathcal{K}\psi_-^0)(z), \psi_+^0(z)\}).$$

Теперь, используя (3.15)-(3.16), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11}(z) &= e^{\frac{ik}{h}} - \lambda \frac{e^{\frac{ik}{h}}}{2ihw} \left(\int_{\gamma_{z+1}} \cot \frac{\pi(\zeta - z - 1)}{h} v(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. - \int_{\gamma_z} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta) d\zeta \right) + O(\lambda^2). \quad (3.18) \end{aligned}$$

В (3.18) и ниже контур γ_z выбирается, как указано в предложении 3.5. Упростим теперь в (3.18) выражение в скобках, сделав замену переменной $\tilde{\zeta} = \zeta - 1$ в первом интеграле. При этом контур γ_{z+1} перейдет

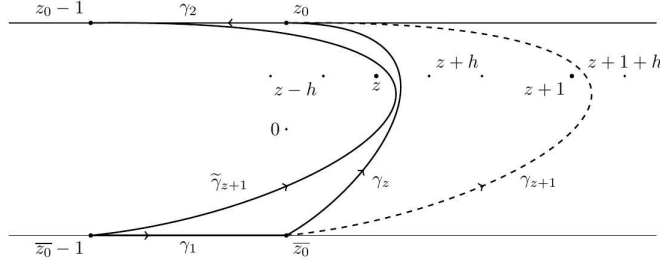


Рис. 3. Выбор контуров и замена переменной.

в $\tilde{\gamma}_{z+1}$ (см. рис. 3). Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_{z+1}} \cot \frac{\pi(\zeta - z - 1)}{h} v(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\tilde{\gamma}_{z+1}} \cot \frac{\pi(\tilde{\zeta} - z)}{h} v(\tilde{\zeta} + 1) d\tilde{\zeta} - \int_{\gamma_z} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta) d\zeta. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Так как v 1-периодична, возникли интегралы от одной и той же функции.

Рассмотрим рисунок 3. В (3.19) все полюса подынтегрального выражения находятся в точках $z \pm hl$, $l = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому $\tilde{\gamma}_{z+1}$ можно продеформировать к кривой, идущей вдоль γ_1 , т.е. от $\bar{z}_0 - 1$ до \bar{z}_0 вдоль прямой, соединяющей эти точки, потом вдоль γ_z , и, наконец, вдоль γ_2 , т.е. от z_0 до $z_0 - 1$ вдоль соответствующей прямой. Тогда вклады в (3.19) от интегралов по γ_z сократятся, и мы получим формулу:

$$\tilde{M}_{11}(z) = e^{\frac{ik}{h}} - \lambda \frac{e^{\frac{ik}{h}}}{2ihw} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta) d\zeta + O(\lambda^2). \quad (3.20)$$

Выполнив в (3.20) замену $z' = \frac{\zeta}{h}$, приходим к выражению для коэффициента $(M_1)_{11}$ матрицы монодромии M_1 из теоремы 1.

Коэффициент $(M_1)_{12}$ вычисляется аналогично. Формулы для $(M_1)_{21}$ и $(M_1)_{22}$ следуют из уже полученных и предложения 3.7. \square

Предложение 3.7. Матрица монодромии M_1 удовлетворяет соотношению

$$\overline{M_1(\bar{z})} = \sigma M_1(z) \sigma, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Введем преобразование $f(z) \mapsto f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Очевидно, при $E \in (-2, 2)$ для решений ψ_{\pm}^0 уравнения (1.1) с $\lambda = 0$ выполнено $(\psi_{\pm}^0)^* = \psi_{\mp}^0$. Так как $\overline{K(\bar{z}, \bar{\zeta})} = -K(z, \zeta)$, а интегрирование в (3.4) ведется вдоль мнимой оси, из (3.4) следует, что $(\psi_{\pm})^* = \psi_{\mp}$. Обозначим $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$, тогда по определению матрицы монодромии $\Psi(z+1) = M_1(z/h)\Psi(z)$. Используя соотношения $(\psi_{\pm})^* = \psi_{\mp}$, видим, что $\Psi^*(z) = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} = \sigma \Psi(z)$. Поэтому $\sigma \Psi(z+1) = M_1^*(z/h) \sigma \Psi(z)$, откуда $\Psi(z+1) = \sigma M_1^*(z/h) \sigma \Psi(z)$, где мы учли, что $\sigma^2 = I$. Отсюда следует соотношение $M_1^* = \sigma M_1 \sigma$. \square

§4. АСИМПТОТИКА МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ В СЛУЧАЕ МЕРОМОРФНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Определим теперь асимптотику матрицы монодромии в случае, когда потенциал v имеет в окрестности вещественной оси конечное число простых полюсов на период. Поскольку v вещественен на \mathbb{R} , его полюса расположены симметрично относительно вещественной оси.

Для нахождения асимптотики мы будем действовать аналогично случаю, когда потенциал аналитичен в полосе: как и раньше, вводится уравнение (3.4), только теперь в качестве контура выбирается отрезок вида $[\bar{z}_0, z_0]$, параллельный мнимой оси и не содержащий полюсов. Здесь $z_0 \in \mathbb{C}$ – точка в области определения v , лежащая выше полюсов. Так же как раньше строятся решения (1.1), но теперь они лишь мероморфно продолжаются в полосу $S(\text{Im } z_0)$. При этом оценки для решений в окрестности полюсов меняются.

Для простоты мы рассмотрим только случай, когда у потенциала есть только два полюса на периоде – точки z_1 и \bar{z}_1 на мнимой оси. Общий случай изучается аналогично. Контур γ теперь проходит между z_1 и $z_1 + 1$, и \bar{z}_1 и $\bar{z}_1 + 1$

4.1. Мероморфное продолжение решений. Пусть P_+ – множество полюсов v справа от γ , а P_- – множество полюсов v слева. Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Предложение 4.1. Решения ψ_{\pm} уравнения (3.4) допускают аналитическое продолжение в S' – полосу $S(\text{Im } z_0)$ без лучей $z_1 - h - \mathbb{R}_+$, $\bar{z}_1 - h - \mathbb{R}_+$, $z_1 + 1 + h + \mathbb{R}_+$ и $\bar{z}_1 + 1 + h + \mathbb{R}_+$. Они мероморфно продолжаются во всю полосу $S(\text{Im } z_0)$. Полюса ψ_{\pm} находятся в точках множеств $P_+ + h\mathbb{N} + \mathbb{Z}_+^0$ и $P_- - h\mathbb{N} - \mathbb{Z}_+^0$, где $\mathbb{Z}_+^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, и полюса в точках $z_1 - h$, $\bar{z}_1 - h$ и $z_1 + 1 + h$, $\bar{z}_1 + 1 + h$ простые. В $S(\text{Im } z_0)$ функции ψ_{\pm} удовлетворяют уравнению (1.1).

Доказательство. Поскольку v имеет полюса в точках $z_1 + \mathbb{Z}$ и $\bar{z}_1 + \mathbb{Z}$, а контур γ проходит между точками z_1 и $z_1 + 1$ и между сопряженными к ним, то повторяя рассуждения из доказательства предложения 3.2, мы убеждаемся лишь, что ψ_{\pm} аналитически продолжаются в S' .

Далее, повторяя рассуждения из доказательства предложения 3.3, мы убеждаемся, что в этой же области ψ_{\pm} удовлетворяют уравнению (1.1).

Область S' содержит прямоугольник $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z_1 - h) < \text{Re } z < \text{Re}(z_1 + 1 + h) \text{ и } |\text{Im } z| < |\text{Im } z_0|\}$. Поскольку ширина Π больше $2h$, то ψ_{\pm} можно мероморфно продолжить из Π во всю полосу $S(\text{Im } z_0)$, используя само уравнение (1.1). Действительно, для продолжения влево от Π мы можно использовать (1.1), записанное в виде

$$\psi(z) = (E - \lambda v(z + h))\psi(z + h) - \psi(z + 2h),$$

а для продолжения направо – в виде

$$\psi(z) = (E - \lambda v(z - h))\psi(z - h) - \psi(z - 2h). \quad (4.1)$$

Очевидно, что полученные в результате мероморфные функции ψ_{\pm} являются решениями (1.1) во всей полосе $S(\text{Im } z_0)$.

Теперь обсудим полюса построенных ψ_{\pm} . Из выписанных уравнений следует, что на прямых $\text{Im } z = \text{Im } z_1$ и $\text{Im } z = \text{Im } \bar{z}_1$ продолжение решений ψ_{\pm} имеет полюса. Из (4.1) видим, что на луче $z_1 + 1 + \mathbb{R}_+$ первый полюс возникает в точке $z_1 + 1 + h$ за счет полюса v в точке $z_1 + 1$. Этот полюс простой, поскольку полюс v простой. Далее, из уравнения (4.1) следует, что ψ_{\pm} имеет полюс и в точке $z_1 + 1 + 2h$, так как у ψ_{\pm} имеется полюс в точке $z_1 + 1 + h$ и т.д. Аналогичная последовательность полюсов возникнет за счет полюса потенциала в точке $z_1 + 2$: появляются полюса в точках $z_1 + 2 + h$, $z_1 + 2 + 2h$, $z_1 + 2 + 3h$ и т.д. Продолжая эти рассуждения, приходим к указанному описанию множества полюсов решений. \square

4.2. Асимптотика решений ψ_{\pm} в случае мероморфного потенциала v . Для доказательства теоремы 2 нам потребуются локально равномерные асимптотики ψ_{\pm} в $S(\text{Im } z_0)$ вне $\text{cl } S(\text{Im } z_1)$ – замыкания $S(\text{Im } z_1)$, содержащего полюса потенциала.

Предложение 4.2. В $S(\text{Im } z_0) \setminus \text{cl } S(\text{Im } z_1)$ решения ψ_{\pm} допускают локально равномерные асимптотические представления

$$\psi_{\pm}(z) = \psi_{\pm}^0(z) + \lambda \int_{\gamma_z} K(z, \zeta) \psi_{\pm}^0(\zeta) d\zeta + O(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0,$$

где для контура интегрирования мы используем наше стандартное обозначение, предполагая дополнительно, что γ_z проходит в $S(\text{Im } z_0)$ между точками z_1 и $z_1 + 1$ и сопряженными к ним.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.

4.3. Коэффициенты матрицы монодромии в случае мероморфного потенциала. Получим асимптотику матрицы \tilde{M} , соответствующей базису ψ_{\pm} . С помощью предложения 4.2 доказывается

Предложение 4.3. Вронскиан $w\{\psi_+(z), \psi_-(z)\}$ аналитичен в полосе $S(\text{Im } z_0)$ и формула (3.14) сохраняется в ней.

Доказательство. Вычислим вронскиан в полосе шириной h . Для этого необходимо знать решения ψ_{\pm} в полосе шириной $2h$. Согласно предложению 4.1, ψ_{\pm} аналитичны в области $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z_1 - h) < \text{Re } z < \text{Re}(z_1 + 1 + h) \text{ и } |\text{Im } z| < |\text{Im } z_0|\}$, ширина которой больше $3h$, поскольку $h < 1$. Отсюда с учетом h -периодичности вронскиана следует его аналитичность в $S(\text{Im } z_0)$.

В $S(\text{Im } z_0) \setminus \text{cl } S(\text{Im } z_1)$ формула (3.14) сначала устанавливается тем же способом, что и раньше. Ее справедливость во всей полосе $S(\text{Im } z_0)$ следует из принципа максимума модуля для аналитических периодических функций. \square

В $S(\text{Im } z_0) \setminus \text{cl } S(\text{Im } z_1)$ утверждение предложения 3.6 проверяется, как и раньше. Чтобы продвинуться дальше, нам потребуется

Предложение 4.4. Фиксируем $\delta > 0$. При достаточно малых λ матрица \tilde{M} мероморфна в $S(\text{Im } z_0 - \delta)$ и имеет простые полюса в точках $z_1 + \mathbb{Z}h$ и $\bar{z}_1 + \mathbb{Z}h$.

Доказательство. С помощью (3.12) определим, где в полосе $S(\operatorname{Im} z_0 - \delta)$ у коэффициента $a = \widetilde{M}_{11}$ есть полюса. При достаточно малых λ вронсиан $w\{\psi_+(z), \psi_-(z)\}$, стоящий в знаменателе, вкладывает в особенности не даст, поскольку, согласно предложению 4.3, он имеет вид $2i \sin k + O(\lambda^2)$, а в условиях теоремы 2 выражение $\sin k$ отделено от нуля. Числитель в (3.12) равен

$$w\{\psi_+(z+1), \psi_-(z)\} = \psi_+(z+1+h)\psi_-(z) - \psi_+(z+1)\psi_-(z+h).$$

Полюса ψ_{\pm} находятся на прямых $\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Im} z_1$. На прямой $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1$ полюса решения $\psi_-(\cdot)$ находятся в точках $z_1 - h, z_1 - 2h$ и т.д. и в точках $z_1 + 1 + h, z_1 + 1 + 2h$ и т.д. У решения $\psi_+(\cdot + 1)$ полюса расположены в $z_1 - h - 1, z_1 - 2h - 1$ и т.д. и в точках $z_1 + h, z_1 + 2h$ и т.д. (см. предложение 4.1). Отсюда видим, что рассматриваемый вронсиан на прямой $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1$ при $\operatorname{Re} z_1 - h \leq \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_1$ имеет точно один полюс – простой полюс $\psi_-(\cdot)$ в точке $z_1 - h$. А так как вронсиан h -периодичен, отсюда следует, что на линии $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1$ все полюса коэффициента a находятся в точках $z_1 + \mathbb{Z}h$ и все они простые. Для остальных коэффициентов утверждение устанавливается аналогично. \square

Теперь мы докажем теорему 2.

Доказательство. При вычислении \widetilde{M}_{11} в $S(\operatorname{Im} z_0) \setminus \operatorname{cl} S(\operatorname{Im} z_1)$ все наши рассуждения и формулы из доказательства теоремы 1 сохраняются до формулы (3.19) включительно. Продолжим наш анализ с неё.

Вне зависимости от выбора контуров γ_z и γ_{z+1} внутри $\Gamma = \gamma_z + \gamma_2 - \widetilde{\gamma}_{z+1} + \gamma_1$ всегда окажутся в точности два сопряженных полюса потенциала v (см. рис. 4). Продеформируем контур $\widetilde{\gamma}_{z+1}$ к $\gamma_z \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$. Интегралы по γ_z с точностью до вкладов от полюсов сократятся, и из (3.19) получится

$$\begin{aligned} & \int_{\widetilde{\gamma}_{z+1} - \gamma_z} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta) d\zeta - 2\pi i \sum_{\substack{\zeta \in z_1, \bar{z}_1 \\ \zeta = \zeta}} \operatorname{res} \cot \frac{\pi(\zeta - z)}{h} v(\zeta), \end{aligned}$$

Фиксируем $\delta > 0$. При достаточно малых λ левая часть (4.3) аналитична в $S(\text{Im } z_0 - \delta)$: аналитичность PM_{11} следует из предложения 4.4, а a_1P — из явных формул. Следовательно, правая часть также аналитична; кроме того, правая часть является $O(\lambda^2)$ вне $\text{cl } S(\text{Im } z_1)$, откуда в силу принципа максимума модуля для периодических аналитических функций заключаем, что $f(z)P(z) = O(\lambda^2)$ выполняется во всей $S(\text{Im } z_0)$. Поделив теперь (4.3) на $P(z)$ и выполнив замену $z' = \frac{z}{h}$, приходим к формуле для коэффициента $(M_1)_{11}$ из теоремы 2. Выражения для остальных коэффициентов устанавливаются аналогично. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Wilkinson, *Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems*. — Proc. Roy. Soc. London Ser. A **391** (1984), 305–350.
2. J. P. Guillemin, B. Helffer, P. Treton, *Walk inside Hofstadter's butterfly*. — J. Phys. France **50** (1989), 2019–2058.
3. L. Pastur, A. Figotin, *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
4. H. L. Сузон, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger Operators: with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
5. Е. И. Динабург, Я. Г. Синай, *Об одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом*. — Функц. анализ и его приложения **9** (1975), 8–21.
6. J. Bellissard, R. Lima, D. Testard, *A metal-insulator transition for the almost Mathieu model*. — Comm. Math. Phys. **88** (1983), 207–234.
7. L. H. Eliasson, *Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation*. — Comm. Math. Phys. **146** (1992), 447–482.
8. A. Avila, S. Jitomirskaya, *Almost localization and almost reducibility*. — J. Eur. Math. Soc. **12** (2010), 93–131.
9. D. Damanik, M. Goldstein, *On the inverse spectral problem for the quasi-periodic Schrödinger equation*. — Publications Mathématiques de l'IHÉS, **119** (2014), 217–401.
10. B. Helffer, J. Sjostrand, *Analyse semi-classique pour l'équation de Harper*. — Mém. Soc. Math. France (nouv. série), **34** (1988), 1–113.
11. А. А. Федотов, *Метод монодромизации в теории почти-периодических уравнений*. — Алгебра и анализ **25** (2013), 203–235.
12. А. А. Федотов, *Матрица монодромии для уравнения почти-Маттье с малой константой связи*. — Функц. анализ и его прилож. **52** (2018), 89–93.
13. A. Fedotov, *A series of spectral gaps for the almost Mathieu operator with a small coupling constant*, arXiv:2012.03356 [math.SP].
14. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, Мир, Москва, 1982.

15. А. А. Федотов, *Монодромизация и разностные уравнения с мероморфными периодическими коэффициентами*. — Функци. анализ и его приложения **52** (2018), 92–97.
16. Sriram Ganeshan, J. H. Pixley, S. Das Sarma, *Nearest Neighbor Tight Binding Models with an Exact Mobility Edge in One Dimension*, Phys. Rev. Lett. **114** (2015), 146601.
17. В. С. Буслаев, А. А. Федотов, *Уравнение Хартера: монодромизация без квази-классики*. — Алгебра и анализ **8** (1996), 65–97.

Sedov K. S., Fedotov A. A. On monodromy matrices for a difference Schrödinger equation on the real line with a small periodic potential.

In this paper one considers a one-dimensional difference Schrödinger equation $\psi(z+h) + \psi(z-h) + \lambda v(z)\psi(z) = E\psi(z)$ with a periodic potential v . In the case when the potential is real analytic, as well as in the case when, in a neighborhood of \mathbb{R} , the potential has a finite number of simple poles per period, for small values of the coupling constant λ , we describe the asymptotics of a monodromy matrix.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН,
Международный математический институт
им. Л. Эйлера

E-mail: mister.kiriru@yandex.ru

Поступило 8 ноября 2021 г.

С.-Петербургский гос. университет,
Университетская наб. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия

E-mail: a.fedotov@spbu.ru