

С. А. Назаров, К. М. Руотсалайнен, П. Й. Ууситало

**КОЭФФИЦИЕНТЫ РАССЕЯНИЯ И ПОРОГОВЫЕ
РЕЗОНАНСЫ В ВОЛНОВОДЕ ПРИ РАВНОМЕРНОМ
РАСТЯЖЕНИИ РЕЗОНАТОРА**

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка задачи. Пусть $\Pi = \omega \times (0, +\infty) \ni (y, z) = x$ – полу-бесконечный цилиндр (далее полуцилиндр) с ограниченным сечением $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ и Θ – область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d с размерностью $d \geq 2$ (см. рис. 1,а и б). Считаем, что границы $\partial\omega$, $\partial\Theta$ гладкие, замыкания $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, $\bar{\Theta} = \Theta \cup \partial\Theta$ компактные, а область Θ звезда относительно начала \mathcal{O} декартовых координат $x = (x_1, \dots, x_d)$ и отрезок, отсекаемый поверхностью $\partial\Theta$ от положительной полуоси x_1 , имеет длину $\ell_0 > 0$; при этом $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$ и $z = x_d$. При $R > R_b$ положим

$$\Omega^R = \Pi \cup \Theta_R, \quad \Theta_R = \{x : R^{-1}x \in \Theta\} \quad (1.1)$$

(см. рис. 1,с), а величину $R_b > 0$ выберем так, чтобы торец $\omega(0) = \omega \times \{0\}$ полуцилиндра Π содержался внутри Θ_{R_b} . При необходимости увеличим R_b так, чтобы ребро $\Gamma_R = \partial\Theta_R \cap \partial\Pi$ стало объединением компактных многообразий без края размерностью $d - 2$ (точки при $d = 2$ и простые гладкие замкнутые контуры при $d = 3$). На Γ_R введем атлас локальных систем координат, обозначаемых далее $\varsigma = (\varsigma_1, \dots, \varsigma_{d-2})$.

Интерпретируя области (1.1) как волновод и резонатор, рассмотрим спектральную задачу Дирихле

$$-\Delta u^R(x) = \lambda u^R(x), \quad x \in \Omega^R, \quad (1.2)$$

$$u^R(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^R \setminus \Gamma_R. \quad (1.3)$$

При этом Δ – оператор Лапласа, а λ – спектральный параметр. На ребре Γ_R производные решения задачи (1.2), (1.3) могут приобретать

Ключевые слова: задача Дирихле для оператора Гельмгольца, волновод, резонатор, дискретный спектр, пороговый коэффициент рассеяния, пороговый резонанс.

сингулярности (см. п. 1, §4), и поэтому одновременно имеем дело с вариационной задачей [1]

$$(\nabla u^R, \nabla \psi^R)_{\Omega^R} = \lambda (u^R, \psi^R)_{\Omega^R} \quad \forall \psi^R \in H_0^1(\Omega^R), \quad (1.4)$$

где $\nabla = \text{grad}$, $(\cdot, \cdot)_{\Omega^R}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^R)$, а $H_0^1(\Omega^R)$ – пространство Соболева функций, удовлетворяющих условию Дирихле (1.3). Поскольку левая часть интегрального тождества (1.4) – билинейная форма, симметричная, положительно определенная и замкнутая в пространстве $H_0^1(\Omega^R)$, задаче (1.4) или (1.2), (1.3) ставится [2, гл. 10] в соответствие положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор A^R в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega^R)$.

1.2. Спектр и пороговые резонансы. Непрерывный спектр $\sigma_c^R = [\lambda_\dagger, +\infty)$ оператора A^R не зависит от параметра R и имеет положительную точку отсечки $\lambda_\dagger = \Lambda_1$ – первое собственное число задачи Дирихле на сечении полуцилиндра

$$-\Delta_y U(y) = \Lambda U(y), \quad y \in \omega, \quad (1.5)$$

$$U(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \quad (1.6)$$

Ниже этой точки располагается (может быть, пустой) дискретный спектр

$$\sigma_d^R = \left\{ \lambda_1^R, \dots, \lambda_{\#\sigma_d^R}^R \right\} \subset (0, \lambda_\dagger). \quad (1.7)$$

Известно (см. оригинальную статью [3] и далее п. 1, §2), что кратность $\#\sigma_d^R$ дискретного спектра неограниченно возрастает при раздутии резонатора, т.е. при $R \rightarrow +\infty$. Таким образом, найдется неограниченная монотонная последовательность чисел

$$R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_m \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (1.8)$$

для которой у задачи (1.2), (1.3) на пороге $\lambda = \lambda_\dagger$

$$-\Delta v^R(x) = \lambda_\dagger v^R(x), \quad x \in \Omega^R, \quad (1.9)$$

$$v^R(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^R \setminus \Gamma_R, \quad (1.10)$$

в области Ω^R при $R = R_k$, $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, возникает пороговый резонанс (см. публикации [4, 5] и др.), т.е. имеется (вещественное) ограниченное решение, принимающее вид

$$v^R(x) = \tilde{v}^R(x) + \chi_R(z) K_R U_1(y). \quad (1.11)$$

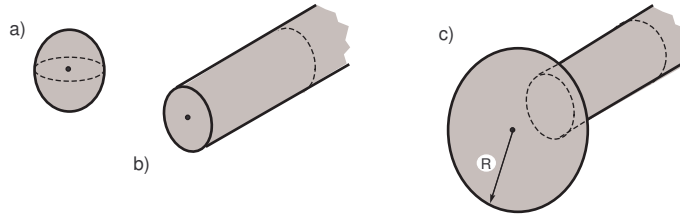


Рис. 1. Множество Θ (а), полуцилиндр Π (б) и волновод Ω^R (с).

Здесь $K_R \in \mathbb{R}$ – коэффициент, U_1 – первая (отвечающая Λ_1) нормированная в $L^2(\omega)$ собственная функция задачи (1.5), (1.6), $\tilde{v}^R \in H_0^1(\Omega^R)$ – экспоненциально затухающий при $z \rightarrow +\infty$ остаток,

$$\chi_R(z) = \chi(z - R\ell_0), \quad (1.12)$$

а $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция,

$$\chi(z) = 0 \text{ при } z \leq 1, \quad \chi(z) = 1 \text{ при } z \geq 2. \quad (1.13)$$

Если $K_R \neq 0$, то функция (1.11) стабилизируется на бесконечности и называется почти стоячей волной. При $K_R = 0$ она становится захваченной волной, т.е. истинной собственной функцией оператора A^R , а λ_\dagger – его собственным числом; иными словами, порог λ_\dagger попадает в точечный спектр σ_p^R оператора A^R .

При наличии на пороге почти стоячей волны пороговый резонанс называется правильным [5]. Правильные пороговые резонансы провоцируют разнообразные околупороговые аномалии – описание некоторых из них можно найти, например, в статьях [5–8]. Известны достаточные условия [9, 10] отсутствия пороговых резонансов, а также два критерия [11] их наличия, причем один из них способен различать какой из волн, почти стоячей или захваченной, порожден резонанс.

Необходимость выяснения качества порогового резонанса обусловлена, например, разным влиянием почти стоячих и захваченных волн на одномерную модель решетки тонких квантовых волноводов (подробности см. в статье [9], а также во вводной части статьи [11]). Рассмотренная в данной работе задача (1.2), (1.3) относится к анализу явления пограничного слоя в краевых узлах решетки, из которых выходит лишь один тонкий цилиндрический квантовый волновод (ср.

рис. 1, с). Если пороговый резонанс отсутствует, то одномерная модель, включающая обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на отрезке $(0, L) \ni z$, где $L > 0$ – длина тонкого цилиндра, содержит условие Дирихле в его концевой точке $z = 0$. При появлении правильного порогового резонанса условие Дирихле заменяется условием Неймана, однако, если пороговый резонанс порожден только захваченными волнами, то условие Дирихле сохраняется, но в спектре тонкой решетки появляются собственные числа, которые не описываются одномерной моделью, а соответствующие собственные функции сугубо локализованы в малой окрестности краевого узла. В данной работе показано, что в задаче (1.9), (1.10) возникают пороговые резонансы обоих типов.

1.3. Структура статьи. В §2 собраны в целом известные факты, в частности, даны краткие комментарии к утверждениям, упомянутым ранее в §1: приведены примеры пороговых резонансов, порожденных захваченными волнами, найдены скорости приближения собственных чисел (1.7) к нулю при $R \rightarrow +\infty$, а также сформулирован критерий (теорема 2.1) возникновения правильного пороговых резонансов, оперирующий пороговым коэффициентом рассеяния $s(R)$.

Формальный асимптотический анализ проведен в §3. Построена асимптотика коэффициента рассеяния при приращении параметра R и проверено (теорема 3.2), что при возрастании R точка $s(R)$ движется по часовой стрелке без остановок вдоль единичной окружности на комплексной плоскости и тем самым, пересекая точку -1 , идентифицирует правильный пороговый резонанс. В конце параграфа сформулированы открытые вопросы.

Оправданию найденных асимптотических формул посвящен §4. Сначала изучены сингулярности производных решения v^R задачи (1.9), (1.10), которые позволяют придать смысл построенным в §3 поправочным асимптотическим слагаемым. Затем при интерпретации малого раздутья резонатора Θ_R как регулярного или сингулярного возмущения области Ω^R обсуждаются два подхода к оценке асимптотических остатков. При помощи техники весовых пространств с отдельной асимптотикой выведены асимптотически точные оценки остатков в представлении порогового коэффициента рассеяния (см. теорему 3.2 и вычисления в п. 3, §4). Наконец, даны пояснения в рамках методов составных и сращиваемых асимптотических разложений (ср.

монографии [12] и [13]) к построению пограничных слоев около перемещающегося вдоль цилиндрической поверхности $\partial\Pi$ ребра Γ_R при вариации параметра R , а также найдена асимптотика собственных чисел (1.7) при $R \rightarrow +\infty$, оправданная при помощи обычных вариационных методов спектрального анализа и не требующая предположения о звездности резонатора.

§2. ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

2.1. Рост кратности дискретного спектра. Рассмотрим вспомогательную задачу на резонаторе

$$-\Delta\Phi^R(x) = M^R\Phi^R(x), \quad x \in \Theta_R, \quad (2.1)$$

$$\Phi^R(x) = 0, \quad x \in \partial\Theta_R, \quad (2.2)$$

Ее собственные числа

$$0 < M_1^R < M_2^R \leq M_3^R \leq \dots \leq M_m^R \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (2.3)$$

принимают вид

$$M_m^R = R^{-2}M_m^1, \quad (2.4)$$

где M_m^1 – собственные числа той же задачи (2.1), (2.2) при $R = 1$, т.е. в исходной области Θ . Соответствующие собственные функции $\Phi_1^1, \Phi_2^1, \dots, \Phi_m^1, \dots \in H_0^1(\Theta)$ подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(\Phi_j^1, \Phi_k^1)_\Theta = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера.

Собственные числа из дискретного спектра оператора A^R можно найти при помощи максиминимального принципа

$$\lambda_m^R = \max_{\mathcal{E}_m^R} \inf_{v^R \in \mathcal{E}_m^R \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla v^R; L^2(\Omega^R)\|^2}{\|v^R; L^2(\Omega^R)\|^2}, \quad (2.6)$$

где \mathcal{E}_m^R – любое подпространство в $H_0^1(\Omega^R)$ с коразмерностью $m - 1$, в частности, $\mathcal{E}_1^R = H_0^1(\Omega^R)$. Именно, теорема 10.2.2 [2] утверждает, что, если величина из правой части (2.6) попадает на интервал $(0, \lambda_\dagger)$, то она – собственное число оператора A^R и выполнено неравенство $\#\sigma_d^R \geq m$.

Пусть \mathcal{L}_m^R – линейная оболочка функций

$$\Theta_R \ni x \mapsto \Phi_m^R(x) = R^{-d/2}\Phi_m^R(R^{-1}x), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.7)$$

продолженных нулем с резонатора на весь волновод. Поскольку согласно формулам (2.5) они ортонормированы в пространстве $L^2(\Omega^R)$, то $\dim \mathcal{L}_m^R = m$ и любое подпространство \mathcal{E}_m^R из принципа (2.6) содержит нетривиальную линейную комбинацию $v^{\mathcal{E}_m^R}$ функций (2.7),

$$v^{\mathcal{E}_m^R}(x) = \sum_{k=1}^m c_k^{\mathcal{E}_m^R} \Phi_k^R(x), \quad \sum_{k=1}^m |c_k^{\mathcal{E}_m^R}|^2 = 1.$$

В результате находим, что

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{E}_m^R} \inf_{v^R \in \mathcal{E}_m^R \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla v^R; L^2(\Omega^R)\|^2}{\|v^R; L^2(\Omega^R)\|^2} &\leq \max_{\mathcal{E}_m^R} \frac{\|\nabla v^{\mathcal{E}_m^R}; L^2(\Omega^R)\|^2}{\|v^{\mathcal{E}_m^R}; L^2(\Omega^R)\|^2} \\ &= \frac{1}{R^2} \max_{\mathcal{E}_m^R} \frac{\sum_{k=1}^m M_k^1 |c_k^{\mathcal{E}_m^R}|^2}{\sum_{k=1}^m |c_k^{\mathcal{E}_m^R}|^2} \leq \frac{1}{R^2} M_m^1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Итак, при

$$R > \mathbf{R}_m := \lambda_{\dagger}^{-1/2} \sqrt{M_m^1} \quad (2.9)$$

величина (2.6) в самом деле расположена ниже порога λ_{\dagger} и $\#\sigma_d^R \geq m$. Именно в этом и нужно было убедиться.

Далее в п. 4, §4 будет показано, что оценка (2.8) точна.

2.2. Зависимость собственных чисел от параметра R . Сравним собственные числа $\lambda_m^R \in \sigma_d^R$ и $\lambda_m^{R+\varepsilon} \in \sigma_d^{R+\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$, т.е. в случае возрастания параметра R . Прежде всего применим максиминимальный принцип (2.6) для собственного числа $\lambda_m^{R+\varepsilon}$, а в качестве m -мерного подпространства $\mathcal{L}_m^{R+\varepsilon}$ возьмем линейную оболочку собственных функций $u_1^R, \dots, u_m^R \in H_0^1(\Omega^R)$ задачи (1.2), (1.3), отвечающих собственным числам из дискретного спектра (1.7), продолженных нулем с Ω^R на $\Omega^{R+\varepsilon} \supset \Omega^R$ и подчиненных условиям ортогональности и нормировки

$$(u_j^R, u_k^R)_{\Omega^R} = \delta_{j,k}. \quad (2.10)$$

Повторив с понятными изменениями выкладку (2.8), получим, что

$$\lambda_m^{R+\varepsilon} \leq \lambda_m^R, \quad m = 1, \dots, \#\sigma_d^R, \quad (2.11)$$

и, в частности, $\#\sigma_d^{R+\varepsilon} \geq \#\sigma_d^R$.

Предположим теперь, что сечение $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ – звездная область относительно начала координат $y = 0$, а значит, в дополнение к равенству $\Theta^R = \{x : (R + \varepsilon)R^{-1}x \in \Theta^{R+\varepsilon}\}$ справедливы включения

$$\{x : (R + \varepsilon)R^{-1}x \in \Pi\} \subset \Pi \text{ и } \widehat{\Omega}^R = \{x : (R + \varepsilon)R^{-1}x \in \Omega^R\} \subset \Omega^R.$$

Теперь в максиминимальном принципе (2.6) в качестве \mathcal{L}_m^R возьмем линейную оболочку функций

$$x \mapsto \mathbf{u}_j^{R,\varepsilon}(x) = u_j^{R+\varepsilon}((R + \varepsilon)R^{-1}x), \quad j = 1, \dots, m,$$

продолженных нулем с $\widehat{\Omega}^R$ на Ω^R . В заведомо непустом пересечении $\mathcal{E}_m^R \cap \mathcal{L}_m^R$ найдется линейная комбинация

$$\mathbf{v}^{\mathcal{E}_m^R}(x) = \sum_{k=1}^m c_k^{\mathcal{E}_m^R} \mathbf{u}_k^{R,\varepsilon}, \quad \sum_{k=1}^m |c_k^{\mathcal{E}_m^R}| = 1.$$

Благодаря условиям ортогональности и нормировки (2.10) с заменой $R \mapsto R + \varepsilon$ находим, что

$$\begin{aligned} \lambda_m^R &\leq \max_{\mathcal{E}_m^R} \frac{\|\nabla \mathbf{v}^{\mathcal{E}_m^R}; L^2(\Omega^R)\|^2}{\|\mathbf{v}^{\mathcal{E}_m^R}; L^2(\Omega^R)\|^2} \\ &= \frac{(R + \varepsilon)^2}{R^2} \max_{\mathcal{E}_m^R} \frac{\sum_{k=1}^m \lambda_k^{R+\varepsilon} |c_k^{\mathcal{E}_m^R}|^2}{\sum_{k=1}^m |c_k^{\mathcal{E}_m^R}|^2} \leq \frac{(R + \varepsilon)^2}{R^2} \lambda_m^{R+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Сформулируем результат, обеспеченный формулами (2.11) и (2.12).

Предложение 2.1. *Собственные числа из дискретных спектров σ_d^R и $\sigma_d^{R+\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$ связаны неравенствами*

$$\lambda_k^R \geq \lambda_k^{R+\varepsilon} \geq \frac{R^2}{(R + \varepsilon)^2} \lambda_k^R, \quad k = 1, \dots, \#\sigma_d^R, \quad (2.13)$$

причем правое неравенство (2.13) выполнено при условии звездности сечения ω относительно начала координат $y = 0$ (ср. п. 4, §3).

Из формул (2.8) и (2.13) вытекает, что функция

$$(\mathbf{R}_m, +\infty) \ni R \mapsto \lambda_m^R \quad (2.14)$$

строго монотонно убывающая и бесконечно малая при $R \rightarrow +\infty$. Число \mathbf{R}_m указано в формуле (2.9). Общие результаты теории возмущений линейных операторов (см., например, [14]) гарантируют, что функция

(2.14) непрерывная и теряет гладкость разве лишь тогда, когда собственное число λ_m^R меняет кратность. В точках бифуркаций эта функция имеет конечные лево- и правосторонние производные. Наконец, такие точки образуют счетное множество на луче $(\mathbf{R}_m, +\infty)$, но на каждом компактном сегменте их – конечное количество. Перечисленные свойства собственных чисел из дискретного спектра используются при проверке очередного утверждения.

Предложение 2.2. *Изолированные собственные числа (1.7) оператора A^R удовлетворяют оценкам*

$$\frac{N_m^1}{R^2} \leq \lambda_m^R \leq \frac{M_m^1}{R^2}, \quad (2.15)$$

где N_m^1 и M_m^1 – положительные числа, но левое неравенство (2.15) установлено лишь в том случае, когда сечение ω звездно относительно начала координат $y = 0$.

Доказательство. Оценка сверху проверена выкладкой (2.8). Из правого неравенства (2.13) вытекает, что

$$\lambda_m^R \leq \frac{(R + \varepsilon)^2}{R^2} \lambda_m^{R+\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{\lambda_m^{R+\varepsilon} - \lambda_m^R}{\varepsilon} \geq -\frac{2R + \varepsilon}{R^2} \lambda_m^{R+\varepsilon}.$$

Таким образом, при любом $\delta > 0$ имеем

$$\frac{1}{\lambda_m^R} \frac{d\lambda_m^R}{dR} \geq -\frac{2}{R} \Rightarrow \ln \lambda_m^R - \ln \lambda_m^{\mathbf{R}_m + \delta} \geq -2(\ln R - \ln(\mathbf{R}_m + \delta)).$$

Отсюда вытекает левое неравенство (2.15) с множителем

$$N_R^1 = \lambda_m^{\mathbf{R}_m + \delta} (\mathbf{R}_m + \delta)^2.$$

□

В п. 4, §4 проверена асимптотическая точность оценок (2.15) и (2.8).

2.3. Порог – собственное число. Предположим, что волновод Ω^R обладает зеркальной симметрией относительно гиперплоскости $\{x : x_1 = 0\}$, т.е.

$$\Omega^R = \{x : (-x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega^R\}.$$

Следуя оригинальной работе [15], сузим задачу (1.2), (1.3) на половину

$$\Omega_+^R = \{x \in \Omega^R : x_1 > 0\} \quad (2.16)$$

волновода и назовем ее искусственно образованной поверхностью

$$\Sigma^R = \{x \in \Omega^R : x_1 = 0\}$$

условие Дирихле. Непрерывный спектр полученной задачи

$$-\Delta u_+^R(x) = \lambda u_+^R(x), \quad x \in \Omega_+^R, \quad (2.17)$$

$$u_+^R(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_+^R \setminus (\Gamma_+^R \cup \partial\Sigma^R), \quad (2.18)$$

приобретает точку отсечки $\lambda_+^\dagger > \lambda_+$. В самом деле, для первого собственного числа Λ_1^+ задачи Дирихле на половине сечения

$$\omega_+ = \{y \in \omega : y_1 > 0\} \quad (2.19)$$

верны соотношения

$$\Lambda_1^+ \geq \Lambda_2 > \Lambda_1 = \lambda_+,$$

так как ее собственная функция U_1^+ , продолженная по нечетности с ω_+ на ω , становится гладкой собственной функцией задачи (1.5), (1.6) переменного знака. В то же время первая собственная функция U_1 , отвечающая Λ_1 , положительна внутри области ω , а вторая обязательно знакопеременна.

Как и в п. 1, §2, кратность дискретного спектра σ_d^{R+} задачи (2.17), (2.18) неограниченно возрастает при увеличении параметра R . Собственные числа λ_m^{R+} непрерывно зависят от R и монотонно убывают до нуля при $R \rightarrow +\infty$. Поскольку увеличение кратности $\#\sigma_d^{R+}$ дискретного спектра может происходить исключительно в результате отцепления собственного числа λ_m^{R+} от порога λ_+^\dagger , оно, спускаясь вниз при увеличении R , проходит через точку $\lambda_+ \in (0, \lambda_+^\dagger)$ при каком-то R_m^\dagger . Осталось заметить, что нечетное продолжение собственной функции $v_m^{R_m} \in H_0^1(\Omega^{R_m^\dagger})$ через срединное сечение $\Sigma^{R_m^\dagger}$ волновода порождает гладкую собственную функцию задачи (1.9), (1.10). В итоге видим, что λ_+ – собственное число из точечного спектра $\sigma_p^{R_m^\dagger}$.

Поскольку половины (2.16) и (2.19) областей Ω^R и ω наследуют от них свойство звездности, для собственных чисел из дискретного спектра задачи (2.17), (2.18) выполнены оценки, аналогичные оценкам (2.15) из предложения 2.2.

2.4. Пороговый коэффициент рассеяния. При $\lambda = \lambda_{\dagger}$ у задачи Дирихле в бесконечном цилиндре $\omega \times \mathbb{R}$ есть следующие решения, линейно зависящие от продольной координаты:

$$w(y, z) = (c_0 + c_1 z)U_1(y). \quad (2.20)$$

Здесь $c_q \in \mathbb{C}$, а U_1 – нормированная в пространстве $L^2(\omega)$ первая собственная функция задачи (1.9), (1.10). Следуя [16] и [17, гл. 5], введем линейные волны

$$\begin{aligned} w^{\text{out}}(y, z) &= 2^{-1/2}(z - i)U_1(y), \\ w^{\text{in}}(y, z) &= 2^{-1/2}(z + i)U_1(y), \end{aligned} \quad (2.21)$$

подчиненные условиям ортогональности и нормировки

$$\begin{aligned} Q(w^{\text{out}}, w^{\text{out}}) &= +i, & Q(w^{\text{in}}, w^{\text{in}}) &= -i, \\ Q(w^{\text{in}}, w^{\text{out}}) &= \overline{Q(w^{\text{out}}, w^{\text{in}})} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь фигурирует симплектическая (полуторалинейная и анти-эрмитова) форма

$$Q(u, v) = \int_{\omega} \left(\overline{v(y, z)} \partial_z u(y, z) - u(y, z) \overline{\partial_z v(y, z)} \right) \Big|_{z=T} dy, \quad (2.23)$$

происходящая от формулы Грина для оператора Гельмгольца и потому не зависящая от параметра T для волн (2.20) и других решений задачи в цилиндре. Проверка соотношений (2.22) элементарна при учете равенства $\|U_1; L^2(\omega)\| = 1$.

Волны (2.20) не поддаются классификации “уходящая/приходящая” посредством классического принципа Зоммерфельда (см., например, монографию [18]), так как у волны (2.20) при $c_1 = 0$ нулевое волновое число. Вместе с тем в книге [17, гл. 5, §6] показано, что величина $Q(w, w)$ пропорциональна проекции на ось z вектора Умова–Пойнтинга [19, 20], вычисленного для волны w . Таким образом, согласно энергетическому принципу Мандельштама [21] форма (2.23) позволяет определить направление переноса энергии волной w , а знаки плюс и минус при мнимой единице в формулах (2.22) идентифицируют уходящую (out) и приходящую (in) волны.

Как показано в книге [17, гл. 5, §3], соотношения (2.22) обеспечивают существование решения дифракционной задачи (1.9), (1.10)

$$\zeta^R(x) = \tilde{\zeta}^R(x) + \chi_R(z)(w^{\text{in}}(x) + s(R)w^{\text{out}}(x)), \quad (2.24)$$

в котором $\tilde{\zeta}^R \in H_0^1(\Omega^R)$ – экспоненциально затухающий на бесконечности остаток, χ_R – срезающая функция (1.12), w^{in} и w^{out} – входящая и уходящая волны (2.21), а $s(R)$ – (комплексный) коэффициент рассеяния с единичным модулем, т.е.

$$s(R) = e^{i\tau(R)}, \quad \tau(R) \in [0, 2\pi). \quad (2.25)$$

Решение (2.24) определено с точностью до линейной комбинации захваченных волн

$$u_1^{R,\text{tr}}, \dots, u_{J(R)}^{R,\text{tr}} \in H_0^1(\Omega^R), \quad (2.26)$$

т.е. собственных функций оператора A^R , отвечающих собственному числу λ_{\dagger} . Важно то, что решение (2.24) существует вне зависимости от того, имеются или нет такие волны.

Следующее утверждение, установленное в [6] (см. также обзор в [11]), предоставляет критерий появления правильного порогового резонанса.

Теорема 2.1. *Задача (1.9), (1.10) в области Ω^R имеет решением почти стоячую волну (1.11) с коэффициентом $K_R \neq 0$ в том и только в том случае, если*

$$s(R) = -1. \quad (2.27)$$

Доказательство. Проверка достаточности условия (2.27) проста, так как согласно определению (2.21) дифракционное решение

$$\zeta^R(x) = \bar{\zeta}^R(x) + \chi_R(z)2^{-1/2}(z(1+s(R)) + i(1-s(R))U_1(y))$$

в случае (2.27) становится почти стоячей волной с коэффициентом $K_R = \sqrt{2}i$. Необходимость требует чуть более длинных рассуждений (см., например, публикацию [6]). \square

§3. ФОРМАЛЬНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. Асимптотика коэффициента рассеяния при приращении параметра R . Решение (2.24) задачи (1.9), (1.10) в области $\Omega^{R+\varepsilon}$ ищем в виде

$$\zeta^{R+\varepsilon}(x) = \zeta^R(x) + \varepsilon \zeta_{\bullet}^R(x) + \dots, \quad (3.1)$$

где ε – малый параметр, а многоточие заменяет асимптотические члены более высокого порядка, не существенные для предприняемого

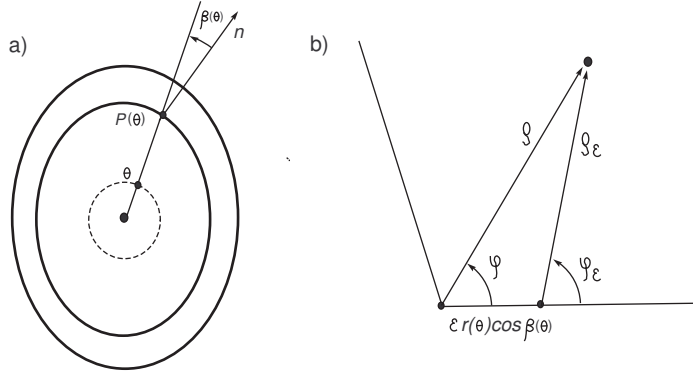


Рис. 2. Геометрические построения при анализе малого увеличения резонатора: сдвиг границы (а) и смещение ребра (б).

формального анализа. Кроме того, функции ζ^R и ζ_\bullet^R изначально определены в области Ω^R , но продолжены по возможности с сохранением гладкости в более широкую область $\Omega^{R+\varepsilon}$ – их сингулярности на $(d-2)$ -мерном ребре Γ_R обследуются в п. 1, §4. Найдем поправочный член ζ_\bullet^R .

Пусть $\theta = |x|^{-1}x$ – точка на единичной сфере $\mathbb{S}_1^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ и $\ell(\theta)$ – луч, проведенный через эту точку из начала координат O (рис. 2, а). При учете звездности области Θ (см. п. 1, §1) обозначим через $\beta(\theta) \in [0, \pi/2)$ угол между лучом $\ell(\theta)$ и внешней нормалью к поверхности $\partial\Theta$ в точке $P(\theta) = \partial\Theta \cap \ell(\theta)$ (см. рис. 2, а). Приращение $R \mapsto R + \varepsilon$ параметра R приводит к сдвигу границы $\partial\Theta_R$ вдоль нормали на расстояние

$$\varepsilon r(\theta)(\cos \beta(\theta) + O(\varepsilon)).$$

При этом $r(\theta)$ – длина отрезка $\ell(\theta) \cap \Theta$ и $\cos \beta(\theta)$ – положительная функция на поверхности $\partial\Theta$,

$$r(\theta) > 0 \quad \text{и} \quad \cos \beta(\theta) > 0 \quad \text{при} \quad \theta \in \mathbb{S}_1^{d-1}. \quad (3.2)$$

Приступим к построению асимптотики. Применим формулу Тейлора

$$\zeta^R(x)|_{\partial\Theta_{R+\varepsilon}} = \zeta^R(x)|_{\partial\Theta_R} + \varepsilon r(\theta) \cos \beta(\theta) \partial_n \zeta^R(x)|_{\partial\Theta_R} + O(\varepsilon^2).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, а второе следует компенсировать при помощи искомого поправочного члена из анзаца (3.1), который тем самым должен быть решением задачи

$$-\Delta \zeta_{\bullet}^R(x) = \lambda_{\dagger} \zeta_{\bullet}^R(x), \quad x \in \Omega^R, \quad (3.3)$$

$$\zeta_{\bullet}^R(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Theta_R}, \quad (3.4)$$

$$\zeta_{\bullet}^R(x) = -r(\theta) \cos \beta(\theta) \partial_n \zeta^R(x), \quad x \in \partial\Theta_R \setminus \overline{\Pi}. \quad (3.5)$$

Данное Дирихле на поверхности резонатора имеет сингулярности на ребре $\Gamma_R = \partial\Theta_R \cap \partial\Pi$, и вопрос о разрешимости задачи (3.3)–(3.5) будет освещен в п. 1, §4. В предположении отсутствия захваченных волн (т.е. $J(R) = 0$ в (2.26)) решение ζ_{\bullet}^R , удовлетворяющее условию излучения

$$\zeta_{\bullet}^R(x) = \tilde{\zeta}_{\bullet}^R(x) + \chi_R(z) s_{\bullet}(R) w^{\text{out}}(x) \quad (3.6)$$

с экспоненциально затухающим остатком $\tilde{\zeta}_{\bullet}^R$, имеется всегда, причем единственное.

Для вычисления коэффициента $s_{\bullet}(R)$ подставим функции ζ_{\bullet}^R и ζ^R в формулу Грина на усеченном волноводе $\Omega^R(T) = \{x \in \Omega^R : z < T\}$ и получим равенство

$$0 = Q(\zeta_{\bullet}^R, \zeta^R) - \int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} r(\theta) \cos \beta(\theta) \zeta_{\bullet}^R(x) \overline{\partial_n \zeta^R(x)} ds_x. \quad (3.7)$$

Таким образом, в силу соотношений (2.22), (3.5) и (3.6), (2.24) находим, что

$$is_{\bullet}(R) \overline{s(R)} = - \int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} r(\theta) \cos \beta(\theta) |\partial_n \zeta^R(x)|^2 ds_x. \quad (3.8)$$

По теореме об единственности продолжения (см., например, монографию [22]) производная $\partial_n \zeta^R$ функции ζ^R , удовлетворяющей условию Дирихле (1.3), не может обратиться в нуль всюду на поверхности $\partial\Theta_R \setminus \overline{\Pi}$ положительной $(d-1)$ -мерной площади. Следовательно, интеграл

$$t(R) = \int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} r(\theta) \cos \beta(\theta) |\partial_n \zeta^R(x)|^2 ds_x \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

положителен в силу неравенств (3.2), и справедлива вытекающая из (3.8) формула

$$s_{\bullet}(R) = is(R)t(R), \quad (3.10)$$

которая в силу соотношений (3.1) и (2.24) означает, что

$$s(R + \varepsilon) = s(R) + \varepsilon s_{\bullet}(R) + O(\varepsilon^2) \quad (3.11)$$

и

$$s(R + \varepsilon) = e^{i(\tau(R) + \varepsilon T(R) + O(\varepsilon^2))}. \quad (3.12)$$

В п. 3 §4 будут обоснованы асимптотические представления (3.11), (3.12) и попутно выяснен порядок бесконечно малой в формулах (3.11) и (3.12).

3.2. Замечания о захваченных волнах. Пусть теперь параметр $R = R_{\text{tr}}$ зафиксирован так, что у задачи (1.9), (1.10) есть захваченные волны (2.26) в количестве $J(R)$ штук. Тогда задача (3.3)–(3.5) приобретает $J(R)$ условий разрешимости, для соблюдения которых изменим определение главного члена анзаца (3.1) следующим образом:

$$\zeta^R(x) + \sum_{j=1}^{J(R)} C_j^R v_j^{R, \text{tr}}(x).$$

Теперь поправочный член ζ_{\bullet}^R асимптотического анзаца является решением дифференциального уравнения (3.3) с краевыми условиями (3.4) и

$$\zeta_{\bullet}^R(x) = g_{\bullet}^R(x) := -r(\theta) \cos \beta(\theta) \left(\partial_n \zeta^R(x) + \sum_{j=1}^{J(R)} C_j^R \partial_n v_j^{R, \text{tr}}(x) \right),$$

$$x \in \partial\Theta_R \setminus \bar{\Pi}. \quad (3.13)$$

В итоге условия разрешимости задачи (3.3), (3.4), (3.13)

$$\int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} g_{\bullet}^R(x) \partial_n v_k^{R, \text{tr}}(x) ds_x = 0, \quad k = 1, \dots, J(R),$$

позволяют найти столбец $C^R = (C_1^R, \dots, C_{J(R)}^R)^{\top}$ (\top – знак транспонирования) из системы линейных алгебраических уравнений

$$M^R C^R = F^R$$

с правой частью

$$F^R = (F_1^R, \dots, F_{J(R)}^R)^{\top}, \quad F_k^R = - \int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} r(\theta) \cos \beta(\theta) \partial_n \zeta^R(x) \partial_n v_k^{R, \text{tr}}(x) ds_x$$

и с $(J(R) \times J(R))$ -матрицей M^R , составленной из интегралов

$$M_{j,k}^R = \int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} r(\theta) \cos \beta(\theta) \partial_n v_j^{R,\text{tr}}(x) \partial_n v_k^{R,\text{tr}}(x) ds_x.$$

По уже упоминавшейся теореме о единственности продолжения функции $\partial_n v_1^{R,\text{tr}}, \dots, \partial_n v_{J(R)}^{R,\text{tr}}$ линейно независимы на $\partial\Theta_R \setminus \bar{\Pi}$, а значит в силу неравенств (3.2) матрица M^R симметричная и положительно определенная.

Теперь похожая на (3.7) формула Грина показывает, что

$$\begin{aligned} & is_{\bullet}(R) \overline{s(R)} \\ &= - \int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} r(\theta) \cos \beta(\theta) \overline{\partial_n \zeta^R(x)} \left(\partial_n \zeta^R(x) - \sum_{j=1}^{J(R)} c_j^R \partial_n v_j^{R,\text{tr}}(x) \right) ds_x \\ &= -t(R) + \sum_{j=1}^{J(R)} \overline{F_j^R} C_j^R. \end{aligned}$$

Итак,

$$s_{\bullet}(R) = is(R) \left(t(R) - \overline{F^R} (M^R)^{\top} F^R \right). \quad (3.14)$$

На первый взгляд кажется, что соотношение (3.14) предоставляет поправочный член анзаца (3.11), в котором множитель при $is(R)$ меньше аналогичного множителя (3.10). Это впечатление ошибочно по следующим причинам.

Прежде всего, как упоминалось, дифракционное решение (2.24) определено с точностью до линейной комбинации захваченных волн в случае их присутствия. Подчинив ζ^R условиям ортогональности

$$\int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} r(\theta) \cos \beta(\theta) \partial_n \zeta^R(x) \partial_n v_k^{R,\text{tr}}(x) ds_x = 0, \quad k = 1, \dots, J(R), \quad (3.15)$$

обнаруживаем, что $F^R = 0 \in \mathbb{C}$, а значит, выражения (3.10) и (3.14) совпадают. Осталось заметить, что условия (3.15) необходимы для непрерывной зависимости решений ζ^R от параметра R и гладкости функции $R \mapsto s(R)$. Последние наблюдения как раз обеспечены проведенным асимптотическим анализом.

Подчеркнем еще раз, что вычитаемое в правой части формулы (3.14) возникло в результате нарушения непрерывной зависимости ζ^R от параметра вследствие “неправильного” выбора дифракционного решения (2.24) в точке $R = R_{\text{tr}}$, однако этот выбор не влияет на сам коэффициент рассеяния $s(R_{\text{tr}})$ и его производную $\partial_R s(R_{\text{tr}})$.

3.3. Выводы. Сформулируем утверждение, доказательство которого будет закончено в § 4.

Теорема 3.2. *В описанной в п. 1, §1 и п.1, §4 ситуации коэффициент рассеяния у решения (2.24) дифракционной задачи (1.9), (1.10) удовлетворяет соотношениям*

$$s(R + \varepsilon) = e^{i(\tau(R) + \varepsilon t(R) + \varepsilon \tilde{\tau}_\varepsilon(R))}, \quad (3.16)$$

и

$$|\tilde{\tau}_\varepsilon(R)| \leq c_R \varepsilon, \quad (3.17)$$

где $\tau(R)$ и $t(R)$ – величины из формул (2.25) и (3.9), в частности, $s(R) = e^{i\tau(R)}$.

Иными словами, коэффициент рассеяния $s(R)$ при возрастании параметра R движется по единичной окружности на комплексной плоскости в направлении часовой стрелки. При этом переменная скорость вращения, пропорциональная интегралу (3.9), не может обратиться в нуль, т.е. движение коэффициента рассеяния происходит без остановок.

Если коэффициент $s(R)$, описывая круг за кругом, пересекает точку $-1 = e^{i\pi}$ бесчисленное количество раз, то по теореме 2.1 правильные пороговые резонансы образуются для бесконечной подпоследовательности

$$R_1^{\text{prop}} \leq R_2^{\text{prop}} \leq \dots \leq R_m^{\text{prop}} \leq \dots \quad (3.18)$$

в последовательности (1.8). Вместе с тем материал п. 3, §2 демонстрирует, что в этой последовательности могут присутствовать точки P_q^{tr} , при которых пороговые резонансы в задаче (1.9), (1.10) образованы захваченными волнами. Таким образом, неограниченность последовательности (3.18) остается под вопросом.

Согласно формуле (3.16) в случае расходимости интеграла

$$\int_{R_b}^{+\infty} t(R) dR \quad (3.19)$$

коэффициент $s(R)$ в самом деле принимает значение -1 бесконечное количество раз. К сожалению, авторы не знают, как проверить это свойство интеграла (3.19). Вместе с тем правдоподобной из-за известного скин-эффекта для собственных функций задачи (2.1), (2.2), т.е. их локализации около границы $\partial\Theta_R$ при больших номерах m , видится гипотеза: величина $t(R)$ неограниченно возрастает при $R \rightarrow +\infty$.

3.4. Потеря звездности. Введенное в п. 1,§1 требование к прототипу Θ резонатора Θ_R означает, в частности, что внутри Θ нет полостей. Пусть (непустая) область $\omega \subset \Theta$ такова, что $\bar{\omega} \subset \Theta$ и граница $\partial\omega$ гладкая. Все приведенные ранее вычисления, за исключением правого равенства (2.13), сохраняют силу для волновода

$$\Omega_o^R = (\Pi \cup \Theta_R) \setminus \bar{\omega}$$

с неизменным препятствием. Однако при соразмерном увеличении препятствия, т.е. при $\omega_R = \{x : R^{-1}x \in \omega\}$, интеграл (3.9) для волновода

$$\Omega_\odot^R = (\Pi \cup \Theta_R) \setminus \bar{\omega}_R \quad (3.20)$$

превращается в такой:

$$\begin{aligned} t(R) &= \int_{\partial\Theta_R \setminus \Pi} r(\theta) \cos \beta(\theta) |\partial_n \zeta^R(x)|^2 ds_x \\ &\quad - \int_{\partial\omega_R} r_\omega(\theta) \cos \beta_\omega(\theta) |\partial_n \zeta^R(x)|^2 ds_x. \end{aligned} \quad (3.21)$$

При этом r_ω и β_ω – аналогичные (3.2) функции, вычисленные на границе $\partial\omega$ вместо $\partial\Theta$. Следовательно, вычитаемое в (3.21) положительно, но гарантировать положительность разности интегралов затруднительно, т.е. в принципе для волновода (3.20) возможно движение коэффициента рассеяния $s_\odot(R)$ вдоль окружности против часовой стрелки.

§4. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

4.1. Сингулярности решений около ребра. В плоскостях, перпендикулярных ребру Γ_R , введем систему полярных координат (ρ, φ) . При этом $\rho = \text{dist}(x, \Gamma_R)$ и угловая переменная φ изменяется в пределах от 0 до $\alpha_R(\varsigma) \in (0, 2\pi)$. Раствор $\alpha_R(\varsigma)$ двугранного угла, образованного

касательными гиперплоскостями к $\partial\Pi$ и $\partial\Theta_R$ в точке $\varsigma \in \Gamma_R$, гладко зависит от локальных координат ς и ввиду звездности области Θ_R справедливы соотношения

$$0 < \alpha_{\min} \leq \alpha_R(\varsigma) \leq \alpha_{\max} < \pi. \quad (4.1)$$

Если вблизи точки $P_\Theta^0 = (\ell_0, 0, \dots, 0) \in \partial\Theta$ на оси полуцилиндра граница $\partial\Theta$ является частью гиперплоскости $\{x : z = \ell_0\}$, то $\alpha_R(\varsigma) = \pi/2$. Напоминаем, что $\ell_0 > 0$ – длина отрезка, отсекаемого поверхностью $\partial\Theta$ от положительной полуоси x_1 .

Известные результаты [23–27] (см. также, например, [17, гл. 8]) и приведенные ниже рассуждения, показывают, что решению задачи (1.2), (1.3) присуще следующее поведение в окрестности \mathcal{V}_R ребра Γ_R :

$$u^R(x) = \hat{u}^R(x) + \mathcal{X}_R(x)\mathcal{K}_R(\varsigma)\rho^{\pi/\alpha_R(\varsigma)} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{\alpha_R(\varsigma)}\right). \quad (4.2)$$

Здесь $\mathcal{X}_R \in C_c^\infty(\mathcal{V}_R)$ – срезающая функция, равная единице около ребра Γ_R , $\mathcal{K}_R \in C^\infty(\Gamma_R)$ – гладкая функция на ребре, называемая коэффициентом интенсивности, а для остатка \hat{u}_R верны оценки

$$|\nabla^k \hat{u}^R(x)| \leq c_{k,R} \rho^{\delta_\Gamma(\varsigma) - k + \pi/\alpha_R(\varsigma)}, \quad x \in \mathcal{V}_R \cap \overline{\Omega^R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

причем $\nabla^k v$ – совокупность производных функции v порядка k , а δ_Γ – положительная гладкая функция на Γ_R , точные значения которой востребованы не будут.

Введем весовое пространство Соболева $V_{\kappa,\mu}^1(\Omega^R)$ (пространство Кондратьева) как пополнение линейного множества $C^\infty(\overline{\Omega^R})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по норме

$$\|u^R; V_{\kappa,\mu}^1(\Omega^R)\| = (\|\mathcal{R}_{\kappa,\mu} \nabla u^R; L^2(\Omega^R)\|^2 + \|\mathcal{R}_{\kappa-1,\mu} u^R; L^2(\Omega^R)\|^2)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Здесь $\kappa \in C^\infty(\Gamma_R)$ и $\mu \in \mathbb{R}$ – весовые показатели, а весовой множитель задан формулой

$$\mathcal{R}_{\kappa,\mu}(x) = \begin{cases} e^{\mu(z-R(\ell_0+1))} & \text{при } x \in \Pi \setminus \mathcal{V}_R, \quad z > R(\ell_0+1), \\ \min\{1, \rho\}^{\kappa(\varsigma)} & \text{при } x \in \mathcal{V}_R \cap \Omega^R, \\ 1 & \text{при } x \in \Omega^R \setminus \mathcal{V}_R, \quad z < R(\ell_0+1). \end{cases} \quad (4.5)$$

Через $V_{\kappa,\mu}^{1,0}(\Omega^R)$ обозначим подпространство функций, удовлетворяющих условию Дирихле (1.10). Зафиксируем весовые индексы следующим образом:

$$\kappa(\varsigma) \in \left(-\frac{\pi}{\alpha_R(\varsigma)} - 1, \frac{\pi}{\alpha_R(\varsigma)} - 1 \right), \quad \varsigma \in \Gamma_R, \quad (4.6)$$

$$\mu \in \left(0, \sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1} \right). \quad (4.7)$$

Нижняя граница для показателя $\kappa(\varsigma)$ в (4.6) означает, что решение (4.2) принадлежит пространству $V_{\kappa,\mu}^{1,0}(\Omega^R \cap \mathcal{V}_R)$, элементы которого заданы на конечной области, т.е. экспоненциальный вес и весовой индекс μ игнорируются. Благодаря верхнему ограничению (4.6) из рассматриваемого пространства исключены функции с “двойственной” сингулярностью $x \mapsto \mathcal{X}_R(x) \mathcal{N}_R(\varsigma) \rho^{-\pi/\alpha_R(\varsigma)} \sin(\pi\varphi/\alpha_R(\varsigma))$. Соотношение (4.7) выводит из пространства $V_{\kappa,\mu}^{1,0}(\Omega^R)$ произведение $\chi_R w$ функций (1.13) и (2.20), но оставляет в нем экспоненциально затухающие волны, например, $\chi_R(z) e^{-z\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}} U_2(y)$.

Наконец, пространство $V_{\kappa,\mu}^{1,out}(\Omega^R)$ составим из функций вида

$$u^R(x) = \tilde{u}^R(x) + \chi_R(z) c_R w^{\text{out}}(y, z) \quad (4.8)$$

с ингредиентами $\tilde{u}^R \in V_{\kappa,\mu}^{1,0}(\Omega_R)$, $c_R \in \mathbb{C}$ и снабдим его нормой

$$\|u^R; V_{\kappa,\mu}^{1,out}(\Omega_R)\| = (\|\tilde{u}^R; V_{\kappa,\mu}^1(\Omega_R)\|^2 + |c_R|^2)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Такие пространства принято называть весовыми классами с отдельной асимптотикой из-за присутствия в представлении (4.8) волны w^{out} из списка (2.21). Гильбертова структура пространства $V_{\kappa,\mu}^{1,out}(\Omega_R)$ в данной работе востребована не будет.

Под обобщенным решением неоднородной задачи

$$-\Delta u^R(x) - \lambda_{\dagger} u^R(x) = f^R(x), \quad x \in \Omega^R, \quad (4.10)$$

$$u^R(x) = g^R(x), \quad x \in \partial\Omega^R \quad (4.11)$$

с правыми частями

$$\mathcal{R}_{\kappa-1,\mu} f^R \in L^2(\Omega^R) \quad \text{и} \quad g^R = g_{\Omega}^R|_{\partial\Omega^R}, \quad g_{\Omega}^R \in V_{\kappa,\mu}^1(\Omega^R), \quad (4.12)$$

как обычно [1], понимаем функцию v^R , для которой выполнены включения $u^R - g_{\Omega}^R \in V_{\kappa,\mu}^{1,out}(\Omega^R)$ и интегральное тождество

$$(\nabla u^R, \nabla \psi^R)_{\Omega^R} - \lambda_{\dagger} (u^R, \psi^R)_{\Omega^R} = (f^R, \psi^R)_{\Omega^R} \quad \forall \psi^R \in V_{-\kappa,\mu}^1(\Omega^R). \quad (4.13)$$

В силу первой формулы (4.12) правая часть равенства (4.12) – (анти)линейный непрерывный функционал на пространстве $V_{-\kappa,\mu}^1(\Omega^R)$.

Следующее утверждение в целом известно. В части обработки окрестности ребра сошлемся на классические результаты Кондратьева [23,24], а в части обработки решения на бесконечности в полуцилиндре Π – на книгу [17, гл. 5] и, например, статью [28].

Теорема 4.3. Пусть выполнены ограничения (4.6), (4.7) и (4.12), задача (1.9), (1.10) обладает захваченными волнами (2.26), а для функции f^R и g^R справедливы равенства

$$(f^R, v_j^{R,\text{tr}})_{\Omega^R} - (g^R, \partial_n v_j^{R,\text{tr}})_{\partial\Omega^R} = 0, \quad j = 1, \dots, J(R). \quad (4.14)$$

Тогда задача (4.13) (или (4.10), (4.11) в дифференциальной форме) имеет решение u^R , которое удовлетворяет включению $v^R - g_\Omega^R \in V_{\kappa,\mu}^{1,\text{out}}(\Omega^R)$ и определено с точностью до линейной комбинации упомянутых захваченных волн, но будучи подчинено условиям ортогональности

$$(u^R, v_j^{R,\text{tr}})_{\Omega^R} = 0, \quad j = 1, \dots, J(R),$$

становится единственным и приобретает оценку

$$\|u^R - g_\Omega^R; V_{\kappa,\mu}^{1,\text{out}}(\Omega^R)\| \leq C_R (\|\mathcal{R}_{\kappa-1,\mu} f^R; L^2(\Omega^R)\| + \|g_\Omega^R; V_{\kappa,\mu}^1(\Omega^R)\|). \quad (4.15)$$

Разумеется, доступны оценки вторых производных в весовых пространствах, но данной работе они не понадобятся, так как интерес представляет именно коэффициент рассеяния, модуль которого кстаи включен в норму (4.9).

Поясним, как применяется теорема 4.3 для обеспечения существования решения задачи (3.3)–(3.5). Сначала рассмотрим задачу с однородным условием Дирихле (1.10), т.е. положим $g^R = 0$ в (4.11). Тогда интегральное тождество (4.13) принимает вид

$$(\nabla u^R, \nabla \psi^R)_{\Omega^R} - \lambda_{\dagger} (u^R, \psi^R)_{\Omega^R} = \mathcal{F}^R(\psi^R) \quad \forall \psi^R \in V_{-\kappa,\mu}^1(\Omega^R) \quad (4.16)$$

с функционалом $\mathcal{F}^R = (f^R, \cdot)_{\Omega^R} \in V_{-\kappa,\mu}^1(\Omega^R)^*$ и из него находится решение $u^R \in V_{\kappa,\mu}^{1,\text{out}}(\Omega^R)$. В силу одномерного неравенства Фридрихса

$$\int_0^{\alpha(\varsigma)} |\nabla u^R(x)|^2 \rho d\varphi \geq \int_0^{\alpha(\varsigma)} \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{\partial u^R}{\partial \varphi}(x) \right|^2 \rho d\varphi \geq \frac{\alpha(\varsigma)^2}{\pi^2} \int_0^{\alpha(\varsigma)} \frac{1}{\rho^2} |u^R(x)|^2 \rho d\varphi,$$

обеспеченного однородными условиями Дирихле, пространства

$$H_0^1(\Omega^R \cap \mathcal{V}_R; \partial\Omega^R \cap \mathcal{V}_R) \quad \text{и} \quad V_{0,\mu}^{1,0}(\Omega^R \cap \mathcal{V}_R)$$

совпадают алгебраически и топологически. Кроме того, при $\kappa_1 \geq \kappa_2$ на Γ_R справедливо вложение

$$V_{\kappa_2,\mu}^{1,\text{out}}(\Omega^R) \subset V_{\kappa_1,\mu}^{1,\text{out}}(\Omega^R).$$

Следовательно, в силу сформулированной в теореме 4.3 однозначной разрешимости решения $u_1^R \in V_{\kappa_1,\mu}^{1,\text{out}}(\Omega^R)$ и $u_2^R \in V_{\kappa_2,\mu}^{1,\text{out}}(\Omega^R)$ задачи (4.16) с правой частью $\mathcal{F}^R \in V_{-\kappa_1,\mu}^1(\Omega^R)^* \cap V_{-\kappa_2,\mu}^1(\Omega^R)^*$ неразличимы. Если из дифракционного решения (2.26) удалить приходящую волну, то разность

$$\widehat{\zeta}^R(x) = \zeta^R(x) - \chi_R(z)w^{\text{in}}(x) \quad (4.17)$$

попадет в пространство $V_{0,\mu}^{1,\text{out}}(\Omega^R)$, так как она по-прежнему удовлетворяет условию Дирихле (1.10) и допускает нужное представление на бесконечности. Кроме того, невязка в дифференциальном уравнении (1.9) имеет компактный носитель, отделенный от ребра Γ_R и является гладкой, т.е. удовлетворяет требованиям (4.12) при любых весовых индексах, а также условиям разрешимости (4.14) в силу вытекающих из формул (2.22) соотношений

$$(\Delta + \lambda_{\dagger})(\chi_R w^{\text{in}}, v_j^{R,\text{tr}})_{\Omega^R} = 0, \quad j = 1, \dots, J(R).$$

Итак, дифракционное решение (2.24) принадлежит пространству $V_{\kappa,\mu}^1(\Omega^R \cap \mathcal{V}_R)$ с любыми весовыми показателями, удовлетворяющими включениям (4.6) и (4.7). Кроме того, правые части задачи (4.10), (4.11) для разности (4.17) обращаются в нуль около ребра. Последнее обстоятельство позволяет применить теорему Кондратьева [23] (см. также [17, гл. 10, 11]) об асимптотике решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона и получить асимптотическое представление (4.2), причем поточечные оценки (4.3) остатка обеспечены результатами [27].

Теперь обратимся к задаче (3.3)–(3.5) для поправочного члена ζ_{\bullet}^R в анзаце (3.6). В силу установленной формулы (4.2) данное Дирихле g_{\bullet}^R в краевом условии (3.5) имеет сингулярность $O(\rho^{-1+\pi/\alpha_R(\varsigma)})$ около ребра Γ_R , однако согласно определению (4.4), (4.5) весовой нормы существует продолжение $g_{\bullet\Omega}^R$ функции g_{\bullet}^R , имеющее компактный носитель и принадлежащее пространству $V_{\kappa_{\bullet},\mu}^1(\Omega^R)$ с весовыми индексами (4.7) и

$$\kappa_{\bullet}(\varsigma) > -\frac{\pi}{\alpha(\varsigma)} \quad \text{при всех} \quad \varsigma \in \Gamma_R. \quad (4.18)$$

При учете ограничения (4.6) на раствор $\alpha(\varsigma)$ двугранного угла, возникшего благодаря звездности области Θ , правая часть неравенства (4.18) попадает вовнутрь указанного формулой (4.6) интервала допустимого изменения весового индекса $\kappa \in C^\infty(\Gamma_R)$. Следовательно, к задаче (3.3)–(3.5) применима теорема 4.3 о разрешимости, причем согласно построениям из п. 2, §3 необходимые условия ортогональности (3.3) выполнены. Нужный член анзаца (3.6) построен.

4.2. Два пути оправдания построенной асимптотики. Как уже упоминалось во введении, переход

$$\Omega^{R+\varepsilon} \mapsto \Omega^R \quad (4.19)$$

допускает двоякую интерпретацию, а именно, как регулярное или как сингулярное возмущение исходной области Ω^R . В первом случае используется гладкий диффеоморфизм

$$\chi_\varepsilon^R : \Omega^{R+\varepsilon} \rightarrow \Omega^R, \quad (4.20)$$

мало отличающийся от тождественного, и применяются результаты теории возмущений линейных операторов (см., например, [14, гл. 7]). Во втором случае учитывается неоднородный сдвиг ребра $\Gamma^R \mapsto \Gamma^{R+\varepsilon}$ на малые расстояния вдоль цилиндрической поверхности $\partial\Pi$ и исследуется явление пограничного слоя. В этом пункте займемся первым подходом, а второй подход более подробно обсудим в следующем пункте.

Внутри полуцилиндра $\{(y, z) : |y| < D, z > d\}$ с некоторыми положительными размерами D и d равномерное сжатие координат

$$x \mapsto Y_\Theta^{R,\varepsilon}(x) = R(R+\varepsilon)^{-1}x \quad (4.21)$$

сопутствующее переходу (4.19), можно записать следующим образом:

$$(y, z) \mapsto Y_\Gamma^{R,\varepsilon}(y, z) = (y, z - \varepsilon Z^{R,\varepsilon}(y, z)). \quad (4.22)$$

Неравномерный сдвиг (4.22) распространим на часть $\omega \setminus (R\ell_0/2, 3R\ell_0/2)$ полуцилиндра Π , а на части $\omega \times (5R\ell_0/4, +\infty)$ используем также тождественное отображение Id . Склеим перечисленные отображения при помощи подходящего разбиения единицы

$$1 = \chi_\Theta + \chi_\Gamma + \chi_\Pi \quad (4.23)$$

и соорудим искомым диффеоморфизм (4.20) по формуле

$$\chi^{R,\varepsilon} = \chi_\Theta Y_\Theta^{R,\varepsilon} + \chi_\Gamma Y_\Gamma^{R,\varepsilon} + \chi_\Pi \text{Id}. \quad (4.24)$$

Фигурирующие в (4.21), (4.22) и (4.24) вектор-функции удовлетворяют соотношениям

$$\left| Y_{\Theta}^{R,\varepsilon}(x) - x \right| \leq c_{\Theta}^0 \varepsilon, \quad \left| \nabla Y_{\Theta}^{R,\varepsilon}(x) - \mathbb{I}_d \right| \leq c_{\Theta}^1 \varepsilon \quad \text{при } x \in \text{supp } \chi_{\Theta},$$

$$\left| Y_{\Gamma}^{R,\varepsilon}(x) - x \right| \leq c_{\Gamma}^0 \varepsilon, \quad \left| \nabla Y_{\Gamma}^{R,\varepsilon}(x) - \mathbb{I}_d \right| \leq c_{\Gamma}^1 \varepsilon \quad \text{при } x \in \text{supp } \chi_{\Gamma},$$

где \mathbb{I}_d – единичная $(d \times d)$ -матрица. Эти соотношения дают формулу для преобразованного оператора Гельмгольца

$$(\Delta + \lambda_{\dagger}) \circ \varkappa^{R,\varepsilon} = \Delta + \lambda_{\dagger} + \varepsilon \mathcal{L}^{R,\varepsilon}(x, \nabla),$$

в которой $\mathcal{L}^{R,\varepsilon}(x, \nabla)$ – дифференциальный оператор первого порядка с гладкими относительно переменных x и параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ коэффициентами, имеющими компактные носители. Таким образом, задача (1.9), (1.10) в возмущенной области $\Omega^{R+\varepsilon}$ сведена к следующей задаче в области Ω^R :

$$-\Delta \widehat{\zeta}^{R,\varepsilon}(x) + \varepsilon \mathcal{L}^{R,\varepsilon}(x, \nabla) \widehat{\zeta}^{R,\varepsilon}(x) = \lambda_{\dagger} \widehat{\zeta}^{R,\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega^R,$$

$$\widehat{\zeta}^{R,\varepsilon}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^R.$$

Для ее решения по-прежнему выполнено представление

$$\widehat{\zeta}^{R,\varepsilon}(x) = w^{\text{in}}(x) + s(R + \varepsilon) w^{\text{out}}(x) + O(e^{-z\sqrt{\Lambda_1 - \Lambda_2}}) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty \text{ в } \Pi,$$

а коэффициент рассеяния в нем удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon \int_{\Omega^R} \overline{\zeta^R(x)} \mathcal{L}^{R,\varepsilon}(x, \nabla) \widehat{\zeta}^{R,\varepsilon}(x) dx = Q(\widehat{\zeta}^{R,\varepsilon}, \zeta^R) = i s(R + \varepsilon) \overline{s(R)} - i.$$

Теперь несложно вывести следующую формулу для поправочного члена в анзаце (3.11):

$$i s_{\bullet}(R) \overline{s(R)} = \int_{\Omega^R} \overline{\zeta^R(x)} \mathcal{L}^{R,0}(x, \nabla) \zeta^R(x) dx. \quad (4.25)$$

Ее нельзя признать окончательной, так как оператор $\mathcal{L}^{R,0}(x, \nabla)$ определен через достаточно произвольное разбиение единицы (4.23). Дальнейшее преобразование интеграла (4.25) опустим, поскольку изложенная в §3 асимптотическая процедура приводит к явному выражению (3.10), (3.9) для коэффициента $s_{\bullet}(R)$.

4.3. Раздутие резонатора как сингулярное возмущение границы. Продолженные с Ω^R на $\Omega^{R+\varepsilon}$ члены анзаца (3.1) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\zeta^R(x)|_{\partial\Omega^{R+\varepsilon}\setminus\overline{\Pi}} &= \zeta^R(x)|_{\partial\Omega^R\setminus\overline{\Pi}} + \varepsilon r(\theta) \cos \beta(\theta) \zeta^R(x)|_{\partial\Omega^R\setminus\overline{\Pi}} \\ &+ O\left(\varepsilon^2 \rho^{-2+\pi/\alpha(\varsigma)}\right), \\ \varepsilon \zeta_{\bullet}^R(x)|_{\partial\Omega^{R+\varepsilon}\setminus\overline{\Pi}} &= \varepsilon \zeta_{\bullet}^R(x)|_{\partial\Omega^R\setminus\overline{\Pi}} + O\left(\varepsilon^2 \rho^{-2+\pi/\alpha(\varsigma)}\right),\end{aligned}$$

и поэтому в силу краевых условий (1.3) для ζ^R и (3.5) для ζ_{\bullet}^R невязка \tilde{g}^R суммы $\zeta^R + \varepsilon \zeta_{\bullet}^R$ в условии Дирихле на поверхности $\partial\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \overline{\Pi}$ приобретает порядок ε^2 на удалении от ребра Γ_R , но в силу соотношения

$$\rho(x) = \text{dist}(x, \Gamma_R) = O(\varepsilon + \text{dist}(x, \Gamma_{R+\varepsilon})) = O(\varepsilon + \rho_\varepsilon)$$

увеличивается до $O(\varepsilon^{\pi/\alpha_{\max}})$ в непосредственной близости к ребру (см. формулу (4.1) и рис. 2, b). Величина π/α_{\max} строго больше единицы, и даже такое ухудшение оценки невязки позволяет установить некую малость остатка $\tilde{\tau}_\varepsilon(R)$ в представлении (3.16) коэффициента рассеяния $s(R + \varepsilon)$. Однако использование весовых пространств с отделенной асимптотикой дает возможность вывести асимптотически точное неравенство (3.17). В самом деле, ввиду предположения о гладкости границ $\partial\Theta$, $\partial\omega$, а значит и ребра Γ_R , теоремы о повышении гладкости решений эллиптических задач в областях с гладкими ребрами (см. статьи [23, 26], а также книгу [17, гл. 8]) обеспечивают включения

$$\nabla^k \zeta^R \in V_{\kappa+k, \mu}^1(\Omega^R \cap \mathcal{V}_R) \quad \text{и} \quad \nabla^k \zeta_{\bullet}^R \in V_{\kappa+k+1, \mu}^1(\Omega^R \cap \mathcal{V}_R)$$

при любом показателе $\kappa(\varsigma) > \frac{\pi}{\alpha(\varsigma)}$, $\varsigma \in \Gamma_R$.

Невязка \tilde{g}^R образована вторыми производными функции ζ^R и первыми производными функции ζ_{\bullet}^R , т.е. она допускает продолжение $\tilde{g}_{\Omega}^{R, \varepsilon} \in V_{\tilde{\kappa}, \mu}^1(\Omega^R)$, для которого выполнены включение $\text{supp } \tilde{g}_{\Omega}^{R, \varepsilon} \subset \overline{\Omega^R} \cap \mathcal{V}_R$ и неравенство

$$\begin{aligned}\|\tilde{g}_{\Omega}^{R, \varepsilon}; V_{\tilde{\kappa}, \mu}^1(\Omega^R)\| &\leq c_R \varepsilon^2 \text{ при любом показателе} \\ \tilde{\kappa}(\varsigma) &> 1 - \frac{\pi}{\alpha(\varsigma)} > 0, \quad \varsigma \in \Gamma_R.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Кроме того, из-за продолжения функций ζ^R и ζ_{\bullet}^R с Ω^R на $\Omega^{R+\varepsilon}$ сумма $\zeta^R + \varepsilon\zeta_{\bullet}^R$ оставляет невязку $\tilde{f}^{R,\varepsilon}$ в уравнении Гельмгольца, сосредоточенную на тонкой области $\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \overline{\Omega^R}$. Поскольку обе функции удовлетворяют уравнению (1.2) в исходной области Ω^R , появившаяся невязка удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{f}^{R,\varepsilon}(x)| \leq c \operatorname{dist}(x, \partial\Omega^R),$$

а значит, для любой пробной функции $\psi^{R+\varepsilon} \in V_{-\tilde{\kappa},\mu}^{1,0}(\Omega^{R+\varepsilon})$ с весовым показателем

$$\tilde{\kappa}(\varsigma) \geq 0, \quad \varsigma \in \Gamma_R, \quad (4.27)$$

выполнено соотношение

$$\begin{aligned} & \left| (\tilde{f}^{R,\varepsilon}, \psi^{R+\varepsilon})_{\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \Omega^R} \right| \\ & \leq c (\operatorname{mes}_d \Omega^{R+\varepsilon} \setminus \Omega^R)^{1/2} \max_{\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \Omega^R} |\tilde{f}^{R,\varepsilon}(x)| \\ & \times \left(\int_{\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \Omega^R} |\psi^{R+\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c\varepsilon^{3/2} \left(\varepsilon^2 \int_{\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \Omega^R} |\nabla \psi^{R+\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq c\varepsilon^{5/2} \max_{\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \Omega^R} \rho_\varepsilon(x)^{\tilde{\kappa}(\varsigma)} \left(\int_{\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \Omega^R} \rho_\varepsilon(x)^{-2\tilde{\kappa}(\varsigma)} |\nabla \psi^{R+\varepsilon}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq c\varepsilon^{5/2} \|\psi^{R+\varepsilon}; V_{-\tilde{\kappa},\mu}^1(\Omega^{R+\varepsilon})\|, \end{aligned} \quad (4.28)$$

которое показывает, что норма функционала

$$V_{-\tilde{\kappa},\mu}^1(\Omega^{R+\varepsilon}) \ni \psi^{R+\varepsilon} \mapsto \tilde{F}^{R,\varepsilon}(\psi^{R+\varepsilon}) = (\tilde{f}^{R,\varepsilon}, \psi^{R+\varepsilon})_{\Omega^{R+\varepsilon} \setminus \Omega^R}$$

не превосходит $c\varepsilon^{5/2}$.

Заметим, что в силу формулы (4.1) выполнено ограничение

$$1 - \frac{\pi}{\alpha(\varsigma)} < -1 + \frac{\pi}{\alpha(\varsigma)}, \quad \varsigma \in \Gamma_R$$

и выберем положительный (ср. требования (4.26) и (4.27)) весовой показатель $\tilde{\kappa}(\varsigma)$ из указанного в (4.6) интервала, обеспечив тем самым справедливость утверждения теоремы 4.3. При отсутствии захваченных волн в исходной задаче (1.9), (1.10) для волновода Ω^R множитель $C_{R+\varepsilon}$ в оценке (4.15) решения той же задачи для возмущенного волновода $\Omega^{R+\varepsilon}$ можно взять не зависящим от малого параметра ε . Таким

образом, соотношения (4.26), (4.28) и (4.15) показывают, что

$$\|\zeta^{R+\varepsilon} - \zeta^R - \varepsilon\zeta_{\bullet}^R - \tilde{g}_{\Omega}^{R,\varepsilon}; V_{\tilde{\kappa},\mu}^{1,out}(\Omega^{R+\varepsilon})\| \leq c\varepsilon^2, \quad (4.29)$$

и, поскольку норма (4.9) содержит модуль коэффициента рассеяния, неравенство (4.29) гарантирует оценку (3.17) остатка в представлении (3.16) коэффициента рассеяния $s(R + \varepsilon)$.

При наличии захваченных волн добавляем к сумме $\zeta^R + \varepsilon\zeta_{\bullet}^R$ их линейную комбинацию

$$\mathbf{v}^{R,\varepsilon}(x) = \varepsilon \sum_{j=1}^{J(R)} \mathbf{c}_j^{R,\varepsilon} v_j^{R,\text{tr}}(x),$$

коэффициенты которой подбираем так, чтобы были соблюдены условия (4.15) разрешимости задачи для остатка

$$\tilde{\zeta}^{R+\varepsilon}(x) = \zeta^{R+\varepsilon}(x) - \zeta^R(x) - \varepsilon\zeta_{\bullet}^R(x) - \mathbf{v}^{R,\varepsilon}(x) - \mathbf{g}_{\Omega}^{R+\varepsilon}(x). \quad (4.30)$$

В итоге получаем прежнюю оценку $V_{\tilde{\kappa},\mu}^{1,out}(\Omega^{R+\varepsilon})$ -нормы выражения (4.30) и заканчиваем проверку теоремы 3.2 в полном объеме, так как присутствие захваченных волн не сказывается на величине коэффициента рассеяния.

Закончим исследование задачи (1.9), (1.10) для возмущенного волновода $\Omega^{R+\varepsilon}$ краткими пояснениями к построению пограничного слоя около ребра $\Gamma_{R+\varepsilon}$, сдвинутого вдоль цилиндрической поверхности $\partial\Pi$ на малое расстояние $\varepsilon(\theta) = \varepsilon r(\theta) \cos \beta(\theta)$ (см. рис. 2, b). Согласно представлению (4.2) сингулярность решения $\zeta^{R+\varepsilon}$ около $\Gamma_{R+\varepsilon}$ записывается в системе полярных координат $(\rho_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ следующим образом:

$$\mathcal{Z}_R(\rho_\varepsilon \varepsilon, \varphi_\varepsilon, \varsigma) = \mathcal{K}_{R+\varepsilon}(\varsigma) \rho_\varepsilon^{\pi/\alpha_{R+\varepsilon}(\varsigma)} \sin\left(\frac{\pi\varphi_\varepsilon}{\alpha_{R+\varepsilon}(\varsigma)}\right). \quad (4.31)$$

Укажем понятные формулы

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{R+\varepsilon}(\varsigma) &= \mathcal{K}_R(\varsigma) + \varepsilon(\theta)\mathcal{K}'_R(\varsigma) + \dots, \\ \alpha_{R+\varepsilon}(\varsigma) &= \alpha_R(\varsigma) + \varepsilon(\theta)\alpha'_R(\varsigma) + \dots, \end{aligned} \quad (4.32)$$

в которых \mathcal{K}'_R и α'_R – гладкие функции на Γ_R , а многоточие опять заменяет ненужные здесь асимптотические члены более высокого порядка при $\varepsilon(\theta) \rightarrow +0$. Кроме того, решив элементарную тригонометрическую задачу на рис. 2, b, находим, что

$$\rho_\varepsilon \cos \varphi_\varepsilon = \rho \cos \varphi - \varepsilon(\theta), \quad \rho_\varepsilon \sin \varphi_\varepsilon = \rho \sin \varphi,$$

а значит, при больших значениях ρ имеем

$$\rho_\varepsilon = \rho - \varepsilon(\theta)\rho^{-1} \cos \varphi + \dots, \varphi_\varepsilon = \varphi - \varepsilon(\theta)\rho^{-1} \sin \varphi + \dots$$

Таким образом, для выражения (4.31) справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_R(\rho_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, \varsigma) &= \mathcal{K}_R(\varsigma)\rho^{\pi/\alpha_R(\varsigma)} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{\alpha_R(\varsigma)}\right) \\ &+ \varepsilon(\theta)\left\{\mathcal{K}'_R(\varsigma)\rho^{\pi/\alpha_R(\varsigma)} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{\alpha_R(\varsigma)}\right) \right. \\ &- \frac{\pi\alpha'_R(\varsigma)}{\alpha_R(\varsigma)^2}\mathcal{K}_R(\varsigma)\rho^{\pi/\alpha_R(\varsigma)}\left(\ln\rho \sin\left(\frac{\pi\varphi}{\alpha_R(\varsigma)}\right) + \varphi \cos\left(\frac{\pi\varphi}{\alpha_R(\varsigma)}\right)\right) \\ &\left. + \mathcal{K}_R(\varsigma)\rho^{-1+\pi/\alpha_R(\varsigma)} \sin\left(\left(-1 + \frac{\pi}{\alpha_R(\varsigma)}\right)\varphi\right)\right\} + \dots \end{aligned} \quad (4.33)$$

В правой части соотношения (4.33) расположены гармонические функции в угле с раствором $\alpha_R(\varsigma)$, обращающиеся в нуль при $\varphi = 0$. Второе и третье слагаемые из фигурных скобок отличны от нуля при $\varphi = \pi/\alpha_R(\varsigma)$ и при учете представления (4.2) для главного члена ζ^R асимптотического анзаца (3.1) согласованы с сингулярностями, появляющимися у поправочного члена ζ_\bullet^R вследствие неоднородного краевого условия Дирихле (3.5).

Итак, в рамках метода сращиваемых асимптотических разложений (см. [13], а также [12, гл. 2]) выражение (4.31) пригодно в качестве главного члена внутреннего разложения решения $\zeta^{R+\varepsilon}$ вблизи ребра Γ_R . Процедура сращивания этого разложения с внешним разложением (3.1) позволяет определить выделенные в (4.32) коэффициенты интенсивности. Склеив внутреннее и внешнее разложения при помощи подходящего разбиения единицы, получаем асимптотическое приближение к полю (2.24), обладающее “правильным” поведением (4.31) при $\text{dist}(x, \Gamma_R) \rightarrow +0$ и лишенное “излишних” сингулярностей $O(\rho^{-1+\pi/\alpha_R(\varsigma)}(1+|\ln\rho|))$, присущих поправочному члену внешнего разложения.

Применение метода составных разложений (см. [12, 29] и др.) требует введения в асимптотические конструкции срезающих функций и тем самым загромождает представление решения $\zeta^{R+\varepsilon}$ задачи (1.2), (1.3) в $\Omega^{R+\varepsilon}$. Так, слагаемые ζ^R и ζ_\bullet^R анзаца (3.1) умножаются на срезку χ^ε , обращающуюся в нуль в $c\varepsilon$ -окрестности ребра $\Gamma^{R+\varepsilon}$, т.е.

$$\chi^\varepsilon(x) = 0 \text{ при } \text{dist}(x, \Gamma^{R+\varepsilon}) \leq c\varepsilon \text{ и } \chi^\varepsilon(x) = 1 \text{ при } \text{dist}(x, \Gamma^{R+\varepsilon}) \geq 2c\varepsilon.$$

Возникающие при этом невязки порядка $\varepsilon^{\pi/\alpha_R(\varsigma)}$ компенсируются решениями задачи Дирихле для уравнения Пуассона в угле раствором $\alpha_R(\varsigma)$, которые затухают при $\rho \rightarrow +\infty$ как $O(\rho^{-\pi/\alpha_R(\varsigma)})$ и также умножаются на срезку $X \in C_c^\infty(\overline{\Omega^R \cap \mathcal{V}_R})$, определенную на окрестности \mathcal{V}_R , где были введены локальные координаты, и равную единице вблизи ребра $\Gamma^{R+\varepsilon}$. Вновь образованные невязки компенсируются решениями задачи (4.10), (4.11) и итерационный процесс продолжается.

Построенные таким способом главный и первый поправочный члены разложения поля $\zeta^{R+\varepsilon}$ лишены наглядности, присущей анзацу (3.1) в рамках метода сращиваемых разложений. Преимущества метода составных разложений проявляется только при конструировании младших асимптотических членов, так как на всех шагах итерационного процесса отыскиваются решения предельных задач с фиксированным поведением около ребра или на бесконечности. Подчеркнем, что структура младших членов пограничного слоя усложняется существенно из-за переменных коэффициентов оператора Гельмгольца, переписанного в локальных координатах

$$\Delta_x + \lambda_{\dagger} = \mathbf{L}(r, \varphi, \varsigma, \partial_r, r^{-1}\partial_\varphi, \partial_\varsigma),$$

но не нуждается в строгом отслеживании именно при использовании обсуждаемого метода.

4.4. Асимптотика собственных чисел при $R \rightarrow +\infty$. Напоследок убедимся в том, что для собственных чисел из дискретного спектра (1.7) оператора A^R задачи (1.2), (1.3) верна асимптотическая формула

$$\lambda_m^R = \frac{1}{R^2} M_m^1 + \tilde{\lambda}_m^R, \quad (4.34)$$

где M_m^1 – член последовательности (2.3) собственных чисел задачи (2.1), (2.2) при $R = 1$, а для остатка выполнены соотношения

$$\tilde{\lambda}_m^R \leq 0 \quad \text{и} \quad |\tilde{\lambda}_m^R| \leq c_m R^{-4-d/2}. \quad (4.35)$$

Первое неравенство (4.35) обеспечено выкладкой (2.8), а для проверки второго введем в пространстве $H_0^1(\Omega^R)$ скалярное произведение

$$\langle u, \psi \rangle = (\nabla u, \nabla \psi)_{\Omega^R}, \quad (4.36)$$

а также положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряженный оператор \mathcal{K}^R при помощи тождества

$$\langle \mathcal{K}^R u, \psi \rangle = (u, \psi)_{\Omega^R} \quad \forall u, \psi \in H_0^1(\Omega^R). \quad (4.37)$$

Норму, порожденную скалярным произведением (4.36), обозначим через $||| \cdot |||$.

Согласно определениям (4.36) и (4.37) вариационная задача (1.4) эквивалентна абстрактному уравнению

$$\mathcal{K}^R u = \kappa u \quad \text{в } H_0^1(\Omega^R).$$

с новым спектральным параметром

$$\kappa = \lambda^{-1}.$$

В силу теорем 10.2.1 и 10.2.2 из книги [2], а также соотношения (4.37) и информации о спектре задачи (1.2), (1.3), представленной в п. 2, §1, непрерывный φ_c^R спектр оператора \mathcal{K}^R – полуинтервал $(0, \kappa_\dagger]$, причем точка $\kappa = 0$ дополняет его до существенного спектра φ_e^R , а выше точки отсечки $\kappa_\dagger = \lambda_\dagger^{-1}$ располагается дискретный спектр φ_d^R .

Следующее утверждение, известное как лемма о “почти собственных” числах и векторах [29], обеспечено спектральным разложением резольвенты (см., например, [2, гл. 6]).

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{U}^R \in H_0^1(\Omega^R) \setminus \{0\}$ и $k^R > \kappa_\dagger$ таковы, что

$$|||\mathcal{U}^R|||^{-1} |||\mathcal{K}^R \mathcal{U}^R - k^R \mathcal{U}^R||| =: \delta^R \in [0, k^R - \kappa_\dagger). \quad (4.38)$$

Тогда в дискретном спектре φ_d^R оператора \mathcal{K}^R существует точка κ^R , удовлетворяющая неравенству

$$|\kappa^R - k^R| \leq \delta_R.$$

Более того, при любом $\delta_*^R > \delta^R$ найдется столбец

$$\mathbf{a}^R = (\mathbf{a}_{\mathbf{K}^R}^R, \dots, \mathbf{a}_{\mathbf{K}^R + \mathbf{X}^R - 1}^R)^\top,$$

для которого верны соотношения

$$\left\| \frac{\mathcal{U}^R}{|||\mathcal{U}^R|||} - \sum_{j=\mathbf{K}^R}^{\mathbf{K}^R + \mathbf{X}^R - 1} \mathbf{a}_j^R \mathbf{u}_j^R \right\| \leq 2 \frac{\delta^R}{\delta_*^R}, \quad \sum_{j=\mathbf{K}^R}^{\mathbf{K}^R + \mathbf{X}^R - 1} |a_j^R|^2 = 1. \quad (4.39)$$

Здесь $\mathbf{u}_{\mathbf{K}^R}^R, \dots, \mathbf{u}_{\mathbf{K}^R + \mathbf{X}^R - 1}^R$ – собственные векторы (функции) оператора \mathcal{K}^R , отвечающие всем его собственным числам из замкнутого сегмента $[k^R - \delta_R^*, k^R + \delta_R^*] \subset (\kappa_\dagger, +\infty)$ и подчиненные условиям

$$\langle \mathbf{u}_j^R, \mathbf{u}_k^R \rangle = \delta_{j,k}. \quad (4.40)$$

Пусть M_m^1 – собственное число задачи (2.1), (2.2) с кратностью \varkappa_m^R , т.е.

$$M_{m-1}^1 < M_m^1 = \dots = M_{m+\varkappa_m^R-1}^1 < M_{m+\varkappa_m^R}^1. \quad (4.41)$$

Введем \varkappa_m^R экземпляров $k_m^R = R^2(M_m^1)^{-1}$ “почти собственного” числа. В качестве “почти собственных” векторов возьмем произведения

$$\mathcal{U}_j^R(x) = X_0^R(x)\Phi_j^1(R^{-1}x), \quad j = m, \dots, m + \varkappa_m^R - 1. \quad (4.42)$$

При этом $X_0^R(x) = X(y, z - R\ell_0)$ и $X \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ – срезающая функция, равная нулю на замыкании полуцилиндра $\overline{\Pi}$ и единице вне некоторой его окрестности. Иными словами, функция (4.36) обращается в нуль на сечении $\partial\Theta_R \cap \overline{\Pi}$ полуцилиндра и допускает гладкое продолжение с резонатора Θ_R на весь волновод Ω^R .

Условие Дирихле (2.2) при $R = 1$ для собственной функции Φ_j^1 означает, в частности, что

$$|\Phi_j^1(x)| \leq c_j^0(|y|^2 + |z - \ell_0|^2)^{1/2}, \quad |\nabla\Phi_j^1(x)| \leq c_j^1, \quad (4.43)$$

т.е. на множествах $\text{supp}|\nabla X_0^R|$ и $\Theta \cap \text{supp}(1 - X_0^R)$ величины $|\Phi_j^1(R^{-1}x)|$ и $|\nabla_x \Phi_j^1(R^{-1}x)|$ не превосходят $C_j R^{-1}$. Таким образом, в силу условий ортогональности и нормировки (2.5) первое слагаемое в правой части равенства

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}_j^R, \mathcal{U}_k^R \rangle &= (\nabla\Phi_j^1, \nabla\Phi_k^1)_{\Theta_R} - ((1 - X_0^R)\nabla\Phi_j^1, (1 - X_0^R)\nabla\Phi_k^1)_{\Theta_R} \\ &\quad - (\Phi_j^1\nabla X_0^R, \nabla(X_0^R\Phi_k^1))_{\Theta_R} - (X_0^R\nabla\Phi_j^1, \Phi_k^1\nabla X_0^R)_{\Theta_R} \end{aligned}$$

равно $R^{d-2}\delta_{j,k}$, а остальные три слагаемых приобретают порядок R^{-2} , так как соответствующие интегралы вычисляются на множествах диаметром $O(1)$, а подынтегральные выражения суть $O(R^{-2})$ в силу оценок (4.43). В результате приходим к соотношениям

$$|\langle \mathcal{U}_j^R, \mathcal{U}_k^R \rangle - R^{d-2}\delta_{j,k}| \leq c_{jk}R^{-2}, \quad j, k = m, \dots, m + \varkappa_m^R - 1, \quad (4.44)$$

и

$$|\|\mathcal{U}_j^R\| - R^{(d-2)/2}| \leq C_j R^{-1}, \quad j = m, \dots, m + \varkappa_m^R - 1. \quad (4.45)$$

Обработаем величины $\delta_m^R, \dots, \delta_{m+\varkappa_m^R-1}^R$ из формулы (4.38), найденные по функциям (4.42). Согласно определениям (4.36) и (4.37) имеем

$$\begin{aligned} \delta_j^R &= \|\mathcal{U}_j^R\|^{-1} \sup |\langle \mathcal{K}^R \mathcal{U}_j^R, \mathcal{W}^R \rangle| = R^2(M_m^1)^{-1} \|\mathcal{U}_j^R\|^{-1} \\ &\quad \times \sup |R^{-2}M_m^1(\mathcal{U}_j^R, \mathcal{W}^R)_{\Omega^R} - (\nabla\mathcal{U}_j^R, \nabla\mathcal{W}^R)_{\Omega^R}|. \end{aligned} \quad (4.46)$$

При этом супремум вычисляется по единичному шару в пространстве Соболева $H_0^1(\Omega^R)$, т.е. $\|\mathcal{W}^R\| = \|\nabla \mathcal{W}^R; L^2(\Omega^R)\| \leq 1$ и благодаря неравенству Фридрихса–Пуанкаре выполнено соотношение

$$\|\mathcal{W}^R; L^2(\Theta_R \cap \text{supp}(1 - X_0^R))\| \leq C \|\mathcal{W}^R\| \leq C. \quad (4.47)$$

Интегрируя по частям в выражении $I^R(\mathcal{U}_j^R, \mathcal{W}^R)$ между последними знаками модуля из формулы (4.46) и учитывая, что $x \mapsto \Phi_j^1(R^{-1}x)$ – собственная функция задачи (2.1), (2.2), отвечающая ее собственному числу (2.4), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} I^R(\mathcal{U}_j^R, \mathcal{W}^R) &= ((\Delta + R^{-2}M_m^1)\mathcal{U}_j^R, \mathcal{W}^R)_{\Omega^R} \\ &= \left(2(\nabla\Phi_j^1)^\top \nabla X_0^R + \Phi_j^1 \Delta X_0^R, \mathcal{W}^R\right)_{\Omega^R}. \end{aligned}$$

Здесь появился коммутатор оператора Лапласа со срезающей функцией:

$$[\Delta, X_0^R] = 2(\nabla X_0^R)^\top + \Delta X_0^R.$$

Итак, при учете оценок (4.43), (4.47) и (4.45) обнаруживаем, что

$$|I^R(\mathcal{U}_j^R, \mathcal{W}^R)| \leq c_j R^{-1} \Rightarrow \delta_j^R \leq c_j R R^{-(d-1)/2} = c_j R^{-d/2}.$$

В результате согласно лемме 4.1 обнаруживаем собственное число $\kappa_{n(j)}^R$ оператора \mathcal{K}^R с некоторым номером $n(j)$, для которого

$$\left| \kappa_{n(j)}^R - k_m^R \right| = \left| \frac{1}{\lambda_{n(j)}^R} - \frac{R^2}{M_m^1} \right| \leq c_j R^{-d/2} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} \left| \lambda_{n(j)}^R - R^{-2}M_m^1 \right| \leq c_j R^{-2-d/2} M_m^1 \lambda_{n(j)}^R, \\ \lambda_{n(j)}^R (1 - c_j R^{-2-d/2} M_m^1) \leq R^{-2} M_m^1, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \lambda_{n(j)}^R \leq 2c_j R^{-2} M_m^1 \text{ при } c_j R^{-2-d/2} M_m^1 \leq 1/2, \\ \left| \lambda_{n(j)}^R - R^{-2} M_m^1 \right| \leq 2c_j R^{-4-d/2} (M_m^1)^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, в $C_j R^{-4-d/2}$ -окрестности точки $R^{-2}M_m^1$ найдены собственные числа $\lambda_{n(m)}^R, \dots, \lambda_{n(m+\varkappa_m^R-1)}^R$ из дискретного спектра (1.7) оператора A^R . Если оказалось, что указанные числа различны, т.е.

$$n(j) \neq n(k) \text{ при } j, k = m, \dots, m + \varkappa_m^R - 1 \text{ и } j \neq k, \quad (4.49)$$

то проверка формул (4.34) и (4.35) закончена (ср. рассуждения ниже). Убедимся в справедливости высказывания (4.49) при помощи второй части леммы 4.1, в которой примем

$$\delta^R = \max\{\delta_m^R, \dots, \delta_{m+\varkappa_m^R-1}^R\} \leq R^{-d/2} \max\{C_m, \dots, C_{m+\varkappa_m^R-1}\}, \quad \delta_*^R = \frac{\delta^R}{K},$$

где $K > 0$ – большой множитель, фиксируемый далее. Обозначим

$$\mathbf{a}_{(j)}^R = (\mathbf{a}_{(j)m}^R, \dots, \mathbf{a}_{(j)m+\varkappa_m^R-1}^R)^\top \in \mathbb{C}^{\mathbf{X}^R}$$

столбцы коэффициентов линейных комбинаций

$$\mathbf{S}_j^R(x) = \sum_{p=\mathbf{K}^R}^{\mathbf{K}^R+\mathbf{X}^R-1} \mathbf{a}_{(j)p}^R \mathbf{u}_p^R(x),$$

предоставленных леммой 4.1 в формулах (4.39) для \mathcal{U}_j^R . Ввиду соотношений (4.40) и (4.39), (4.44) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \overline{\mathbf{a}_{(k)}^R}^\top \mathbf{a}_{(k)}^R - \delta_{j,k} \right| \\ &= \left| \langle \mathbf{S}_{(j)}^R, \mathbf{S}_{(k)}^R \rangle - \delta_{j,k} \right| = \left| \langle \mathbf{S}_{(j)}^R - \|\mathcal{U}_j^R\|^{-1} \mathcal{U}_j^R, \mathbf{S}_{(k)}^R \rangle \right. \\ &+ \left. \langle \|\mathcal{U}_j^R\|^{-1} \mathcal{U}_j^R, \mathbf{S}_{(k)}^R \rangle - \|\mathcal{U}_k^R\|^{-1} \langle \mathcal{U}_k^R, \mathbf{S}_{(k)}^R \rangle \right| + \\ &+ \|\mathcal{U}_j^R\|^{-1} \|\mathcal{U}_k^R\|^{-1} \left(\langle \mathcal{U}_j^R, \mathcal{U}_k^R \rangle - R^{d-2} \delta_{j,k} \right) \\ &+ \left(1 - r^{d-2} \|\mathcal{U}_j^R\|^{-1} \|\mathcal{U}_k^R\|^{-1} \right) \delta_{j,k} \leq \left(\frac{4}{K} + \frac{C}{R} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, при больших K и R столбцы $\mathbf{a}_{(m)}^R, \dots, \mathbf{a}_{(m+\varkappa_m^R-1)}^R \in \mathbb{C}^{\mathbf{X}^R}$ “почти ортонормированы”, что возможно лишь при ограничении

$$\mathbf{X}^R \geq \varkappa_m^R.$$

Зафиксировав подходящее число K , получаем в итоге, что в $C_m R^{-d/2}$ -окрестности точки $(M_m^R)^{-1} = R^2 (M_m^1)^{-1}$ найдены не менее \varkappa_m^R собственных чисел оператора \mathcal{K}^R . Аналогичная (4.48) выкладка показывает, что и в $c_m R^{-4-d/2}$ -окрестность точки $M_m^R = R^{-2} M_m^1$ попадает такое же количество собственных чисел оператора A^R задачи (1.2), (1.3). Зафиксируем \varkappa_m^R -кратное собственное число (2.4) задачи (2.1),

(2.2) (см. формулу (4.41)) и подсчитаем общее количество обнаруженных собственных чисел на интервале $(0, R^{-2}M_{m+\varkappa_m}^1)$. Согласно выводу (2.6), (2.8) из п. 1, § 2, их должно быть в точности $m + \varkappa_m - 1$. Вместе с тем при достаточно большом R согласно предыдущим вычислениям каждому из первых $m + \varkappa_m - 1$ членов M_q^R последовательности (2.4) поставлено в соответствие хотя бы одно собственное число $\lambda_{n(q)}^R$, а значит, отображение $q \mapsto n(q)$ тождественное, т.е. асимптотические формулы (4.34) и (4.35) установлены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, М., Наука, 1973.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. — Л. изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
3. D. S. Jones, *The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains*. — Proc. Camb. Phil. Soc. **49** (1953), 668–684.
4. S. Molchanov, B. Vainberg, *Scattering solutions in networks of thin fibers; small diameter asymptotics*. — Comm. Math. Phys. **273**, No. 2 (2007), 533–559.
5. С. А. Назаров, *Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов*. — Изв. РАН, Серия матем. **84**, No. 6 (2020), 73–130.
6. С. А. Назаров, *Разнообразные проявления аномалий Вуда в локально искривленных квантовых волноводах*. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **58**, No. 11 (2018), 1911–1930.
7. С. А. Назаров, *Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор)*. — Акуст. ж. **66**, No. 5 (2020), 489–508.
8. С. А. Назаров, *Волновод с двойным пороговым резонансом на простом пороге*. — Матем. сб. **211**, No. 8 (2020), 20–67.
9. D. Grieser, *Spectra of graph neighborhoods and scattering*. — Proc. London Math. Soc. **97**, No. 3 (2008), 718–752.
10. K. Pankrashkin, *Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions*. — J. Math. Anal., Appl. **449**, No. 1 (2017), 907–925.
11. Ф. Л. Бахарев, С. А. Назаров, *Критерии наличия и отсутствия ограниченных решений на пороге непрерывного спектра в объединении квантовых волноводов*. — Алгебра и анализ **32**, No. 6 (2020), 1–23.
12. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenevski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten*. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
13. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, М., Наука, 1989.
14. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.

15. D. V. Evans, M. Levitin, D. Vasil'ev, *Existence theorems for trapped modes.* — J. Fluid Mech. **261** (1994), 21–31.
16. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Об условиях излучения для самосопряженных эллиптических задач.* — Докл. АН СССР **311**, No. 3 (1990), 532–536.
17. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994.
18. Р. Митра, С. Ли, *Аналитические методы теории волноводов*, М., Мир, 1974.
19. Н. А. Умов, *Уравнения движения энергии в телах*, Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874.
20. J. H. Poynting, *On the transfer of energy in the electromagnetic field.* — Phil. Trans. of the Royal Society of London, **175** (1984), 343–361.
21. Л. И. Мандельштам, *Лекции по оптике теории относительности и квантовой механике*, Сб. тр. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1947.
22. L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations*, New York: Interscience, 1964.
23. В. А. Кондратьев, *О гладкости решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра.* — Дифф. уравнения, **6**, No. 10 (1970), 1831–1843.
24. В. А. Кондратьев, *Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра.* — Дифф. уравнения **13**, No. 11 (1977), 2026–2032.
25. В. А. Никишкин, *Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра.* — Вестн. Моск. ун-та, No. 2 (1979), 51–62.
26. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Об эллиптичности краевых задач в области с кусочно гладкой границей.* — Тр. симп. по мех. сплошных сред и родственным пробл. анализа. Тбилиси, Мецниереба, **1** (1973), 171–181.
27. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки функций Грина и шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в двугранном угле.* — Сиб. матем. ж. **19**, No. 5 (1978), 1065–1082.
28. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода.* — Теор. и матем. физика **167**, No. 2 (2011), 239–262.
29. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.* — Успехи матем. наук **12**, No. 5 (1953), 3–122.

Nazarov S. A., Ruotsalainen K.M., Uusitalo P. J. Scattering coefficients and threshold resonances in a waveguide with inflating resonator.

The spectral Dirichlet problem is considered in a waveguide formed from a semi-infinite cylinder Π and the resonator Θ_R obtained by inflating R times a fixed star-shaped domain Θ . The behaviour of the scattering coefficient $s(R)$ is studied as the parameter R grows, namely it is verified that this coefficient moves clockwise without stops along the unit circle

in the complex plane. For $s(R) = -1$, the proper threshold resonance occurs which is accompanied by the appearance of an almost standing wave and provokes for various near threshold anomalies, in particular, splitting eigenvalues off from the threshold. It is shown that under the geometrical symmetry resonances of other type are generated by trapped waves at the threshold. The justification of asymptotics is made by applying the technique of weighted spaces with detached asymptotics and an analysis of the singularities of physical fields at the edge $\partial\Theta_R \cap \partial\Pi$.

Институт Проблем машиноведения РАН
199178, СПб. В.О. Большой пр., 61
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 30 сентября 2021 г.

University of Oulu,
Faculty of Information Technology
and Electrical Engineering
Applied and Computational Mathematics
P.O. Box 90014, Oulu Finland
E-mail: keijo.ruotsalainen@oulu.fi

University lecturer
University of Oulu,
Faculty of Information Technology
and Electrical Engineering
Applied and Computational Mathematics
P.O. Box 90014, Oulu Finland
E-mail: pauliina.uusitalo@oulu.fi