Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 506, 2021 г.

М. М. Попов

НОВАЯ КОНЦЕПЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ТИПА. ВОЛНЫ СОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

§1. Введение

Данная статья является продолжением работы [1] и посвящена изложению новой теории волн соскальзывания, распространяющихся вдоль гладкой, строго выпуклой поверхности Σ, вложенной в $\mathbb{R}^3$. Эти волны встречаются в приложениях, в частности, в задачах коротковолновой дифракции на телах с гладкой, строго выпуклой поверхностью, где они описывают волновые поля в затененной части поверхности ниже плоскости горизонта. Они возникают в цилиндрических скважинах геофизики, в которых геодезические линии образованы винтовыми линиями.

Процесс распространения поверхностных волн интерференционного типа вдоль поверхностей в трехмерном случае осложняется тем, что геодезические образуют каустики, и возникает проблема фокусировки волнового поля на них. Кроме того, геодезические линии обладают кручением и потому не лежат в одной плоскости. Предлагаемая теория возволяет преодолевать эти трудности трехмерных задач. При этом основные идеи теории для волн соскальзывания и волн шепчущей галереи остаются идентичными. Исходным пунктом является поток геодезичесвких на Σ, порождаемый рассматриваемой поверхностной волной. В окрестности каждой геодезической вводится локальная система координат. В ней строится асимптотическое решение уравнения Гельмгольца, сосредоточенное в окрестности геодезической, не имеющее сингулярностей на каустиках, через которые она проходит. Для различных типов поверхностных волн эти решения, разумеется, разные. Полное волновое поле поверхностной волны представляется суперпозицией, точнее интегралом, по сосредоточенным решениям. В этом пункте предлагаемый подход аналогичен известному методу суммирования гауссовых пучков.

Ключевые слова: поверхностные волны, коротковолновая асимптотика, волны соскальзывания, геодезические потоки.

§2. Локальная метрика в окрестности центральной геодезической

Поскольку поверхность Σ вложена в $\mathbb{R}^3$, каждая геодезическая на ней может рассматриваться, как гладкая кривая в трехмерном эвклидовом пространстве. Поток геодезических можно описать вектор-функцией $\vec{r}(s,\gamma)$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор в $\mathbb{R}^3$, s – длина дуги геодезической, γ – параметр, фиксирующий геодезическую в потоке.

В окрестности каждый геодезической вводится локальная риманова метрика следующим образом. В качестве репера берем три единичных вектора: $\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$ – вектор касательной, $\vec{n}(s)$ – вектор главной нормали, направленный в сторону выпуклой стороны Σ, где распространяется волна соскальзывания, и вектор бинормали $\vec{e}(s) = [\vec{t}(s), \vec{n}(s)]$. Аффинная связность описывается уравнениями Френе:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= K(s)\vec{n}, \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= -K(s)\vec{t} + T(s)\vec{e}, \\ \frac{d\vec{e}}{ds} &= -T(s)\vec{n}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $K(s)$ – кривизна геодезической, $K(s) \geq \mathrm{const} > 0$, $T(s)$ – кручение.

Локальные координаты s, q, n в окрестности этой геодезической вводятся формулой

$$\vec{R}(M) = \vec{r}(s) + q\vec{e}(s) + n\vec{n}(s), \tag{2}$$

так что её уравнение приобретает вид $q = 0$, $n = 0$ тождественно по s, (параметр γ опускаем далее для упрощения обозначений). Для метрического тензора g_{lm} получаем из (1), (2) следующее выражение

$$dS^2 = g_{lm} d\zeta^l d\zeta^m; \quad l, m = 1, 2, 3, \tag{3}$$

во вспомогательных переменных $\zeta^1 = s$, $\zeta^2 = q$, $\zeta^3 = n$,

$$g_{lm} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & 0 \\ g_{13} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Явные формулы для элементов тензора имеют вид

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= (1+nK)^2 + q^2T^2 + n^2T^2, \\ g_{12} &= nT, \\ g_{13} &= -qT, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

при этом $g = \det g_{lm} = (1+nK(s))^2$. Для контровариантного тензора G^{lm} получаем соответственно

$$G^{lm} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} 1 & -g_{12} & -g_{13} \\ -g_{12} & g_{11} - g_{13}^2 & g_{12}\cdot g_{13} \\ -g_{13} & g_{12}g_{13} & g_{11} - g_{12}^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Во вспомогательных переменных ζ^l, $l = 1, 2, 3$ уравнение Гельмгольца записывается в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \zeta^l}\left(G^{lm}\sqrt{g}\frac{\partial U}{\partial \zeta^m}\right) + k^2U = 0. \tag{7}$$

В дальнейшем волновое число k будет считаться большим параметром задачи.

§3. К постановке рассматриваемой задачи

Предполагается, что поле поверхностных волн удовлетворяет уравнению Гельмгольца (7) и краевому условию Дирихле на поверхности Σ. Все построения легко переносятся на краевое условие Неймана. Ближайшей целью является построение формального асимптотического (при $k \to \infty$) решения задачи, локализованного в окрестности геодезической $\vec{r}(s)$, т.е. экспоненциально убывающего при $|q| \to \infty$ при всех допустимых значениях длины дуги s. Последнее обстоятельство позволяет представить уравнение поверхности Σ вблизи $\vec{r}(s)$ в виде $n = \sigma(s,q)$, где $\sigma(s,q)$ гладкая функция своих аргументов. Действительно, всякое нормальное сечение Σ плоскостью, ортогональной вектору касательной $\vec{t}(s)$, представляет собой строго выпуклую, в сторону нормали $\vec{n}(s)$, кривую. В окрестности геодезической $\vec{r}(s)$ можно рассматривать $\sigma(s,q)$, как объединение нормальных сечений. В работе мы ограничимся построением трех первых членов асимптотики локализованных решений. Для этого достаточно взять лишь главный член разложения $\sigma(s,q)$ по степеням q.

Таким образом в наших построениях уравнение поверхности Σ вблизи $\vec{r}(s)$ берется в виде

$$n = \sigma(s, q) = -\frac{1}{2}\varkappa(s)q^2 + O(q^3), \tag{8}$$

в котором $\varkappa(s)$ есть кривизна нормального сечения Σ в точке $\vec{r}(s)$. При этом полагаем, что $\varkappa(s) \geq \text{const} > 0$ при всех допустимых s.

§4. Анзац для локализованных асимптотических решений

При построении анзаца используется элементы теории волн соскальзывания в двумерном случае, см. [2]. Сохраняются масштабные множители для координат s и n, а именно, предполагается, что $s = O(1)$, $k^{2/3}n = O(1)$ при $k \to \infty$. Масштабный множитель для трансверсальной координаты q берется такой же, как в случае шепчущей галереи, $k^{1/2}q = O(1)$. Масштабированные координаты ξ и ν в окрестности рассматриваемой геодезической $\vec{r}(s)$ вводятся следующими формулами

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \sqrt{k}q, \\ &\nu = \eta(s)k^{2/3}(n - \sigma(s, q)) \\ &n = \frac{\nu}{k^{2/3}\eta(s)} + \sigma(s, q), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

в которых функция $\eta(s)$ остается пока неопределенной. Краевое условие на решение ставится при $\nu = 0$ в соответствии с формулой (8). Быстро осциллирующий множитель сохраняется, как в двумерной задаче $\exp\{iks + ik^{1/3}h(s)\}$, где $h(s)$ также подлежит определению.

Окончательно анзац берется в следующем виде

$$U = \exp\{iks + ik^{1/3}h(s)\}V(s, \xi(q), \nu(n, s, \xi(q))). \tag{10}$$

Дальнейшие построения связаны с подстановкой формулы (10) в уравнение Гельмгольца (7) в координатах s, q, n и разложением полученного выражения по степеням $k^{-1/6}$.

Старшие порядки по волновому числу k будут возникать из вторых производных $\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^l \partial\zeta^m}$ и свободного члена k^2U. Для целей статьи достаточно рассмотреть только эти слагаемые, так как первые производные и т.д. будут вносить вклад в более далекие члены асимптотики искомых решений.

Как пример дальнейших вычислений, приведем вывод уравнения для главного члена асимптотики сосредоточенного решения. Рассмотрим следующее выражение $X = G^{11}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + k^2 U$, содержащее старшие степени большого параметра k. Подставив в X анзац (10) и выделив общий множитель $\lambda = g^{-1}\exp(iks + ik^{1/3}h(s))$ из производных второго порядка и свободного члена, получаем

$$X = \lambda\Big\{\Big[\big(-k^2 - 2k^{4/3}h'(s) - k^{2/3}\big(h'(s)\big)^2 + O(k^{1/3})\big)V \\ + \big(2ik + O(k^{1/3})\big)\frac{\partial V}{\partial s}\Big)\Big] + k^2(1 + nK(s))^2 V\Big\}. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что старшими членами являются те из них, что сдержат множителем $k^{4/3}$. Нетрудно убедиться, принимая во внимание формулу для элемента G^{33} тензора и масштабный множитель нормали n, что слагаемое $g^{33}\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$ дает член порядка $k^{4/3}$, т.е. $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$ следует добавить к равенству (11). Собирая слагаемые, имеющие порядок $k^{4/3}$, получаем оператор $\widehat{L}_0$ для главного члена асимптотики локализованного решения

$$\widehat{L}_0 V = \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} - 2h'(s)k^{4/3}V + k^2 2nK(s)V. \qquad (12)$$

В переменных ν, ξ и с учетом равенства (8) формула (12) принимает вид

$$\widehat{L}_0 V = k^{4/3}\left\{\eta^2(s)\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} - 2h'(s)V + 2\eta^{-1}(s)K(s)\nu\right\} \\ - k\varkappa(s)K(s)\xi^2. \qquad (13)$$

Здесь последний член следует отнести к уравнению для третьего члена асимптотики искомого решения. Наконец, подберем неопределенные функции $\eta(s)$ и $h(s)$ так, чтобы в фигурных скобках в правой части (13) получился оператор Эйри $L_0 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} - (\zeta - \nu)V$. Для этого положим $\eta(s) = (2(K(s))^{1/3}$ и $h(s) = \frac{1}{2}\zeta\int\limits_0^s \eta^2(s)\,ds$, где постоянный множитель ζ будет определяться из краевых условий на Σ. Завершение вычислений с оставшимися вторыми производными приводит к асимптотическому представлению оператора Гельмгольца в погранслое волн соскальзывания

$$k^{4/3}\eta^2(s)\left\{L_0 + k^{-1/6}\frac{1}{\eta^2(s)}L_1 + k^{-1/3}\frac{1}{\eta^2(s)}L_2 + \dots\right\}. \qquad (14)$$

Операторы L_1 и L_2 имеют вид:

$$L_1 = 2i\eta(s)\xi T(s)\frac{\partial}{\partial\nu},$$
$$L_2 = 2i\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \varkappa(s)K(s)\xi^2. \qquad (15)$$

Напомним, что производные $\frac{\partial}{\partial s}$ и $\frac{\partial}{\partial q}$ в уравнении Гельмгольца в применению к функции V анзаца (10) следует рассматривать как полные производные $\frac{d}{ds}$ и $\frac{d}{dq}$, так что, например,

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{d\nu}\frac{\partial\nu}{\partial s}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial\nu}{\partial s} = \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\nu + O(k^{-4/3}).$$

§5. Рекуррентная цепочка уравнений

Искомое решение, сосредоточенное в окрестности геодезической $\vec{r}(s)$, строим в виде асимптотического ряда

$$V = V_0 + k^{-1/6}V_1 + k^{-1/3}V_2 + \ldots \qquad (16)$$

Подстановка равенства (16) в (14) приводит к следующей цепочке уравнений

$$L_0V_0 = 0,$$
$$L_0V_1 + \frac{1}{\eta^2(s)}L_1V_0 = 0,$$
$$L_0V_2 + \frac{1}{\eta^2(s)}L_1V_1 + \frac{1}{\eta^2(s)}L_2V_0 = 0, .. \qquad (17)$$

Отметим, что первые два из них являются обыкновенными дифференциальными уравнениями по переменной ν.

Система (17) обладает особенностью, что все уравнения, начиная со второго, являются неоднородными, тогда как однородное уравнение имеет не нулевое решение, т.е. вообще говоря, она несовместна. Условие разрешимости требует ортогональности неоднородного члена к решению однородного уравнения. Техника решений таких рекуррентных систем для поверхностных волн разработана в монографии [2] в двумерном случае, и мы ею воспользуемся далее.

Решение однородного уравнения в (17) берется в виде

$$V_0 = \alpha(s)\Psi(s,\xi)w_1(\zeta_p - \nu). \qquad (18)$$

Здесь $w_1(\zeta_p - \nu)$ комплекснозначная функция Эйри в определении В. А. Фока (см. [3] и, например, приложение в [4]), ζ_p – корень этой функции с номером p, так что V_0 удовлетворяет условию Дирихле при $\nu = 0$. Не зависящие от ν функции $\alpha(s)$, $\Psi(s, \xi)$ представляют произвольный постоянный множитель.

Выбор функции $w_1(t)$ обусловлен тем, что она описывает волну, уходящую от поверхности Σ в направлении нормали. Для нее выполняется также принцип предельного поглощения. Действительно, обратимся к асимптотике $w_1(-t)$ при $t \to \infty$

$$w_1(-t) = t^{-1/4} \exp\left\{i\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}\left(1 + O(t^{3/2})\right), \qquad (19)$$

см., например, приложение в [4].

В нашем случае $t = \nu\left(1 - \frac{\zeta_p}{\nu}\right) \simeq \nu$ при больших ν, и показатель степени экспоненты в формуле (19) соответствует волне, берущей в направлении нормали $\vec{n}$, так как $\eta(s) > 0$.

В случае принципа предельного поглощения предполагается, что волновое число k имеет малую положительную мнимую часть $k = k_1 + i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, (см. также главу 10 в [4]). Тогда, учитывая равенства (8), (9), для нормали ν и аргумента t в формуле (19) получаем выражение

$$it^{3/2} \simeq i\nu^{3/2} = i\eta^{3/2}k_1 - \varepsilon\eta^{3/2}n^{3/2}, \qquad (20)$$

обеспечивающее экспоненциальное затухание $w_1(\zeta_p - \nu)$ при удалении по нормали $\vec{n}$ от поверхности Σ. Это обстоятельство существенно используется для решения неоднородных уравнений в рекуррентной системе (17).

§6. Решение неоднородных уравнений в системе (17)

Преобразуем уравнение для V_1 следующим образом. Обозначим через C_1 множитель, не зависящий от ν и коммутирующий с операторами L_0 и L_1 в (17). Искомое решение V_1 ищем в виде $V_1 = C_1\widetilde{V}_1$, где $C_1 = -2i\alpha(s)\Psi(s,\xi)\eta^{-1}\xi T(s)$. Для $\widetilde{V}_1(\nu, \zeta_p)$ получаем уравнение

$$L_0\widetilde{V}_1(\nu, \zeta_p) = \frac{\partial}{\partial\nu}w_1(\zeta_p - \nu), \qquad (21)$$

которое оказывается разрешимым. Решением является функция $V_1 = \frac{1}{2}\nu w_1(\zeta_p - \nu)$, что проверяется непосредственной подстановкой в (21).

Функции $\alpha(s)$ и $\Psi(s,\xi)$ на этом шаге остаются неопределенными. Явная формула для второго члена $V_1(s,\xi,\nu)$ асимптотики приобретает вид

$$V_1 = -i\alpha(s)\Psi(s,\xi)\eta^{-1}(s)\xi T(s)\nu w_1(\zeta_p-\nu). \tag{22}$$

Условие разрешимости уравнения (21) устанавливается в рамках принципа предельного поглощения следующим образом. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^N d\nu w_1(\zeta_p-\nu)\frac{\partial}{\partial\nu}w_1(\zeta_p-\nu)-\frac{1}{2}w_1^2(\zeta_p-N), \tag{23}$$

и положим, что волновое число имеет мнимую добавку $k=k_1+i\varepsilon$, $0<\varepsilon\ll 1$. Тогда, см. (20), у $w_1(\zeta_p-\nu)$ появляется экспоненциальное затухание, и $\lim\limits_{N\to+\infty} w_1^2(\zeta_p-N)=0$. Отсюда делается заключение о выполнении условия разрешимости неоднородного уравнения и при $\varepsilon=0$.

Обратимся далее к третьему уравнению системы (17) для функции V_2. Из равенств (15), (18), (22) получаем последовательно

$$\left.\begin{aligned} L_1V_1 &= 2\alpha(s)\Psi(s,\xi)\xi^2T^2_{(s)}\frac{\partial}{\partial\nu}[\nu w_1(\zeta_p-\nu)],\\ L_2V_0 &= w_1(\zeta_p-\nu)(2i\alpha'(s)\Psi(s,\xi)+\alpha(s)[2i\frac{\partial\Psi}{\partial s}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}-\varkappa(s)K(s)\xi^2\Psi])\\ &\quad+2i\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\alpha(s)\Psi(s,\xi)\nu\frac{\partial}{\partial\nu}w_1(\zeta_p-\nu). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Условие разрешимости рассматриваемого неоднородного уравнения требует обращение в нуль следующего интеграла J

$$J=\int\limits_0^\infty d\nu(L_1V_1+L_2V_0)w_1(\zeta_p-\nu). \tag{25}$$

Для вычисления J воспользуемся вспомогательными формулами

$$I_1 = \int\limits_0^\infty d\nu w_1(\zeta_p - \nu)\frac{\partial}{\partial\nu}[\nu w_1(\zeta_p - \nu)] = -\frac{1}{2}(w_1'(\zeta_p))^2,$$

$$I_2 = \int\limits_0^\infty d\nu w_1(\zeta_p - \nu)[\nu\frac{\partial}{\partial\nu}w_1(\zeta_p - \nu)] = \frac{1}{2}(w_1'(\zeta_p))^2,$$

$$I_3 = \int\limits_0^\infty d\nu w_1^2(\zeta_p - \nu) = -(w_1'(\zeta_p)^2. \tag{26}$$

Отметим, что интегралы (26) вычисляются интегрированием по частям. При этом используется то, что w_1есть решение уравнения Эйри, ζ_p ее корень, а также, естественно, принцип предельного поглощения.

Равенства (24) и (26) приводят к следующему выражению для интеграла J

$$J = (w_1'(\zeta_p))^2\Psi(s,\xi)\left(i\alpha\frac{\eta'(s)}{\eta(s)} - 2i\alpha'(s)\right)$$
$$- (w_1'(\zeta_p))^2\alpha(s)\left[2i\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - \left(\varkappa(s)K_{(s)} - T^2_{(s)}\right)\xi^2\Psi\right], \tag{27}$$

из которого получаем условия разрешимости неоднородного уравнения для V_2, накладываемые на функцию $\alpha(s)$:

$$\frac{\alpha}{\eta}\frac{d\eta}{ds} - 2\frac{d\alpha}{ds} = 0, \quad \alpha(s) = \sqrt{\eta(s)}, \tag{28}$$

и на $\Psi(s,\xi)$:

$$2i\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - (\varkappa_{(s)}K(s) - T^2(s))\xi^2\Psi. \tag{29}$$

Условия (28), (29) в точности совпадают с теми, котрые имеют место для волн шепчущей галереи. Последние подробно излагались и использовались в работе автора [1]. Уравнение типа Шредингера (29) имеет экспоненциально убывающее при $|\xi| \to \infty$ решение, обеспечивающее локализацию асимптотического решения в окрестности центральной геодезической $\vec{r}(s)$. Оно описывается формулой

$$\Psi(s,\xi) = \frac{\text{const}}{\sqrt{Q(s)}}\exp\left(i\frac{1}{2}\frac{P(s)}{Q(s)}\xi^2\right). \tag{30}$$

Комплекснозначные фнукции $Q(s)$ и $P(s)$ являются решениями системы уравнений в вариациях

$$\frac{d}{ds}Q(s) = P(s), \quad \frac{d}{ds}P(s) = (-\varkappa(s)K(s) + T^2_{(s)})Q(s),$$

для функционала Ферма на поверхности Σ. Они обе не обращаются в нуль при всех допустимых значениях s, так что $\Psi(s,\xi)$ не имеет сингулярностей и $\mathrm{Im} P/Q \geq \mathrm{const} > 0$.

Таким образом, построенные два члена V_0 и V_1 асимптотического разложения (16) не имеют сингулярностей на каустиках геодезических кривых на Σ и сосредоточены в окрестности центральной геодезической.

В заключение этого параграфа приведем решение третьего уравнения рекуррентной системы (17) для V_2. Подставляя условия разрешимости (28), (29) в формулы (24), получаем для неоднородного члена

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\eta^2(s)}(L_1V_1 + L_2V_0) = \frac{-\alpha(s)\Psi(s,\xi)}{\eta^2(s)}\left(\xi^2 T^2_{(s)} + i\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\right) \\ &\cdot \{w_1(\zeta_p - \nu) - 2\nu w_1'(\zeta_p - \nu)\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Полагаем далее $V_2 = C_2\widetilde{V}_2$, где C_2 не зависящий от ν множитель в правой части равенства (31). Для $\widetilde{V}_2$ получаем уравнение

$$L_0\widetilde{V}_2 \simeq w_1(\zeta_p - \nu) - 2\nu w_1'(\zeta_p - \nu),$$

решением которого является $\widetilde{V}_2 = \frac{1}{2}\nu^2 w_1(\zeta_p - \nu)$.

В явной форме решение третьего уравнения имеет вид

$$V_2 = -\frac{1}{\eta^2_{(s)}}\alpha(s)\Psi(s,\xi)\left[\xi^2 T^2_{(s)} + i\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\right]\frac{\nu^2}{2}w_1(\zeta_p - \nu). \tag{32}$$

Оно удовлетворяет условию Дирихле при $\nu = 0$ и не имеет сингулярностей, если $K(s)$ и $\varkappa(s)$ не обращаются в нуль.

Однако, формулой (32) не завершается построение третьего члена асимптотики в разложении (16). Она должна использоваться при выводе условия разрешимости следующего, четвертого уравнения рекуррентной системы (17) подобно тому, как это описано при построении второго члена асимптотики, см. также [2].

Эта процедура приводит к громоздким вычислениям, и мы ее опускаем.

§7. Глобальная асимптотика волны соскальзывания

Приведем формулу для локализованного решения $U^{(2)}$, содержащему два члена асимптотики, в явном виде:

$$U^{(2)} = \exp\left\{iks + ik^{1/3}\frac{1}{2}\zeta_p \int\limits_0^s \eta^2(s)\,ds\right\}\left[V_0 + k^{-1/6}V_1 + O(k^{-1/3})\right], \tag{33}$$

в которой $\eta(s) = (2K_{(s)})^{1/3}$, а V_0 и V_1 имеют вид

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= \alpha(s)\Psi(s,\xi)w_1(\zeta_p - \nu),\\ V_1 &= -i\alpha(s)\Psi(s,\xi)\eta^{-1}(s)\xi T(s)\nu w_1(\zeta_p - \nu),\\ \alpha(s) = \sqrt{\eta(s)},\ \Psi(s,\xi) &= \frac{\text{const}}{\sqrt{Q(s)}}\exp\left(\frac{i}{2}\frac{P(s)}{Q(s)}\xi^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Главное отличие формул от случая шепчущей галереи в том, что с ростом длины дуги s $U^{(2)}$ экспоненциально затухает, так как корни ζ_p функции w_1 комплексны и $\arg\zeta_p = \frac{\pi}{3}$. Напомним также, что локализованные решения для обоих типов волн становятся сингулярными в точках распрямления геодезических, где кривизна $K(s)$ обращается в нуль. Там поверхностные волны разрушаются.

Для построения глобальной на Σ асимптотики поверхностной волны поступаем следующим образом. Локализованные решения (33), (34) строятся для каждой геодезической из потока $\vec{r}(s,\gamma)$ в своих локальных координатах s, ξ, ν. В результате все функции в формулах (33), (34) приобретают зависимость от параметра γ, $U^{(2)} = U^{(2)}(s,\xi,\nu;\gamma)$. Глобальная асимптотика $W^{(2)}$ волны описывается суперпозицией, точнее интегралом по γ, этих решений

$$W^{(2)} = \int d\gamma U^{(2)}(s,\xi,\nu;\gamma). \tag{35}$$

Интеграл $W^{(2)}$ не имеет сингулярностей на каустиках геодезических. Алгоритм расчета волнового поля, основанный на представлении (35), не зависит от положения точки наблюдения и включает те же шаги, что и в случае шепчущей галереи, см. [1].

§8. Заключение

Для завершения построения интегральной асимптотики (35) волны соскальзывания необходимо согласовать интеграл $W^{(2)}$ с волновым полем источника, порождающим поверхностную волну. Эта процедура зависит от конкретного вида источника и представляет самостоятельную задачу.

Процесс согласования осуществляется в области регулярности потока геодезических путем склеивания асимптотик при $k \to \infty$ интеграла по локализованным решениям и волнового поля источника. В работе (5) вычислена асимптотика интеграла по сосредоточенным решениям для волн шепчущей галереи. Она оказывается справедливой и для волн соскальзывания ввиду фактической идентичности асимптотических формул. Действительно, сравнивая формулы (33) и (34) с соответствующими формулами (5)–(7) из параграфа 2 статьи [5], видим, что отличие состоит в следующем: вместо функции Эйри v для волн соскальзывания стоит w_1 и изменяется знак в коэффициенте при $k^{1/3}$ в показателе экспоненты. Они, однако, не влияют на вычисление асимптотики интегралов при $k \to \infty$, подробно изложенных в работе [5]. Поэтому, буквально повторяя выкладки из этой работы, мы приходим к следующему результату для интеграла (35) в области регулярности потока геодезических

$$W^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\alpha(s_*)}{\sqrt{M(s_*)}} \exp\left\{ iks_* + ik^{1/3}\frac{\zeta_p}{2}\int\limits_0^{s_*} \eta^2(s)ds \right\} w_1(\zeta_p - \nu) + O(k^{-1/3}). \tag{36}$$

Напомним, что это выражение для волнового поля соответствует геодезической $\gamma = \gamma_*$, в точности попадающей в точку наблюдения на ней при $s = s_*$ (стационарная точка интеграла (35)). Здесь $M(s)$ означает геометрическое расходение на геодезической $\gamma = \gamma_*$ и ζ_p – есть корень функции w_1.

Таким образом, в области регулярности на Σ геодезического потока поле волн соскальзывания можно вычислять по более простой формуле (36) вместо интеграла по локализованным решениям (35).

Список литературы

1. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа для гладких строго выпуклых поверхностей, вложенных в* $\mathbb{R}^3$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 301–313.
2. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* — Изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1974.
3. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* — Изд-во Советское радио, М., 1970.
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* — Наука, М., 1972.
5. М. М. Попов, *О согласовании интегральной асимптотики поверхностных волн интерференционного типа с волновым полем их источника.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 314–322.

Popov M. M. New concept of surface waves of interference nature. Creeping waves.

The new concept of surface waves of interference nature is described in detail for the case of creeping waves propagating along a smooth strictly concave surface embedded in 3D Euclidean space. In a numerous articles devoted to surface waves of whispering gallery and creeping waves it is assumed that they propagate along boundaries formed by a smooth plane curves. However, the process of surface waves propagation along smooth surfaces is mush more complicated then along plane curves. Indeed, the surface waves slide along geodesic lines on the surface where they normally form numerous caustics and that, in turn, gives rise to singularity of the wave field asymptotics. Besides, the geodesic lines itself are not plane curves in 3D and therefore their torsion has to be taken into account. Our approach enables resolving both these peculiar problems of waves propagation along smooth surfaces imbedded in R^3. It is based on consideration of geodesic flow on the surface which is associated with the surface wave generated by a source. For each geodesic line we construct an asymptotic solution of the Helmholtz equation localized in a tube vicinity of the geodesic line and having no singularities on caustics. The surface wave under consideration is then presented as a superposition (integral) of the localized solutions.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
192288, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 8 апреля 2021 г.